LAUSELOGIIKKA (1)

- Sanalliset ilmaisut ovat usein epätarkkoja.
- On ilmaisuja, joista voidaan sanoa, että ne ovat tosia tai epätosia, mutta eivät molempia.
- Ilmaisuja, joihin voidaan liittää totuusarvoja (tosi, epätosi), sanotaan lauseiksi.
- Esimerkiksi ”Anne on opettaja.” on lause. Se on tosi tai epätosi. Voi olla, ettei tiedetä kumpaa se on.

LAUSELOGIIKKA (2)

- Se on atomilause, koska sitä ei voi jakaa sellaisiin osiin, jotka ovat lauseita.
- Lauseista saadaan uudenlaisia lauseita soveltamalla niihin ns. konnektiiveja (ei, ja, tai, jos … niin, jos ja vain jos).
- Ei-konnektiivilla saadaan lauseesta lauseen negaatio.
- Negaatio ei-”Anne on opettaja.” esiintyy puhekielessä yleensä muodossa ”Anne ei ole opettaja.”.

LAUSELOGIIKKA (3)

- Joskus negaatio esiintyy muodossa ”Ei ole niin, että Anne on opettaja.”.
- Jos asetamme lauseen ”Anne on opettaja.” todeksi, silloin lause ”Anne ei ole opettaja.” tulee epätodeksi.
- Jos taas ”Anne ei ole opettaja.” on tosi, niin lause ”Anne on opettaja.” on epätosi.

LAUSELOGIIKKA (4)

- Lyhyyden (ja täsmällisyyden) vuoksi lauseita lauseita merkitään tästä eteenpäin isoilla kirjaimilla A, B, C, … (myös A_1, A_2, …, B_1, B_2, …).
- Lause ”Anne on opettaja.” voidaan merkitä lyhyemmin symbolilla A.
- Negaation lyhennysmerkki on ¬.
- Silloin lause ”Anne ei ole opettaja.” saa lyhennysmerkinnän ¬A.

LAUSELOGIIKKA (5)

- Lausetta ”Bo on poliisi.” voidaan merkitä symbolilla B.
- Silloin ¬B tarkoittaa lausetta ”Bo ei ole poliisi.”.
- Ja-konnektiivilla eli konjunktiolla (merkitään ^) lauseista A, B saadaan yhdistetty lause A^B.

LAUSELOGIIKKA (6)

- Siis A^B tarkoittaa lausetta ”Anne on opettaja ja Bo on poliisi.”.
- Tai-konnektiivilla eli disjunktiolla (merkitään v) lauseista A, B saadaan yhdistetty lause AvB.
- Se tarkoittaa lausetta ”Anne on opettaja tai Bo on poliisi.”.

LAUSELOGIIKKA (7)

- ”Jos…niin”-konnektiivilla eli implikaatiolla (merkitään —>) lauseista A, B saadaan yhdistetty lause A—>B.
- Se tarkoittaa lausetta ”Jos Anne on opettaja, niin Bo on poliisi.”.
- ”Jos ja vain jos”-konnektiivilla eli ekvivalenssilla (merkitään <—>) lauseista A, B saadaan yhdistetty lause A<—>B.

LAUSELOGIIKKA (8)

- Se tarkoittaa lausetta ”Anne on opettaja jos ja vain jos Bo on poliisi.”.
- Konnektiiveilla saatujen lauseiden totuusarvot (tosi, epätosi) määräytyvät alkuperäisten lauseiden totuusarvojen avulla.
- Säännöt siitä, miten se tapahtuu, esitetään totuustaulujen avulla.

LAUSELOGIIKKA (9)

- Merkitään totuusarvoja luvuilla 1 (tosi) ja 0 (epätosi).
- Negaatiolle ¬ saadaan seuraava totuustaulu.

A	¬A
1	0
0	1

LAUSELOGIIKKA (10)

- Muille konnektiiveille saadaan totuustaulut

A	B	A^B	AvB	A—>B	A<—>B
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

LAUSELOGIIKKA (11)

- Lauseet ”Anne on opettaja.” ja ”Ei ole niin, että Anne ei ole opettaja.” ovat ulkoasultaan (syntaksi) erilaisia, mutta merkitykseltään (semantiikka) samanlaisia.
- Lauseiden A ja ¬¬A totuusarvot ovat samat olipa A mikä tahansa lause. Tämä voidaan osoittaa totuustaulujen avulla.
- Totuustauluilla pystytään ratkaisemaan kaikki lauselogiikan totuuskysymykset.

