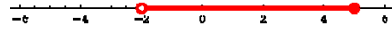


MB 3 Funktio

Lukuväleistä

$$-2 < x \leq 5 \text{ tai }]-2,5]$$



$$x \leq 3 \text{ tai }]-\infty, 3]$$

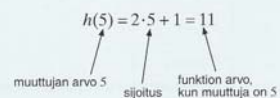
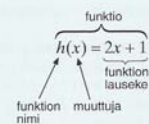


Funktio on *sääntö*, joka ilmoittaa asioiden välisen riippuvuussuhteen. *Muuttujaksi* (variaabeliksi) sanotaan sitä arvoa, jota muutetaan, esimerkiksi edellä pöytien määrä. Säännön avulla saatua arvoa sanotaan *funktion arvoksi*. Muuttujaa merkitään yleensä kirjaimella x ja funktion arvoja kirjaimella y .

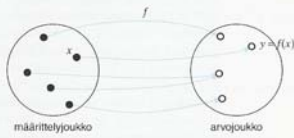
Jos funktion arvo saadaan matemaattisten laskutoimitusten avulla laskettua toisesta suureesta, tätä laskusääntöä sanotaan *funktion lausekkeeksi*.

Ne muuttujat, joilla funktion arvo on mielekäs laskea, muodostavat *määrittelyalueen* eli *määrittelyjoukon*. Esimerkissä 4 tuolien lukumäärä voidaan laskea millä tahansa reaalityluvulla, mutta mielekkäitä pöytien määriä ovat vain positiiviset kokonaislukuarvot ($p \in \mathbb{Z}_+$).

Funktiota on tapana merkitä kirjaimilla f, g, h, i, \dots tai tilannetta kuvaavalla kirjaimella, tilavuutta kirjaimella V , massaa kirjaimella m jne. Riippuvuus voidaan kirjoittaa muotoon $y = f(x)$, missä x on muuttuja. Merkintä luetaan "f arvolla x".



Funktio yhdistää kahden eri joukon jäseniä keskenään yksikäsitteisesti.



Funktion kaikki arvot y muodostavat **arvojoukon**. Arvojoukko koostuu niistä arvoista, joita funktio saa mielekkäillä, määrittelyjoukkoon kuuluvilla muuttujan x arvoilla. Esimerkiksi tuoli-tehtävän arvojoukon muodostavat tuolien lukumäärät eli luku 4 ja sitä suuremmat parilliset kokonaisluvut.

Yksikäsitteisyys

6. a) Taulukko

x	y
1	2
2	4
3	6
4	8
x	$2 \cdot x$

Saadaan funktio $y = 2x$ eli $f(x) = 2x$

Täytyy tuntea/arvata tyyppi

b) Taulukko

x	y	y
1	1	$= 1^2$
2	4	$= 2^2$
3	9	$= 3^2$
4	16	$= 4^2$
x		x^2

Saadaan funktio $y = x^2$ eli $f(x) = x^2$

c) Taulukko

x	y	y
1	2	$= 3 \cdot 1 - 1$
2	5	$= 3 \cdot 2 - 1$
3	8	$= 3 \cdot 3 - 1$
4	11	
x		

Saadaan funktio $y = 3x - 1$ eli $f(x) = 3x - 1$

d) Käytetään päättelyssä b) kohdan arvoja viiheenä, sillä y -n arvot ovat kahta pienemmät kuin siinä.

x	y	y
1	-1	$= 1^2 - 2$
2	2	$= 2^2 - 2$
3	7	$= 3^2 - 2$
4	14	$= 4^2 - 2$
x		$= x^2 - 2$

Saadaan funktio $y = x^2 - 2$ eli $f(x) = x^2 - 2$

Vastaus: a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = 3x - 1$ d) $f(x) = x^2 - 2$

T 10. (sivu 22)

$$f(x) = 3x - 5$$

$$a) f(3) = 3 \cdot 3 - 5 = 9 - 5 = 4$$

T 10. (sivu 22)

$$f(x) = 3x - 5$$

b) $f(k) = 3k - 5$

T 10. (sivu 22)

$$f(x) = 3x - 5$$

c) $f(t+1) = 3 \cdot (t+1) - 5$
 $= 3t + 3 - 5$
 $= 3t - 2$

T 10. (sivu 22)

$$f(x) = 3x - 5$$

d) $3x - 5 = 0$
 $3x = 5 \quad | :3$
 $x = 1\frac{2}{3}$

Nollakohta!

