MAOL:n pistesuositus

Matematiikka **pitkä oppimäärä, syksy 2004.**

1.

a) $4x < 6$ tms.	1
$x < \frac{3}{2}$	1
b) $-1 \le x+1 \le 1$ tai $x^2 + 2x \le 0$ tms.	1
$-2 \le x \le 0$	1
Jos $x+1 \le 1$, niin b-kohta	0
c) $x < 1$	1
$x \ne 0$	1
Jaettu puolittain x^2, saatu perusteluitta $x < 1$, c-kohta	0
Pelkkä graafinen ratkaisu ei kelpaa.	

2.

Pythagoras: $(a-1)^2 + a^2 = (a+1)^2$	1
$a^2 - 4a = 0$	1
$a = 4$	1
hypotenuusa = ympyrän halkaisija $a+1=5$	1
perustelut, esim. suoran kulman merkintä kuvaan riittää	1
säde $= 2\frac{1}{2}$	1
ympyrän säde MAOLista	- 0

3.

kuution särmä $= a$, pienennetyn kuution särmä $= x$	
alat: $\frac{64}{100} \cdot 6a^2 = 6x^2$	1
$x = \frac{4}{5}a$	2
tilavuudet: $x^3 / a^3 = 64/125 = 0{,}512$	1
tilavuus pienenee 48,8 % tai 49 %	2
käytetty tiettyä särmän pituutta	- 2
kuution alana käytetty pelkkää tahkon alaa	0

4.

$\overrightarrow{AB} = 6\bar{i} - \bar{j}$ tms.	1
$\overrightarrow{OP} = s(3\bar{i} + \bar{j}) = \bar{i} + 2\bar{j} + t(6\bar{i} - \bar{j})$	1
komponenteista $3s = 1 + 6t,\ s = 2 - t$	1
$t = \frac{5}{9},\ (s = \frac{13}{9})$	1
suhde = 5 : 4	2
vastauksena 4 : 5	- 1
Analyyttisen geometrian käyttö on OK.	

5.

1° P(toimii) = $0{,}99 \cdot 0{,}993 \cdot 0{,}95 = 0.933916$	1
P(ei toimi) = 0,06600835 $\approx 0{,}066$	2
2° P(toimii) = $0.99 \cdot 0{,}993 \cdot (1-0{,}05^2) = 0{,}980612325$	2
P(ei toimi) = 0,019387675 $\approx 0{,}019$	1

---

ei käytetty komplementtia, jokin vaihtoehto puuttuu	- 2
vastaukset annettava kahdella tai kolmella desimaalilla	

6.

määrittelyalue $x^3 - x > 0$	
$-1 < x < 0$ tai $x > 1$	1
$f'(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^3-x}$	1
$= 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1
vain $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ kelpaa	1
perusteltuna: kyseessä maksimi	1
$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ $(\approx -0{,}95)$	1

Myös $+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ esitetty ääriarvokohdaksi	max 3
maksimiarvo vain likiarvona	- 1
derivointivirhe tuhoaa jatkon	

7.

leikkauspisteet laskettu ja segmentti piirretty	1
havainto, että kyseessä on puolipallo, josta on poistettu kartiomainen osa	2
pallon säde = kartion korkeus = kartion pohjan säde = 2	1
tilavuus $\frac{2}{3}\pi \cdot 2^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \dfrac{8\pi}{3}$	2
TAI:	
leikkauspisteet laskettu ja segmentti piirretty	1
tilavuus integraalina $\pi\int_{-3}^{-1}(-x^2-6x-5)dx - \pi\int_{-3}^{-1}(-x-1)^2\,dx$	2
$= \pi\int_{-3}^{-1}(-2x^2-8x-6)dx$	1
$= \pi \mathop{/}_{-3}^{-1}(-\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - 6x)$	1
$= \dfrac{8\pi}{3}$	1

8.

$$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$ 1

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2}$$ 1

$$=\sin x$$ 1

$$\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$ 1

$$=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\cos^2\tfrac{x}{2}-\sin^2\tfrac{x}{2}$$ 1

$$=\cos x$$ 1

Siis piste jokaista kaavankäyttöä kohden, jolloin on myös ilmettävä, mitä kaavaa on käytetty.
lähdetty väitteestä, päädytty esim. muotoon 1 = 1 perusteluitta max 4
ei mitään viitteitä kaavoihin - 2

9.

f:n kuvaaja, sahanterä, maksimi parillisissa pisteissä 1
g:n kuvaaja, sahanterä, maksimi parittomissa pisteissä 1
$h=1\ \forall x$, *h*:n kuvaaja 2
f, g ei derivoituvia kokonaislukupisteissä, perusteluna esim. maininta kärkipisteistä 1
h derivoituva kaikkialla 1

---

tulos $h=1$ perusteltava ainakin yhdellä jaksovälillä

10.

erotusosamäärä $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}\right)$ 2

$$=-\frac{1}{2(2+h)}$$ 2

$\to -\frac{1}{4}$, kun $h\to 0$ ja vastaus 2

11.

laskettu alueiden rajat 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^4}dx+\int_{-1}^{1}x^4dx+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^4}dx$$ 1

$$=\lim_{a\to-\infty}\Big/_{a}^{-1}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)+\Big/_{-1}^{1}\tfrac{1}{5}x^5+\lim_{b\to\infty}\Big/_{1}^{b}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)=\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{1}{3}$$ 3

2

$$=\tfrac{16}{15}$$ 1

12.

$a_n = \dfrac{n}{2n+1}$	1
perustelu esim. tarkastelemalla ainakin kolme termiä	2
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$	1
sarja ei voi olla suppeneva, sillä olisi oltava $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	2

Pelkkä alkupään osasummien laskeminen ei tuo ansioita suppenemistarkasteluun.

13.

Eri tavoin (tangentit, joiden kulmakerroin on 4; derivoimalla etäisyyden lauseketta $\dfrac{4x-(x^4-7x^2)-21}{\sqrt{4^2+1^2}}$) voidaan päätyä yhtälöön $4x^3-14x-4=0$, järkevät perustelut	2
tämän ratkaisut $x_1 = 2,\ x_{2,3} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	1
näistä ensimmäinen antaa lähimmän pisteen (2,-12); graafiset perustelut riittävät	1
lyhin etäisyys $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ ($\approx 0{,}24$)	1
kuvio	1

pelkkä kuvio 0

tangenttimenetelmän käyttö edellyttää toteamista, että käyrät eivät leikkaa (graafinen perustelu riittävä)

14.

separointi $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x^2+4x}$	1
osamurtokehitelmä $\dfrac{1}{x^2+4x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+4}$	1
kertoimet $A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4}$	1
integrointi $\ln\lvert y\rvert = \frac{1}{4}\ln\lvert x\rvert - \frac{1}{4}\ln\lvert x+4\rvert + \ln\lvert C\rvert$	2
$y = C\sqrt[4]{\left\lvert \dfrac{x}{x+4} \right\rvert},\ C \in \mathbf{R}$	1

15.

Fermat'n pieni lause: p alkuluku $\wedge$ ei päde $p \mid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$	2
Jos $2003 \mid n$, niin $2003 \mid (n^{2003}-n)$, ja väite on OK.	1
Jos ei $2003 \mid n$ ja 2003 on alkuluku, niin Fermat'n mukaan $n^{2002} \equiv 1 \pmod{2003}$ ja $n^{2003} \equiv n \pmod{2003}$;	2
osoitus, että 2003 on alkuluku, ja vaite siis OK.	1