LAUSELOGIIKKA (12)

- Lauselogiikalle määritellään formaali kieli.
- Aluksi valitaan kielen käyttämät perussymbolit, jotka muodostavat sen aakkoston
  - propositiosymbolit $p_1, p_2, p_3, \ldots$
  - konnektiivisymbolit ¬ , ^ , v , —> , <—>
  - sulut (,)

LAUSELOGIIKKA (13)

- Propositiosymbolit edustavat atomilauseita.
- Lauselogiikan kaavat määritellään kaavanmuodostussäännöillä
  - propositiosymbolit ovat kaavoja
  - jos A on kaava, niin $(\neg A)$ on kaava
  - jos A ja B ovat kaavoja, niin $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \longrightarrow B)$ ja $(A \longleftrightarrow B)$ ovat kaavoja
  - ei ole olemassa muita kaavoja.

LAUSELOGIIKKA (14)

- Edellä symbolit A ja B ovat kaavamuuttujia. Kumpikin niistä voi edustaa mitä tahansa kaavaa.
- Isoja kirjaimia A, B, C, … (myös A_1, A_2, …, B_1, B_2, …) käytetään kaavamuuttujina.
- Lauselogiikassa kaikki kaavat ovat lauseita.
- Totuustaulujen avulla niille voidaan laskea totuusarvot.

LAUSELOGIIKKA (15)

- Sulkuja voidaan poistaa sopimalla konnektiiveille vaikutusalojen suhteelliset suuruudet.
- Sulkujen poistosäännöt
  - negaatiolla on pienin vaikutusala
  - konjunktiolla ja disjunktiolla on keskenään yhtäsuuret, mutta suuremmat vaikutusalat kuin negaatiolla
  - implikaatiolla ja ekvivalenssilla on keskenään yhtäsuuret, mutta suuremmat vaikutusalat kuin konjunktiolla ja disjunktiolla.

LAUSELOGIIKKA (16)

- Rakennepuulla voidaan kuvata kaavan rakentuminen kaavanmuodostussäännöillä ja myös päinvastoin kaavan hajottaminen alikaavoihinsa.
- Rakentumisessa viimeksi tullutta konnektiivia sanotaan pääkonnektiiviksi.
- Rakennepuulla on keskeinen rooli mm. puupäättelyssä.

LAUSELOGIIKKA (17)

- Lause on tautologia, jos sen totuustaulun jokaisella rivillä on arvo 1. Se on kaikissa mahdollisissa tapauksissa tosi.
- Esim. lause $A \vee \neg A$ on tautologia.
- Lause on kontradiktio, jos sen totuustaulun jokaisella rivillä on arvo 0. Se on kaikissa mahdollisissa tapauksissa epätosi.

LAUSELOGIIKKA (18)

- Esim. lause $A \wedge \neg A$ on kontradiktio.
- Tilanne, jossa sekä lause (A) että sen negaatio (¬A) ovat tosia, on ristiriitatilanne.
- Mikään kaksiarvoisen logiikan järjestelmä ei voi sallia sellaista.
- Ristiriitaa voidaan hyödyntää mm. epäsuorassa todistuksessa ja puupäättelyssä.

LAUSELOGIIKKA (19)

- Päättelyssä tarvitaan oletukset (premissit), joista seuraa (päätellään) johtopäätös.
- Pätevässä päättelyssä johtopäätös on aina tosi, kun kaikki premissit ovat tosia.
- Päättelyn pätevyys voidaan osoittaa totuustaulujen avulla.
- Tunnetuin päättelysääntö on modus ponens.

LAUSELOGIIKKA (20)

- Sillä on kaksi premissiä. Ne ovat muotoa A ja A —> B.
- Johtopäätös on B.
- Päättelysäännöt esitetään usein muodossa premissi$_1$, premissi$_2$, … |— johtopäätös
- Modus ponens-päättelysääntö on muotoa
  A, A —> B |— B.

LAUSELOGIIKKA (21)

- Metakielen merkintää $A \equiv B$ käytetään ilmaisemaan, että lauseiden A ja B totuustaulut ovat samat (kaikilla riveillä samat totuusarvot).
- Silloin sanotaan, että ne ovat <u>loogisesti yhtäpitäviä</u>.
- Lauselogiikan kielen määrittelyssä ei välttämättä tarvita viittä konnektiivia.
- Kaksi konnektiivia, esim. $\neg$ ja $\vee$, riittää.

LAUSELOGIIKKA (22)

- Muut voidaan esittää niiden avulla.
- Totuustauluilla voidaan osoittaa, että
  $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$,
  $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
  ja $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.
- Nämä yhtäpitävyydet ilmaisevat konnektiivien välisiä keskinäisiä yhteyksiä.