T 10. (sivu 22)

$$f(x) = 3x - 5$$

e) $3x - 5 = -5$
 $3x = -5 + 5$
 $3x = 0$
 $x = 0$

T 10. (sivu 22)

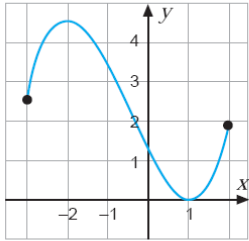
$$f(x) = 3x - 5$$

f) $3x - 5 = \frac{1}{3}$
 $3x = \frac{1}{3} + 5$
 $3x = 5\frac{1}{3}$

T 10. (sivu 22)

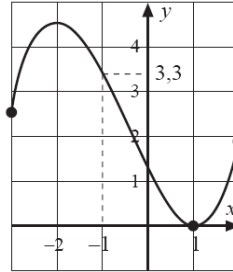
$$3x = \frac{16}{3} \quad | :3$$
$$x = \frac{16}{9}$$
$$x = 1\frac{7}{9}$$

12. a)



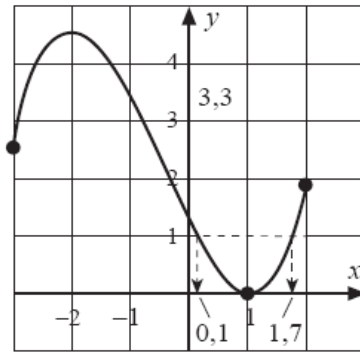
Funktion nollakohdilla tarkoitetaan niitä muuttujan x arvoja, joissa kuvaaja leikkaa x -akselin tai sivuaa sitä eli $x = 1$.

b) Katsotaan kuvaajasta ne y :n arvot, jotka vastaavat muuttujan arvoja $-1 \leq x \leq 1$. Nämä ovat $0 \leq y \leq 3,3$.



11

c)



Muuttujan arvot ovat $0,1 \leq x \leq 1,7$

T 18. (sivu 23)

$$f(x) = x^2 - 1$$

a) $f(0) = 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

T 18. (sivu 23)

$$f(x) = x^2 - 1$$

b) $f(a) = a^2 - 1$

T 18. (sivu 23)

$$f(x) = x^2 - 1$$

c) $f(x+1) = (x+1)^2 - 1$

T 18. (sivu 23)

$$f(x) = x^2 - 1$$

c) $f(x+1) = (x+1)^2 - 1$
 $= x^2 + 2x + 1 - 1$
 $= x^2 + 2x$

T 18. (sivu 23)

$$f(x) = x^2 - 1$$

d) $a \cdot f(x-2) = a \cdot [(x-2)^2 - 1]$

T 18. (sivu 23)

$$f(x) = x^2 - 1$$

d) $a \cdot f(x-2) = a \cdot [(x-2)^2 - 1]$
 $= a \cdot (x^2 - 4x + 4 - 1)$
 $= ax^2 - 4ax + 3a$

Elokuvasssa Avaruusseikkailu 2001 ohjaaja Kubrick käytti kapinoivasta tietokoneesta nimeä HAL

Tämä lienee Caesarin salakirjoituksella tehty salanimi, mikäähän olisi nimi salaamattomana?

MB 3

Lineaarisia polynomifunktioita

Polynomi?

