

**MAOL ry:n pisteytysuusitus
PITKÄ MATEMATIIKKA KEVÄT 2002**

1.

yhtälöt

a) $y = 2$	1
b) $x = 1$	+1
c) $y = -x + 3$	+1
d) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	+1
kuviot samassa tai eri koordinaatistoissa	+2

a)- ja b)-kohdissa riittävät pelkät vastaukset, jos kuviot ovat oikein

2.

a) $x = 0 +$ jonkinlainen perustelu	1 +1
b) $x^3 + 4x^2 + x = 0$	+1
$x = 0$	+1
$x = -2 \pm \sqrt{3}$	+2

juuret vain likiarvoina tai sieventämättä -1

3.

2000: kotimainen $100a$, ulkomainen $100b$ tms. + järkevä jatko	1
2001: $106(a + b) = 95a + 110b$ tai vastaava	+2
$11a = 4b$ tms.	+1
prosentti $= 100 \frac{b}{a+b} = \frac{220}{3}$	+1
vastaus: 70 % tai 73 % tai 73,3 %	+1

käytetty numeerisia arvoja -2

4.

$\pi r^2 \cdot 51 = 1000$	1
$r = \sqrt{\frac{200}{3\pi}} (\approx 4,61)$	+1
verrannollisuuskerroin $1/\sqrt[3]{2}$ tai käytetty yhdenmuotoisuutta	+2
pohjan halkaisija $= \sqrt[3]{4} \sqrt{\frac{200}{3\pi}} (\approx 7,31)$	+1
vastaus: 7,3 cm tai 7,31 cm	+1

vastauksena pohjan säde -1
 laatumuunnosvirhe -2

5.

JOKO: jakojäännös $(b+1)x + (a+c)$, josta $b+1=0$, $a+c=0$

TAI: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$,

jolloin $P(1) = a+b+c+1=0$ ja $P(-1) = a-b+c-1=0$ 2

$P(2) = 12 \Rightarrow 4a + 2b + c = 4$ +1

yhtälöryhmän ratkaisu $a=2, b=-1, c=-2$ +2

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ +1

yhtälöryhmä ratkaistu vain laskimella -3

6.

JOKO: idea, esim. $|\bar{x} \pm \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 \pm 2|\bar{x}||\bar{y}|\cos\alpha$ 2

$\Rightarrow 1 \pm 2\cos\alpha = 0$ +2

a) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha = 120^\circ$ +1

b) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$ +1

TAI: a) kuvio, jossa vektorit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}$ 1

siitä päätelty: kulma = 120° +2

b) kuvio, jossa vektorit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x} - \bar{y}$ +1

siitä päätelty: kulma = 60° +2

7.

$xy = 30 \Rightarrow y = 30/x$, $x + y = x + 30/x \leq 12$ eli $x^2 - 12x + 30 \leq 0$ 1

ratkaisu $6 - \sqrt{6} \leq x \leq 6 + \sqrt{6}$ (m) +2

$3,55 \leq x \leq 8,45$ tai muu tarkistus, että ehto $x > 0$ täyttyy +1

$6 - \sqrt{6} \leq y \leq 6 + \sqrt{6}$ (m), perustelu laskemalla, symmetrialla tms. +2

laskettu yhtälönä, vastauksessa vain arvot $6 - \sqrt{6}, 6 + \sqrt{6}$ (m) max 1

ei käsitelty epäyhtälöitä missään vaiheessa, vastaus silti

epäyhtälönä perustelematta max 2

vastauksesta puuttuu yksikkö m -0

x oikein, y vain muodossa $y = \frac{30}{x}$ tai $y = 12 - x$ -1

8.

integraalifunktio $-\frac{1}{x} + \frac{1}{n} \sin nx$ 1+1

sijoitus $1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sin n^2 - \frac{1}{n} \sin n$ +2

raja-arvo = 1 perusteluineen (esim. sinin arvot rajoitettuja) 1+1

sijoitettu rajat väärin päin -2

9.

ehto muodossa $2a + 3b > 10$ 1

kuvio, jossa alueen $2a + 3b > 10$ ja

neliön $[0,3] \times [0,3]$ leikkauskolmio merkitty +2

leikkauskolmion ala = $25/12$ +1

$tn = \frac{25/12}{9} = \frac{25}{108} \approx 0,23$ +2

laskettu komplementtitapaus max 4

10.

esim. pyramidin pohjaneliön sivu $2x$ ja korkeus $R + y$

yhteys x :n ja y :n välille, esim. $x = \frac{R(R + y)}{\sqrt{y^2 - R^2}}$ 1

pyramidin tilavuus $V(y) = \frac{4}{3} x^2 (R + y) = \frac{4R^2}{y} \cdot \frac{(R + y)^2}{y - R}$ (esim.) +1

$V'(y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2Ry - 3R^2 = 0$ +1

tästä minimikohta $y = 3R$, minimin perusteluksi riittää

esim. geometrinen päättely +1

pienin tilavuus $\frac{32}{3} R^3$ +1

tilavuuksien suhde = $\pi : 8$ +1

11.