LAUSELOGIIKKA (23)

- Shefferin viiva (merkitään |) on ja-konnektiiville käänteinen ts. $A \mid B \equiv \neg(A \wedge B)$.
- Se on sama kuin ”nand” (not and).
- Jopa se yksinään on riittävä määrittelemään lauselogiikan konnektiivit, sillä totuustauluilla voidaan osoittaa, että $\neg A \equiv A \mid A$ ja $A \vee B \equiv (A \mid A) \mid (B \mid B)$.

LAUSELOGIIKKA (24)

- Tietotekniikassa se merkitsee sitä, että tietokonelaitteen kaikki porttipiirit (veräjät) voidaan rakentaa pelkästään nand-piireistä.
- Lause $A \vee \neg A$ on tautologia. Se ilmaisee <u>kolmannen poissuljetun lain</u>.
- Klassisessa lauselogiikassa ei ole olemassa kolmatta totuusarvoa.

LAUSELOGIIKKA (25)

- Lause $A \wedge \neg A$ on kontradiktio.
- Se ilmaisee ristiriidan lain.
- Tilanne, jossa sekä lause (A) että sen negaatio ($\neg A$) ovat tosia, on ristiriita (ristiriitatilanne).
- Mikään kaksiarvoisen logiikan järjestelmä ei voi missään tapauksessa sallia sellaista todeksi.

LAUSELOGIIKKA (26)

- Ristiriitaa voidaan hyödyntää mm. epäsuorassa todistuksessa ja puupäättelyssä.
- Päättelyssä tarvitaan oletukset (premissit), joista seuraa (päätellään) johtopäätös.
- Pätevässä päättelyssä johtopäätös on aina tosi, kun kaikki premissit ovat tosia.
- Päättelyn pätevyys voidaan osoittaa totuustaulujen avulla.

LAUSELOGIIKKA (27)

- Ihmisen luonnollisen päättelyn sääntöjä on tutkittu ja niistä on tehty useita kokoelmia.
- Seuraavassa esitetään Suppesin systeemin mukaisia päättelysääntöjä.
- Kirjaimet P, Q, R ja S esiintyvät säännöissä kaavamuuttujina, jotka edustavat mitä tahansa lauselogiikan kaavoja.

LAUSELOGIIKKA (28)

1. Modus ponens MP $P \rightarrow Q,\ P \ \vdash\ Q$
2. Modus tollendo ponens TP
   $P \vee Q,\ \neg P \ \vdash\ Q$
3. Modus tollendo tollens TT
   $P \rightarrow Q,\ \neg Q \ \vdash\ \neg P$
4. Yhdistämissääntö YH
   $P,\ Q \ \vdash\ P \wedge Q$

LAUSELOGIIKKA (29)

5. Poistosääntö PS $P \wedge Q \quad |\!\!— \quad P$
6. Lisäyssääntö LS $P \quad |\!\!— \quad P \vee Q$
7. Kaksoisnegaatiosääntö KN-1 $\neg\neg P \;|\!\!— \; P$
   Kaksoisnegaatiosääntö KN-2 $P \;|\!\!— \; \neg\neg P$
8. Disjunktion yksinkertaistamissääntö D
   $P \vee P \quad |\!\!— \quad P$
9. Hypoteettinen syllogismi HS
   $P \rightarrow Q,\; Q \rightarrow R \quad |\!\!— \quad P \rightarrow R$

LAUSELOGIIKKA (30)

10. Disjunktiivinen syllogismi DS
    $P \vee Q,\ P \rightarrow R,\ Q \rightarrow S \vdash R \vee S$
11. Kommutaatiosääntö K-1
    $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$
    Kommutaatiosääntö K-2
    $P \vee Q \vdash Q \vee P$

LAUSELOGIIKKA (31)

12. De Morganin sääntö DM-1

$\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

De Morganin sääntö DM-2

$\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$

De Morganin sääntö DM-3

$\neg P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$

De Morganin sääntö DM-4

$\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$

LAUSELOGIIKKA (32)

13. Implikaatiosääntö I-1

$P \leftrightarrow Q \quad \vdash \quad P \rightarrow Q$

Implikaatiosääntö I-2

$P \leftrightarrow Q \quad \vdash \quad Q \rightarrow P$

Implikaatiosääntö I-3

$P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow P \vdash \quad P \leftrightarrow Q$

LAUSELOGIIKKA (33)

14. Deduktiolause DL

...	P	(apupremissi)
	.	
	.	
	.	
...	Q	

$P \rightarrow Q$

LAUSELOGIIKKA (34)

15. Epäsuoran päättelyn sääntö ES

$$\neg Q \rightarrow (P \wedge \neg P) \;\vdash\; Q$$

- Jos $\neg Q$ otetaan apupremissiksi ja sen sekä deduktiolauseen avulla voidaan johtaa formaali ristiriita $(P \wedge \neg P)$, niin alkuperäisistä premisseistä saadaan Q.