1.asteen polynomifunktio (suora)

$$y = kx + b$$

k= kulmakerroin (kaltevuus)

b = vakiotermi (y-akselin leikkauskohta)

Ratkaistu muoto

$$y = kx + b$$

Normaalimuoto

$$Ax + By + C = 0$$

- Nouseva
- Laskeva
- x-akselin suuntainen
- y-akselin suuntainen

Suoran yhtälön määrittäminen

Kulmakerroin suoralle, joka kulkee pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Suoran yhtälö, kun tunnetaan kulmakerroin ja piste (x_0, y_0)

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

T 23 a). (sivu 44)

T 31. (sivu 44)

a)

$$y = 4x - 54$$

Kulmakerroin $k = 4$

kun x kasvaa kahdella:

$$y:n \text{ muutos} = 4 \cdot 2 = 8$$

Siis y kasvaa 8:lla

T 31. (sivu 44)

b) $y = 5 = 0x - 5$

Kulmakerroin $k = 0$

kun x kasvaa kahdella:

y :n muutos = $0 \cdot 2 = 0$

T 31. (sivu 44)

c) $6x - 7y = 15$

$$-7y = -6x + 15$$

$$y = \frac{6}{7}x - 2\frac{1}{7}$$

T 31. (sivu 44)

$$y = \frac{6}{7}x - 2\frac{1}{7}$$

Kulmakerroin $k = \frac{6}{7}$

kun x kasvaa kahdella:

y :n muutos = $\frac{6}{7} \cdot 2 = 1\frac{5}{7}$

T 31. (sivu 44)

d) $x = 3$

Suoralla ei ole kulmakerrointa.

kun x kasvaa kahdella:

EI SAMALLA SUORALLA

T 35. (sivu 45)

a) **Valitaan**

$$(x_1, y_1) = (1, 2)$$

$$(x_2, y_2) = (3, 4)$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{4 - 2}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$$

T 35. (sivu 45)

Suoran yhtälö

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$y = x - 1 + 2$$

$$y = x + 1$$

T 35. (sivu 45)

b) Valitaan

$$(x_1, y_1) = (-1, -2)$$

$$(x_2, y_2) = (1, 2)$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{2 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{2 + 2}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

T 35. (sivu 45)

Suoran yhtälö

$$y - y_2 = k(x - x_2)$$

$$y - 2 = 2 \cdot (x - 1)$$

$$y - 2 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + 2$$

$$y = 2x$$

T 35. (sivu 45)

c) Valitaan

$$(x_1, y_1) = (-7, 6)$$

$$(x_2, y_2) = (15, -4)$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{-4 - 6}{15 - (-7)} = \frac{-10}{22} = -\frac{5}{11}$$

T 35. (sivu 45)

Suoran yhtälö

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - 6 = -\frac{5}{11}(x - (-7))$$

T 35. (sivu 45)

$$y - 6 = -\frac{5}{11}(x + 7)$$

$$y - 6 = -\frac{5}{11}x - \frac{35}{11}$$

$$y = -\frac{5}{11}x - 3\frac{2}{11} + 6$$

$$y = -\frac{5}{11}x + 2\frac{9}{11}$$

T 35. (sivu 45)

d) $(x_1, y_1) = \left(8\frac{1}{2}, 0\right)$

$$(x_2, y_2) = (2, -4)$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{-4 - 0}{2 - 8\frac{1}{2}} = \frac{-4}{-6\frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 13} = \frac{8}{13}$$

T 35. (sivu 45)

Suoran yhtälö

$$y - y_2 = k(x - x_2)$$

$$y - (-4) = \frac{8}{13}(x - 2)$$

T 35. (sivu 45)

$$y + 4 = \frac{8}{13}x - \frac{16}{13}$$

$$y = \frac{8}{13}x - 1\frac{3}{13} - 4$$

$$y = \frac{8}{13}x - 5\frac{3}{13}$$

T 37a.(sivu 45)

$$x + 2y + 3 = 0$$

$$2y = -x - 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$$

T 37a.(sivu 45)

$$x + 2y + 3 = 0$$

$$2y = -x - 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$$

Kysytyllä suoralla on sama kulmakerroin.