JOKO: haettu kaksi tason suuntaista vektoria, esim. suuntavektori

$\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ ja yhdysvektori $(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) - (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) = \bar{j} + 2\bar{k}$ 3

näiden ristitulona tai pistetulojen avulla normaali esim. $\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ +3

TAI: haettu tason yhtälö $x - 2y + z = 0$ 3

poimittu tämän kertoimista normaalivektori $\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ +3

12.

- esimerkki injektioista, $f(x) = x$ tms. 1
- esimerkki kuvauksesta, joka ei ole injektio, $f(x) = \text{vakio}$ tms. +1
- (kummassakin tapauksessa perusteluksi riittää esim. kuvaajaan vetoaminen)
- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ on injektio perusteluineen
- (pohjana esim. $f'(x) = 3(x-2)^2$ tai $f(x) = (x-2)^3 + 9$) +2
- esimerkki kuvauksesta, joka on injektio, mutta ei surjektio,
- $f(x) = e^x$ tms.; perusteluksi riittää esim. kuvaajaan vetoaminen +2

13.

- geometrisen sarja, jossa $q = -\frac{9}{5} \sin x \cos x$ 1
- $|q| = \frac{9}{10} |\sin 2x| < 1$, suppenee ja funktio määritelty $\forall x \in \mathbb{R}$ +1
- $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{9}{10} \sin 2x} = \frac{10}{10 + 9 \sin 2x}$ +1
- suurin $f = \frac{10}{10-9} = 10$, pienin $f = \frac{10}{10+9} = \frac{10}{19}$ +1
- suurin, kun $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$
- pienin, kun $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ +2
-
- jaksot puuttuvat -1
- puuttuu maininta $n \in \mathbb{Z}$ -0

14.

- derivoimalla integraaliyhtälö saadaan $f(x) = f'(x)$ 2
- ratkaistu differentiaaliyhtälö, saatu $f(x) = Ce^x$ +2
- tämä ei toteuta integraaliyhtälöä, jos $C \neq -2$ +2

15.

- järkevä tapa polynomien laskemiseen 1
- $T_0(x) = 1, T_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ +1
- $T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2, T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3$ +1
- $R_{n+1}(x) = \frac{e^{\xi/2} x^{n+1}}{(n+1)! 2^{n+1}}$ +1
- tästä ehto $2^{n+1}(n+1)! > \sqrt{e} \cdot 10^{16}$ +1
- kokeilemalla ratkaisu $n \geq 14$ (kelpaa $n = 14$ tai $n = 15$) +1

Lyhyt koe, kevät 02

22.3.2002

Pisteet osoittavat kunkin osatehtävän osuuden kokonaispistemäärästä.

Hakasuluissa oleva teksti on tarkoitettu helpottamaan arvostelua.

Huomautuksia**1.**a) muoto $9x = 1$ 1

$$x = \frac{1}{9}$$
 2

b) sijoitus ratkaisukaavaan 1

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{4}$$
 2

vastaukset likiarvoina -1p/vastaus

2.

idea, esim. kuvio + järkevä käyttö 1

$$r^2 = \frac{12}{\pi} \text{ tai vast.}$$
 1

käytetty säteestä [$r = 1,95441\dots$]

liian karkeata likiarvoa -1p — -2p

$$\text{ulkoneliön ala} = (2r)^2 = 4r^2 \quad \left[= \frac{48}{\pi} \right]$$
 1

$$\left[= 15,27887\dots \right] \approx 15,28 \text{ cm}^2$$
 1

voi syntyä poikkeava ratkaisu

(vrt. taulukko s.29)

$$\text{sisäneliön ala} = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2 \quad \left[= \frac{24}{\pi} \right]$$
 1

$$\left[= 7,63943\dots \right] \approx 7,64 \text{ cm}^2$$
 1

3.a) miljardi = 10^9 1

40 000 mk kukin 2

b) jakajat: /60/60/24/365 1

aika vuosissa 31,70979... 1

[$a = 31,536 \cdot 10^6 \text{ s}$]

v. 2014 tai 2015 (molemmat oltava) 1

[huhtikuun puolen välin jälkeen
syntyneet vuonna 2015]**4.**

aritmeettisen summan laskemisen periaate

+ järkevä käyttö

888. termi = 1776

999. termi = 1998 1

888 termin summa 789 432 1

999 termin summa 999 000 1

prosentin laskeminen [0,2654...]

