



Kotitehtävät

1. a) Merkitään p : *Ulkona on pakkanen*, q : *Lämmityslaite on päällä*, r : *Sisällä on kylmä*. Kirjoita lauselogiikan kielellä symboleja p , q ja r käyttäen:

- Jos ulkona on pakkanen eikä lämmityslaite ole päällä, niin sisällä on kylmä.
- Jos ulkona on pakkanen, niin lämmityslaite on päällä tai sisällä on kylmä.
- Sisällä on kylmä jos ja vain jos ulkona on pakkanen ja lämmityslaite ei ole päällä.

- b) Merkitään A :lla lausetta $x = 5$ tai $x > 7$. Tutki totuustaulukon avulla, onko lause A loogisesti ekvivalentti lauseen B tai lauseen C kanssa, kun

B : Jos $x = 5$, niin $x \leq 7$.

C : Jos $x \leq 7$, niin $x = 5$.

Ohje: Merkitse p : $x = 5$ ja q : $x > 7$.

2. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x : x = k^2 \text{ jollakin } k \in \mathbb{Z}\}$ ja $C = (2, 4]$. Määritä a) $A \cap B$ b) $A \setminus C$ c) $C \setminus A$ d) $A \cup C$.
e) Luettele kaikki joukon $\{a, b, c\}$ osajoukot.

3. Laske a) $\sum_{k=2}^5 (2k+1)$ b) $\sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i}{i^2}$

c) Kirjoita summausmerkintää käyttäen: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

4. Selvitä, onko lause tosi vai epätosi. Jos lause on epätosi, niin muodosta lauseen negaatio (jonka siis pitäisi olla tosi).

- a) $\exists x \in \mathbb{N} : |x - 2007| \leq \pi$ b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 2 \geq 0$
c) $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : x^3 = y$ d) $\exists a > 0 \forall \epsilon > 0 : a < \epsilon$

5. a) Piirrä lausetta $(\neg p \vee q) \wedge p$ vastaava looginen virtapiiri.
b) Muokkaa päättelysääntöjä käyttäen lause mahdollisimman yksinkertaiseen loogisesti ekvivalenttiin muotoon ja piirrä sitä vastaava looginen virtapiiri.

6. Kerrataan lukiotietoja alkeisfunktioista:

Sievennä lauseke a) $\frac{x^n x^n}{x^n + x^n}$ b) $\frac{2^{x+1} 4^{2x-4}}{8^{x-1}}$

Ratkaise yhtälö c) $x^4 = 10$ d) $x^2 e^x = 3x^2$

Muut tehtävät¹

7. Todista, että $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (de Morgan) on tautologia.

8. Todista $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (de Morgan)

- a) piirtämällä Vennin kaavioiden avulla ja
b) logiikan avulla.

Ohje: Käytä hyväksesi päättelyä $x \in D^c \Leftrightarrow x \notin D \Leftrightarrow \neg(x \in D)$ ja de Morganin lakia logiikassa (tehtävä 7).

9. Olkoot n ja m kokonaislukuja. Osoita:

- a) Jos n ja m ovat parittomia, niin nm on pariton.
b) Jos $3n$ on pariton, niin n on pariton.

Ohje: suora ja epäsuora todistus.

10. Olkoon $r \neq 1$. Osoita, että

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

kaikilla $n = 0, 1, 2, \dots$

¹2 h ryhmissä nämä tehtävät lasketaan kotona, 3 h ryhmissä harjoitustilaisuudessa. Myös 3 h ryhmissä käyvien olisi hyvä ainakin yrittää laskea näitä jo kotona, sillä tehtävien laskeminen parissa tunnissa harjoitustilaisuudessa käytännössä edellyttää tehtävien aihealueeseen tutustumista ennen harjoituksia.