T 37a.(sivu 45)

Suoran yhtälö

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Sijoitetaan yhtälöön:

$$(x_0, y_0) = (3, 4)$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

T 37a.(sivu 45)

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

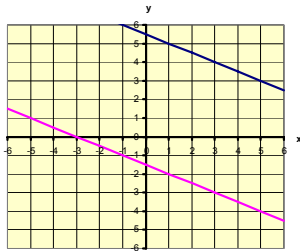
$$y - 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} + 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$$

TAI

$$x + 2y - 11 = 0$$

T 37a.(sivu 45)**T 37b.**(sivu 45)

Piste $(x, y) = (2; 7,5)$
toteuttaa suoran yhtälön $y = kx$

Tehdään sijoitus:

$$7,5 = k \cdot 2$$

T 37b.(sivu 45)

Piste $(x, y) = (2; 7,5)$
toteuttaa suoran yhtälön $y = kx$

Tehdään sijoitus:

$$7,5 = k \cdot 2$$

$$2k = 7,5$$

$$k = 3,75$$

T 26. (sivu 44)

Saatetaan suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon

Ensimmäinen suora:

$$x + y - 1 = 0$$

$$y = -x + 1$$

T 26. (sivu 44)

Saatetaan suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon

Ensimmäinen suora:

$$x + y - 1 = 0$$

$$y = -x + 1$$

Kulmakerroin on -1 .

Suora leikkaa y-akselin kohdassa 1 .

T 26. (sivu 44)

Saatetaan suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon

Toinen suora:

$$x - y = 0$$

$$-y = -x$$

$$y = x$$

T 26. (sivu 44)

Saatetaan suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon

Toinen suora:

$$x - y = 0$$

$$-y = -x$$

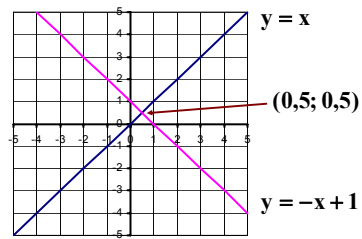
$$y = x$$

Kulmakerroin on 1.

Suora leikkaa y-akselin kohdassa 0.

T 26. (sivu 44)

Piirretään suorat

**T 26.** (sivu 44)

Algebraalinen ratkaisu

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

T 26. (sivu 44)

Sijoitetaan saatu x:n arvo

$$\frac{1}{2} + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}$$

T 26. (sivu 44)

Sijoitetaan saatu x:n arvo

$$\frac{1}{2} + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Suorat leikkaavat toisensa pisteessä

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

T 27. (sivu 44)

a)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \parallel \cdot 1 \\ \parallel \cdot (-1) \end{array}$$

T 27. (sivu 44)

a)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 & \parallel \cdot 1 \\ 2x - 4y = 0 & \parallel \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$y + 5 = 0$$
$$y = -5$$

T 27. (sivu 44)

Sijoitetaan saatu y:n arvo

$$2x - 4(-5) = 0$$

$$2x + 20 = 0$$

$$2x = -20$$

$$x = -10$$

T 27. (sivu 44)

Sijoitetaan saatu y:n arvo

$$2x - 4(-5) = 0$$

$$2x + 20 = 0$$

$$2x = -20$$

$$x = -10$$

Suorien leikkauspiste on $(-10, -5)$

T 27. (sivu 44)

b)

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y = -\frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$$

T 27. (sivu 44)

b)

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y = -\frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan alemman yhtälön y:n lauseke ylempään yhtälöön:

T 27. (sivu 44)

$$x + \left(-\frac{3}{2}x - 1\right) + 2 = 0$$

$$x - \frac{3}{2}x - 1 + 2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x = -1$$

$$x = 2$$

T 27. (sivu 44)

Sijoitetaan saatu x:n arvo:

$$y = -\frac{3}{2} \cdot 2 - 1 = -3 - 1 = -4$$

T 27. (sivu 44)

Sijoitetaan saatu x:n arvo:

$$y = -\frac{3}{2} \cdot 2 - 1 = -3 - 1 = -4$$

Suorien leikkauspiste on (2, -4)

Lineaarisia malleja

**Lineaarinen riippumattomuus –
suoraan verrannollisuus**

T 53 a (sivu 60)

Matka ja aika ovat suoraan verrannolliset.

