MAOL ry:n pistesuositus
Pitkä matematiikka, kevät **2001**

1.

Sievennetty yhtälöksi $x^2 - x - 3 = 0$, $x \neq 0,-3$		3
Ratkaisukaavassa sijoitus näkyvissä	+2	
Saatu juuret $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$	+1	
Nimittäjien nollakohtien tarkastelu puutuu	-0	
Toisen asteen yhtälö väärin	max 2	
Juuret laskimella, vain likiarvot	max 4	
Juurien tarkat arvot, vaikka supistamatta	-0	

2.

Tangentin kulmakerroin $k_t = y'(2) = 12$	1
Tangentin yhtälö $y = 12x - 16$	+1
Leikkauskohta *y*-akselin kanssa $y = -16$	+2
Ala = $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (16 + 8) = 24$ (pay.)	+2

3.

$\lvert\overline{a}\rvert = \frac{5}{2}$	1
Saatu $\overline{b} = -3\overline{i} + 4\overline{j}$	+2
Järkevä aloitus loppupisteen laskemiseksi	+1
Loppupiste (1,7)	+2
Loppupiste katsottu kuviosta	max 4

4.

k = vetojen lukumäärä

Ehto $0,95^k \cdot 2,3 < 0,2$	2
$k > \frac{\lg 2 - \lg 23}{\lg 0,95}$	+2
Likiarvo 47,6	+1
Vastaus: 48 vedon jälkeen	+1

tai:

Ehtoepäyhtälö	2
k laskettu kokeilemalla	+1
Perustelut vastaukselle	+3

tai:

Laskettu yksitellen kaikki vedot 1,2,….,48 6

Kirjoitettu pelkkiä yhtälöitä max 4

5.

Sektorin säde $r = \sqrt{265}$ cm 1

Likiarvo 16,3 cm +1

$\alpha = \frac{6\pi}{\sqrt{265}}$ rad +2

$= \left(\frac{1080}{\sqrt{265}} \right)^{\circ} \approx 66^{\circ}$ +2

Otettu kartion pohjan säteeksi 6 cm max 2

6.

Toteamus: $f(x)$ suurin tai pienin, kun $\cos 2x$ pienin tai suurin 2

Suurin arvo = 5, kun $\cos 2x = -1$ +1

Pienin arvo = $\frac{5}{7}$, kun $\cos 2x = 1$ +1

Maksimikohdat $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, minimikohdat $x = n\pi$ +2

tai:

$f'(x) = \frac{30 \sin 2x}{(4 + 3\cos 2x)^2}$ 1

$f'(x) = 0$, kun $x = n\frac{\pi}{2}$ +1

Perustelu sille, että riittää tarkastella derivaatan 0-kohdat +1

Loppu kuten edellä +3

Jaksot puuttuvat -2

Jätetty ilmoittamatta $n \in \mathbf{Z}$ -0

n:n arvot väärin (esim. 0,1,2,..) -1

7.

X = massa

$P(X < 200) = \Phi(-\frac{2}{3})$ 2

$= 1 - \Phi(\frac{2}{3}) \approx 25\%$ +1

$P(200 \le X \le 210) = \Phi(1) - \Phi(-\frac{2}{3})$ +2

$= \Phi(1) + \Phi(\frac{2}{3}) - 1 \approx 59\%$ +1

Φ -funktion sijasta merkitty $P\left(\frac{X - 204}{6} < -\frac{2}{3} \right)$ tms. -0

Käytetty rajoina 199,5 g, ja 210,5 -0

8.

Erikoistapaus kartioleikkauksia koskevasta Fregier`n lauseesta

Kärkipisteet (k, k^2) ja $(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})$ 2

Hypotenuusan yhtälö $y = \frac{k^2 - 1}{k} x + 1$ +2

Leikkaa $y-$akselin pisteessä (0,1) +1

Piste on riippumaton k:sta +1

Saatu piste (0,1) erikoistapauksen avulla 1

9.

$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$, kun $0 \le x \le 1$ 2

$f(x) = x - \frac{1}{2}$, kun $1 \le x \le 2$ +1

Suurin arvo $= \frac{3}{2}$, pienin arvo $= \frac{1}{4}$ +1

Perustelut edellisille +1

Kuvaaja +1

Perusteluiksi riittää vetoaminen siihen, että kuvaaja muodostuu paraabelin kaaresta ja janasta.

10.

Pariton ja kasvava: esim. $f(x) = x$ 1

Pariton ja ei kasvava: esim. $f(x) = -x$ +1

Perustelut molempiin +1

Todistus:

$f(-0) = -f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ +1

f jatkuva $\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ +1

Näistä seuraa väitös +1

11.

Pallon säde $= r$

Sisällä olevan kuution särmä $= \frac{2r}{\sqrt{3}}$ 1

Tämän sisällä olevan pallon säde $= \frac{r}{\sqrt{3}}$ +1

Pallojen säteiden suhde $\frac{1}{\sqrt{3}}$ +1

Päätelty geometrisiksi jonoiksi +2

Suhdeluvut $1/\sqrt{3}, 1/3, 1/(3\sqrt{3})$ +1

Käytetty numeerista pallon sädettä max 2

12.

$11_7 = 8_{10}, 111_7 = 57_{10}, 1111_7 = 400_{10}, 11_{10} = 14_7, 111_{10} = 216_7, 1111_{10} = 3145_7$

Kukin kohta ja perusteluja 1

Pelkät vastaukset 0

13.

Rekursio $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ 2

$x_2 = 2^{\frac{1}{2}}, x_3 = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}, x_4 = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$ jne. +1

$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = 1$ +1

Raja-arvo $\lim_{n \to \infty} x_n = 2^1 = 2$ +2

Rekursiokaavasta puuttuu $n = 1,2,...$ -0

Raja-arvo laskettu yhtälöstä $x = \sqrt{2x}$ eikä perusteltu olemassaoloa max 4

Rekursiokaava ja numeeriset kokeilut max 3

14.

Määritelmä $\bar{z} = x - iy$ 1

Osoitus, että $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ +2

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases}$$ +1

Yhtälön ratkaisu:

$z = x + iy = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$ +2

Annettu vain x:n ja y:n arvot tai lukupari -0

15.

Differentiaaliyhtälö separoituna $P^{-\frac{1}{2}} dP = -4dt$ 1

Yleinen ratkaisu $P(t) = (C - 2t)^2$ +1

$P(0) = 1100 \Rightarrow C = 10\sqrt{11}$ +1

$P(t) = 0 \Rightarrow t = 5\sqrt{11} \approx 16{,}6$ +2

Vastaus: 17 viikon kuluttua +1

Integroinnissa kerroinvirhe max 3