vastaus: 27 % suurempi

(vähint. kahdella numerolla) 2

virheitä summien arvoissa,

prosenttilaskussa oikea logiikka $\Rightarrow 3p$

5.

kaavio tai vastaava, josta merkinnät käyvät ilmi:

	Ennen	Jälkeen
Muroja paketissa (kg)	m	$1,10m$
Paketin hinta (€)	h	$1,12h$
Myynti (pkt)	p	$0,90p$

2

murojen myynnin määrällinen kehitys:

Ennen	Jälkeen
mp	$1,10m \cdot 0,90 p = 0,99 mp$

1

vähennystä 1 %

1

murojen myynnin hintakehitys:

Ennen	Jälkeen
hp	$1,12h \cdot 0,90 p = 1,008 hp$

1

lisäystä 0,8 % tai 1 %

1

6.

kuvio tai muu perustelu + järkevä aloitus 1

$$\tan \alpha = \frac{120 + 32}{4500} [= 0,03377\dots] \quad 2$$

$$\alpha = 1,93458\dots^\circ \quad 2$$

$$\approx 1,9^\circ \text{ (oikea tarkkuus)} \quad 1$$

Hyväksytään tulkinta, jossa 4,5 km on vino etäisyys maston juureen, jolloin vaakasuora etäisyys = 4,49988... km ja $\alpha = 1,9346\dots^\circ$

7.

$$x = 10: \quad 1,97 \quad 1$$

$$x = 100: \quad 1,9997 \quad 1$$

$$x = 1000: \quad 1,999997 \quad 1$$

$$x = 10\,000: \quad 1,99999997 \quad 1$$

selvitys oikeasta laskutavasta 3

$$\left[\text{Sievennetty muoto} = 2 - \frac{3}{x^2} \right]$$

Huomautuksia

käytetty absoluuttisia lukuarvoja -2p

lausekkeessa yhteen sopimattomat yksiköt tms. \Rightarrow 2p

tulos radiaaneissa (0,03376 rad)

vastaus 0,0 -2p

kaksi ensimmäistä tulosta saadaan suoraan sijoittamalla ja laskimella laskien

laskimen tarkkuus riittämätön viimeistään neljännessä laskussa (tulos = 2)

selitys ”desimaalit lisääntyvät kahdella yhdeksiköllä” \Rightarrow 4p

8.

1 kg:ssa liuosta suolaa 0,25 kg;
lisätään vettä x kg, liuos 10-prosenttista:

$$0,10(1+x) = 0,25$$

$$\Rightarrow x = 1,5 \text{ kg}$$

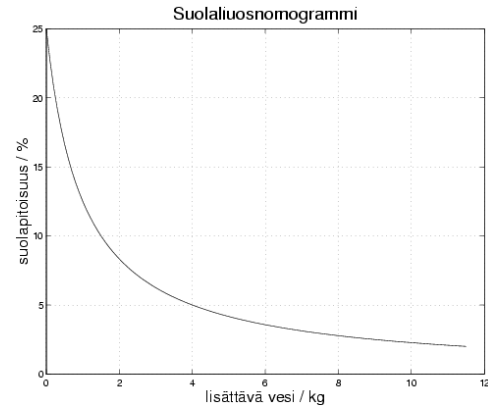
pitoisuus p (%) lausekkeena

$$p = \frac{100 \cdot 0,25}{1+x} = \frac{25}{1+x} \text{ tai taulukkona}$$

graafinen esitys

oikea väli $[0; 11,5]$

1
1
1
2
1



akselit väärinpäin -1p
y-akselin asteikko $25 \rightarrow 0$ $\Rightarrow 6p$

9. perustelut (esim. kuviot ja selitykset)

$$P(\text{jälkimmäinen} > \text{edellinen}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

tai $[= 0, 4166\dots]$ 0,42 tai 42 %

kun ensimmäisellä saatu 3, on

$$P(\text{tois.} > \text{ensimm. ja kolm.} > \text{tois.}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

tai $[= 0,0833\dots]$ 0,083 tai 8,3 %

2
2
1
2

II noppa

X	X	X	X	X	
X	X	X	X		
X	X	X			
X	X				
X					

1

III noppa

		X	X		
		X			

1

I noppa

II noppa

mukana tn $P(\text{ensimmäisellä } 3) = 1/6$ -2p

10.