$$s=vt \text{ (v = nopeus)}$$

$$75=v \cdot 2,5$$

$$v=30 \text{ (km/h)}$$

siis

$$s= 30 \cdot t$$

T 53 b (sivu 60)

matka (km)	aika (h)
75	2,5
x	1,5

$$\frac{75}{x} = \frac{2,5}{1,5}$$

$$s=30 \cdot 1,5 = 45 \text{ (km) TAI}$$

$$2,5x = 1,5 \cdot 75$$

$$x = \frac{1,5 \cdot 75}{2,5}$$

$$x = 45$$

T 53 c (sivu 60)

matka (km)	aika (h)
75	2,5
30	x

$$30 = 30 \cdot t \\ t = 1 \text{ (h)}$$

TAI

$$\frac{75}{30} = \frac{2,5}{x} \\ 75x = 30 \cdot 2,5 \\ x = \frac{30 \cdot 2,5}{75} \\ x = 1$$

T 55. (sivu 60)

Merkitään: Muuttuja t on aika tunteina.

Huoltotyön kokonaismaksu on perusmaksun ja ajasta riippuvan osuuden summa:

$$f(t) = 25 + 55t$$

Puolen tunnin huolto: $f(0,5) = 25 + 55 \cdot 0,5 = 52,5$

Puolentoista tunnin huolto:

$$f(1,5) = 25 + 55 \cdot 1,5 = 107,5$$

Vastaus: 52,50 € ja 107,50 €

T 57. (sivu 61)

Yhtälössä $y = kx + b$ aika x on vuorokausina, y on kuolleiden määrä.

$$10 \text{ s} = \frac{10}{60 \cdot 60 \cdot 24} \text{ d} = \frac{1}{8640} \text{ d}$$

Tässä on kyseessä suoraan verrannolliset suuret siten, että $y = kx$, missä k on vakio.

T 57. (sivu 61)

Vakion k laskemiseksi sijoitetaan yhtälöön $y = 1$ (yksi kuollut) ja aika 10 s vuorokausina.

$$1 = k \cdot \frac{1}{8640}$$

$$k = 8640$$

Siis yhtälö on $y = 8640x$

T 57. (sivu 61)

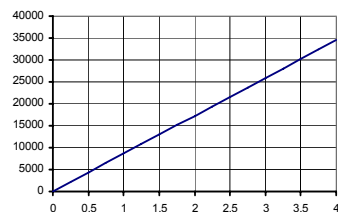
Lasketaan kuolleiden määrä y , kun aika x on 45 min eli

$$x = \frac{45}{60 \cdot 24} \text{ d} = 0,03125 \text{ d}$$

$$y = 8640 \cdot 0,03125 = 270$$

T 57. (sivu 61)

Kuolleiden määrä on $y = 8640x$, kun aika on vuorokausina



T 57. (sivu 61)

Vastaus: Yhtälö on $y = 8640x$.
45 minuutin aikana 270 ihmistä kuolee tupakoinnin vuoksi.

T 68. (sivu 63)

Lineaarinen riippuvuus. Arvosana 4,5 vastaa pistemäärää 10 ja arvosana 10 pistemäärää 36

Arvosteluosuoralla $y = kx + b$ on pisteet:

$$(x_1, y_1) = (10; 4,5)$$

$$(x_2, y_2) = (36; 10)$$

$$k = \frac{10 - 4,5}{36 - 10} = \frac{5,5}{26} = \frac{11}{52}$$

T 68. (sivu 63)

Ratkaistaan vakio b tiedolla, että kun x on 36, niin y on 10:

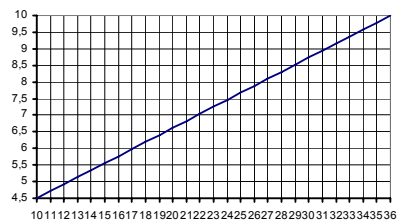
$$10 = \frac{11}{52} \cdot 36 + b$$

$$b = 10 - \frac{396}{52} = \frac{124}{52}$$

Arvosteluosuora on
$$\frac{11}{52}x + \frac{124}{52}$$

T 68. (sivu 63)

Arvosteluosuora $y = \frac{11}{52}x + \frac{124}{52}$



T 68. (sivu 63)

