

MAOL ry:n pisteytysuusitus
PITKÄ MATEMATIIKKA SYKSY 2002

1.	
a) järkevä määrittystapa (laskut tai kuvio)	1
oikeat tulokset (0,0), (1,2), (6,-3)	1
b) järkevä laskutapa	1
oikeat tulokset $\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 5\sqrt{2}$	1
kuvio	2

vastauksessa $\sqrt{45}$ ja/tai $\sqrt{50}$	-1
2.	
ennen-nyt-taulukko tms. + perustelut	1
$\frac{s/0,63t}{s/t}$ tai verranto tai vast.	+2
= 1/0,63 = 1,5873...	+1
59 %	+2

keksitty omia lukuarvoja	-2
jos lisäksi perustelut puuttuvat	-3
vastauksena 58,7 %	-0
3.	
$f(0) = A + 2B = 1$	1
$f'(x) = Ae^x - 2Be^{-x}$	+1
$f'(0) = A - 2B = 2$	+1
$A = \frac{3}{2}, B = -\frac{1}{4}$	+3

jos $f'(x)$ väärin	max 1
4.	
a) $\frac{a + \frac{b^2}{a}}{b + \frac{a^2}{b}} = \frac{\frac{a^2+b^2}{a}}{\frac{b^2+a^2}{b}}$	1
$= \frac{b}{a}$	+2
b) $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{t} + t)^2 - \frac{1}{4}(\frac{1}{t} - t)^2$	+1
$= \frac{1}{4}(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2 - \frac{1}{t^2} + 2 - t^2) = 1$	+2

lähdetty väitöksestä ilman ekvivalensseja	-2

5.

JOKO:

$$\text{etäisyys } d = \left| \vec{r} \cdot \vec{n}^0 \right|$$

$$\text{yhdysvektori } \vec{r} = (2\vec{i} + 2\vec{j}) - (\vec{i} + 3\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j} \quad 2$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\vec{i} + 3\vec{j}) \quad +2$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{13}} \quad +2$$

TAI:

$$\text{Etäisyys } d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Suoran yhtälö } 2x + 3y - 11 = 0 \quad 3$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{13}} \quad +3$$

suoran yhtälössä laskuvirhe, muuten oikein max 3
vastaus vain likiarvona -1

6.

$$\text{sinilause: } \frac{\sin \alpha}{5} = \frac{\sin 2\alpha}{8} \quad 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{5} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad +1$$

$$\alpha = 36,869\dots^\circ \approx 36,9^\circ \quad +1$$

$$\text{kosinilause } x^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos(180^\circ - 3\alpha) \quad +1$$

$$= 89 + 80(4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha) = \frac{1521}{25} \quad +1$$

$$x = \frac{39}{5} = 7\frac{4}{5} \quad +1$$

jos käytetty kosinilauseita muodossa $5^2 = x^2 + 8^2 - \dots$ ja saatu
kaksi x :n arvoa, joista $x = 5$ hylkäämättä -1

7.

sisään jäävä osa on tasasivuinen kolmio, sivuna $a/2$;
perustelu geometrisesti tai muutoin 3

$$\text{ala} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{16} \quad +3$$

8.

AC: $y = \frac{2}{3}x$ 1

vastaus: $y = \frac{2}{3}x \pm \frac{13}{3}$ eli $2x - 3y \pm 13 = 0$ + rehellinen selitys +2

järkevät perustelut (pikemmin geometriaa kuin ääriarvoja) +3

toinen suorista riittää ratkaisuksi

9.

$P(\text{Leena ensin}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \dots$ 1

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ (ts. tunnistettu geometriseksi sarjaksi) +1

$P(\text{Sari ensin}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \dots$ +1

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ (ts. tunnistettu geometriseksi sarjaksi) +1

summeeraus: $P(\text{Leena ensin}) = 2/3$, $P(\text{Sari ensin}) = 1/3$ +2

kyseessä ei komplementtitapahtumat; jos laskettu näin, -0

10.

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$ 1

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a} = \frac{1}{-1 - \sqrt{1-a}} \rightarrow -\frac{1}{2}$ +2

$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a} \rightarrow \pm\infty$ (siis ei raja-arvoa) +2

$a = 0: 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} = \lim x_1$ +1

11.

$T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ 2

$x = -1: T_n(-1) = (-1)^n$,

$x = 0: 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$,

$x = 1: T_n(1) = 1$ +2

perustelut (ei tarvitse olla muodollisia induktiopäätelyitä, mutta pelkkä alkupään laskeminen ei riitä) +2

12.

kohdassa x olevan suorakulmion ala $= 2(R^2 - x^2)$ 1

$$V = 2 \int_0^R 2(R^2 - x^2) dx \quad +1$$

$$= \frac{8}{3} R^3 = \frac{1}{3} d^3 \quad +2$$

$$R = 19,7/2, V = 2548,4... \approx 2550 \text{ (m}^3\text{)} \quad +2$$

R väärin -1

13.

ei voida esittää murtolukuna tai
päättymätön jaksoton desimaaliluku 2

määrittelynä: ”Luku, joka ei ole rationaaliluku” ei kelpaa

vasta oletus: $\log_2 n = \frac{p}{q}$, n pariton, $n \neq 1$ +1

$$\Rightarrow n = 2^{p/q} \Rightarrow n^q = 2^p \quad +1$$

$\Rightarrow n$ parillinen, ristiriita +2

14.

a) $(1-i)(2+3i) = 5+i$ 2

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$ +2

c) $\frac{z_1}{z_2} = 2+3i$ (ei pisteitä, jos b-kohta väärin) +2

15.

$n = 4$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{12} (1 + 4e^{-1/32} + 2e^{-4/32} + 4e^{-9/32} + e^{-1/2}) \quad 2$$

$$= 0,84135548... \quad +1$$

$n = 8$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{24} (1 + 4e^{-1/128} + 2e^{-4/128} + 4e^{-9/128} + 2e^{-16/128} + 4e^{-25/128} + 2e^{-36/128} + 4e^{-49/128} + e^{-1/2}) \quad +1$$

$$= 0,84134540... \quad +1$$

siis: neljä oikeata desimaalia +1

jos vastauksissa desimaaleja 4 tai 5 -1

jos desimaaleja alle 4 -2