poijun ulkosäde R , sisäsäde r
syrytetyyn vesimäärän massa

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ dm}^3 \cdot 1 \text{ kg/dm}^3$$

$$\text{yhtälö: } \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 47$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{141}{2\pi}} = 2,8206\dots \text{ (dm)}$$

$$\text{rautapojun tilavuus} = \frac{47 \text{ kg}}{7,7 \text{ kg/dm}^3}$$

$$\text{yhtälö: } \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{47}{7,7}$$

$$\Rightarrow r = \left[\sqrt[3]{\frac{141}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{15,4}\right)} \right]$$

$$= \sqrt[3]{\frac{5076}{77\pi}} = 2,75820\dots \text{ (dm)}$$

$$R - r = 0,062423\dots \text{ dm}$$

paksuus 6,2 mm (järkevä tarkkuus)

1
1
1
1
1
1

laskettu tietoisesti approksimoimalla:

$$\text{tilavuus} = 4\pi R^2 \cdot \text{levyn paksuus}$$

(vastaus 6,1 mm tai 6,11 mm) $\Rightarrow 6p$

11.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + q$$

$$\text{ehto } D = 4 - 12q > 0$$

perustelu ehdolle

$$\Rightarrow q < \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12q}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 3q}}{3}$$

$$\text{väli } \left[\frac{1 - \sqrt{1 - 3q}}{3}, \frac{1 + \sqrt{1 - 3q}}{3} \right]$$

12.

a) $1,26^6 \cdot 470$ [=1792,9077...]

1790 tai 1800 konetta

b) merkitty geometrinen summa

$$1,25 \cdot 470 \frac{1 - 1,25^{24}}{1 - 1,25} \text{ tms.}$$

summan laskeminen [495281,86...]

495 000 tai 500 000 konetta

13.

kuviot sekä kateettien a , b ja hypotenuusan c merkitseminen kuvioihintermien a^2 , b^2 , c^2 identifiointi

pinta-aloina

perustelut + johtopäätös

14.

korkotekijä $q = 1,025$ $a = \text{Anjan}$, $b = \text{Arton sijoitus}$:

$$\text{ehdot } a + b = 9500, \quad q^5 a = q^9 b$$

yhtälöparin ratkaiseminen

$$[a = 4984,3893\dots, b = 4515,6106\dots]$$

Anja 4 984,39 € tai 4 984,40 €

Arto 4 515,61 € tai 4 515,60 €

Huomautuksia

kelpaa sieventämättömänä

annettu q :n vakioarvolla ”ainakin jokin väli”(esim. kun $q = -1 \Rightarrow$ väli $[-1, \frac{1}{3}]$) -2p

laskettu termeittäin, taulukoitu ja

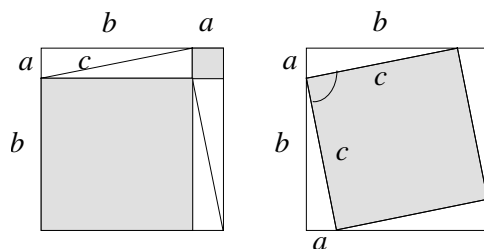
laskettu lopuksi summa

-4p-6p

Termi	Koneita
1.	587,5...
...	...
6.	1792,9...
...	...
24.	99526,3...

1.termi virheellisesti 470

-2p

pelkkä yhtälö $a^2 + b^2 = c^2$ ei sinänsä tuo pisteitä

Huomautuksia

15.

1. koe: keskiarvo = 15,72314...

hajonta = 3,47032...

2. koe: keskiarvo = 7,32231...

hajonta = 4,79534...

kaksi em. luvuista oikein

1

lopun kaksi em. lukua oikein

1

korrelaatio = 0,36342...

1

kaikissa em. luvuissa järkevä tarkkuus

(1 tai 2 desimaalia, korrelaatioissa ≤ 4)

1

kaavat:

Kaavat taulukkokirjoista

$$\text{keskiarvo} = \frac{S}{n},$$

$$\text{hajonta} = (\sqrt{x^2 - \bar{x}^2}) = \sqrt{\frac{T}{n} - \left(\frac{S}{n}\right)^2}$$

1

$$\text{korrelaatio} = \frac{nU_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(nT_x - S_x^2)(nT_y - S_y^2)}} \quad 1$$