Lasketaan, mitä arvosanaa vastaa pistemäärä 20:

$$y = \frac{11}{52} \cdot 20 + \frac{124}{52} = 6,6$$

T 68. (sivu 63)

Lasketaan, mitä pistemäärää arvosana 6 vastaa:

$$\frac{11}{52}x + \frac{124}{52} = 6$$

$$11x + 124 = 312$$

$$x = \frac{188}{11} = 17$$

T 68. (sivu 63)

Lasketaan, mitä pistemäärää arvosana 9– eli 8,75 vastaa:

$$\frac{11}{52}x + \frac{124}{52} = 8,75$$

$$11x + 124 = 455$$

$$x = \frac{331}{11} = 30$$

T 73. (sivu 64)

Asteikkojen välillä on lineaarinen riippuvuus.

Olkoon $f(x) = y = kx + b$, missä x on lämpötila celsiusasteina ja y on lämpötila fahrenheitasteina.

Kuvaajalta tiedetään kaksi pistettä:

$$(x_1, y_1) = (15, 59)$$

$$(x_2, y_2) = (100, 212)$$

T 73. (sivu 64)

Kulmakerroin

$$k = \frac{212 - 59}{100 - 15} = \frac{153}{85} = 1,8$$

Siis $f(x) = 1,8x + b$

T 73. (sivu 64)

Kulmakerroin

$$k = \frac{212 - 59}{100 - 15} = \frac{153}{85} = 1,8$$

Siis $f(x) = 1,8x + b$

Vakio b voidaan ratkaista tiedolla:

$$f(15) = 1,8 \cdot 15 + b = 59$$

T 73. (sivu 64)

$$f(15) = 1,8 \cdot 15 + b = 59$$

$$1,8 \cdot 15 + b = 59$$

$$b = 59 - 1,8 \cdot 15$$

$$b = 32$$

Vastaus: Celsiusasteet x muutetaan fahrenheit-asteiksi funktiolla $f(x) = 1,8x + 32$

Lineaarinen regressio

Joko laskimella tai

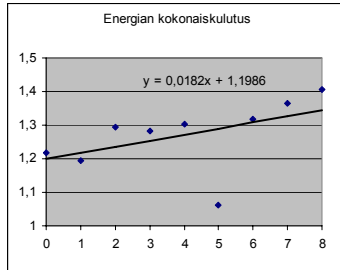
taulukkolaskennalla(Excel)

Moodlessa Java-ohjelma, jolla voit myös kokeilla

Tehtävä 76 s.65
Kuvaaja, johon lisätty trendiviiva

Vuosi 1994 alkaen Energian kulutus

0	1,217
1	1,195
2	1,294
3	1,283
4	1,303
5	1,061
6	1,318
7	1,366
8	1,405



Ohjeita

- Variaabelin kotisivu:

http://www.otava.fi/oppilaan_maaailma/lukio/variaabeli/

Sekä Excel- että laskinohjeet!

Toisen asteen yhtälö (kertausta)

Esimerkkejä

$$x^2 = 49 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm 7$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

Ei ratkaisua

Toisen asteen yhtälö

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{Vastaus: } x = 1 \text{ tai } x = 3$$

Ratkaise

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Toisen asteen yhtälö

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\text{Diskriminantti } D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Diskriminantin merkki:

- Jos $D > 0$, yhtälöllä 2 erisuurta reaalijuurta
- Jos $D = 0$, yhtälöllä 1 reaalijuuri (kaksoisjuuri)
- Jos $D < 0$, yhtälöllä ei ole reaalijuuria

T 98. (sivu 83)

a)

$$x^2 - 9x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$$

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 81 - 48 = 33 > 0$$

Vastaus: Yhtälöllä on kaksi reaalijuurta

T 98. (sivu 83)

b)

$$3x^2 + 0x + 2 = 0$$

$$D = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -24 < 0$$

Vastaus: Yhtälöllä ei ole reaalijuuria

T 98. (sivu 83)

b)

$$2x^2 + 12x + 18 = 0$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 144 - 144 = 0$$

Vastaus: Yhtälöllä on yksi reaalijuuri

T 101. (sivu 83)

$$x^2 + x + a = 0$$

Yhtälöllä yksi reaalijuuri:

Diskriminatti = 0

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 0$$

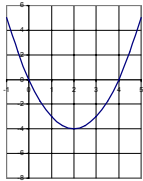
$$1 - 4a = 0$$

$$a = \frac{1}{4}$$

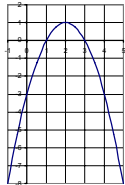
Toisen asteen polynomifunktio

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Paraabeli $f(x) = ax^2 + bx + c$



$a > 0$



$a < 0$

T 83 a). (sivu 81)

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

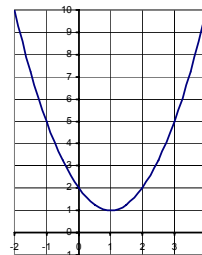
$$\text{Nollakohdat: } x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Ei ratkaisua

Lasketaan funktion arvoja taulukkoon

x	$x^2 - 2x + 2$
2	2
1	1
3	5
0	2
4	10
-1	5
-2	10



T 83. (sivu 84)

b) $g(x) = -x^2 + 4x - 3$

Lasketaan funktion nollakohdat:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$

T 83. (sivu 81)

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = 3$

T 83. (sivu 81)

Paraabelin huippupiste on aina nollakohtien puolivälissä, joten huipun x-koordinaatti on 2.

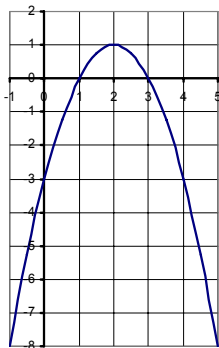
Lasketaan tämä ja muitakin kuvaajan pisteitä taulukolla.

T 83. (sivu 81)

x	$y = -x^2 + 4x - 3$
2	$-2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$
1	0
3	0
0	-3
4	$-4^2 + 4 \cdot 4 - 3 = -16 + 16 - 3 = -3$
-1	$-(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 3 = -8$
5	$-5^2 + 4 \cdot 5 - 3 = -25 + 20 - 3 = -8$

T 83. (sivu 81)

$$y = -x^2 + 4x - 3$$



T 91. (sivu 82)

Paraabelin yhtälö on muotoa

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

Huippupiste on $(x_0, y_0) = (-1, 2)$

Sijoitus:

$$y - 2 = a(x - (-1))^2$$

$$y - 2 = a(x + 1)^2$$

T 91. (sivu 82)

Koska piste $(0, -1)$ on kuvaajalla, niin pisteen koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön:

$$-1 - 2 = a(0 + 1)^2$$

$$-3 = a$$

$$a = -3$$

Sijoitetaan saatu a :n arvo paraabelin yhtälöön

$$y - 2 = a(x + 1)^2$$

T 91. (sivu 82)

$$y - 2 = -3(x + 1)^2$$

$$y - 2 = -3(x^2 + 2x + 1)$$

$$y - 2 = -3x^2 - 6x - 3$$

$$y = -3x^2 - 6x - 1$$

Vastaus: $y = -3x^2 - 6x - 1$

T 94. (sivu 82)

Toisen asteen polynomifunktio on muotoa

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

Kuvaajalta tiedetään pisteet $(2, -1)$, ja $(6, -1)$.
sekä huippu $(4, 7)$

Tehdään sijoitus:

$$y - 7 = a(x - 4)^2$$

$$y - 7 = a(x - 4)^2$$

T 92. (sivu 82)

Koska piste $(2, -1)$ on kuvaajalla, niin pisteen koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön:

$$-1 - 7 = a(2 - 4)^2$$

$$-8 = a \cdot 4$$

$$a = -2$$

T 92. (sivu 82)

$$y - 7 = -2(x - 4)^2$$

$$y - 7 = -2(x^2 - 8x + 16)$$

$$y - 7 = -2x^2 + 16x - 32$$

$$y = -2x^2 + 16x - 25$$

$$f(7) = -2 \cdot 7^2 + 16 \cdot 7 - 25 = -11$$