

MAOL ry:n pisteytysuusitus

Matematiikka pitkä oppimäärä

Syksy 2007-09-19

1. a)	$-7x > -2$	1
	$x < \frac{2}{7}$	+1
b)	alku, esim. $k = -\frac{3}{2}$	+1
	jatko: $y + 3 = -\frac{3}{2}(x - 4)$, josta $3x + 2y - 6 = 0$ tai $y = -\frac{3}{2}x + 3$ tai vast.	+1
c)	neliöinti: $t^2 \cdot 4\pi^2 \cdot LC = 1$	+1
	$L = \frac{1}{4\pi^2 t^2 C}$	+1
2. a)	$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, josta $f'(x) = \cos 2x$ tai $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	1
	$f'(0) = \cos 0 = 1$ tai $f'(0) = \cos 0 - \sin 0 = 1$	+1
b)	integrointi: $-\frac{1}{2}x^{-2}$	+1
	sijoitus: $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - 1\right) = \frac{4}{9}$	+1
c)	$F(x) = \int (e^x + 1)dx = e^x + x + C$	+1
	ehto: $F(0) = -2 \Leftrightarrow 1 + C = -2 \Leftrightarrow C = -3$, joten $F(x) = e^x + x - 3$	+1
3. a)	$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$	1
	$= 3,7i - 9,4j$	+1
b)	$ \overline{AB} \approx 7,62$, $ \overline{AC} \approx 6,26$, $ \overline{BC} \approx 10,1$	+2

	Yksi pituus väärin, -1 p; enemmän väärin, -2 p. Lukuarvot riittävät, erillistä johtopäätöstä ei tarvita. Vain kuvio, ei pisteitä.	

c)	$\cos(BAC) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{ \overline{AB} \overline{AC} } = \frac{-2,35}{\sqrt{58,13} \sqrt{39,22}} \approx -0,049$	+1
	$\angle(BAC) \approx 98,2^\circ$	+1

	Pituudet väärin, c-kohdasta ei pisteitä	
4.	alkuperäinen hinta = h , korotettu hinta = $\left(1 + \frac{p}{100}\right)h$	1

	tätä alennetaan x %, jolloin hinta $\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)h$	+1
	ehto: hinta ennallaan, josta $\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)h = h$	+1
	tästä $1 - \frac{x}{100} = \frac{100}{100 + p}$ ja lopulta $x = \frac{100p}{100 + p}$	+3

	Ei h :ta	-1
	Vastauksena kerroin $\frac{p}{100 + p}$ (ei siis prosenttiluku)	-2
5.	ympyrä keskipistemuodossa $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$	1
	suora (1,3):n kautta $y - 3 = k(x - 1) \Leftrightarrow kx - y + (3 - k) = 0$	+1
	suoran etäisyys kp:stä = 2	+1
	$\frac{ k \cdot (-2) - 1 + 3 - k }{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$, joka sievennettynä $5k^2 - 12k = 0$	+1
	$k = 0 \vee k = \frac{12}{5}$	+1
	tangentit $y = 3$ ja $12x - 5y + 3 = 0$	+1

	tehty yksi virhe, esim. säde = 4, kp = (2,1), tms.	max 4
6.	majakan etäisyys tiestä y , lähimmän pisteen etäisyys tien loppupisteestä x	
	ehdot $y/x = \tan 54^\circ = a$, $y/(5 - x) = \tan 65^\circ = b$ tai vast.	2
	toisen tuntemattoman eliminointi, esim. $\frac{5 - x}{x} = \frac{a}{b}$	+1
	$x = 3,045\dots$, $y = 4,1916$	+2
	majakan etäisyys 4192 m tai 4190 m tai 4200 m tai 4 km, lähimmän pisteen etäisyys loppupisteestä 3045 m tai 3050 m tai 3000 m tai 3 km	+1

	laskettu vain toinen etäisyyksistä	max 4
	laskettu liian epätarkoilla likiarvoilla	-1
7.	pohjasärmä x , sivusärmä $a = 60$	
	korkeus $h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}x^2}$	1
	tilavuus $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}x^2}$	+1
	$= \frac{1}{12} \sqrt{3a^2 x^4 - x^6}$	+1

	$D(3a^2x^4 - x^6) = 12a^2x^3 - 6x^5$	+1
	nollakohta $x = a\sqrt{2} = 60\sqrt{2}$ (cm)	+1
	jokin perustelu suurimmalle arvolle, esim. kuvaaja	+1

	Likiarvo olisi 84,85 cm, mutta sen ilmoittamista ei edellytetä	
8.	$p_1 = 0,3, p_2 = 0,4, p_3 = 0,2$	
	osatodennäköisyydet $p_1p_2p_3, p_1p_2(1-p_3), p_1(1-p_2)p_3, (1-p_1)p_2p_3$ tai taulukko	2
	$p = p_1p_2p_3 + p_1p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2p_3$	+2
	= 0,212	+2
9.	määritelty, kun $x > 0, x \neq 1$	1
	$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$	+1
	vähenevä, kun $0 < x < 1$ tai $1 < x < e$ (tai $\leq e$); kasvava, kun $x > e$ (tai $\geq e$)	+1
	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = e, f(e) = e$	+1
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, käyttäytyminen kohdan $x = 1$ ympäristössä (jokin perustelu, esim. kuva)	+1
	ei saa arvoja väliltä $[0, e[$	+1

	Määrittelyjoukko väärin	max 3
10.	kysytty ala sopivan integraalin avulla	2
	integraalin laskeminen	+3
	tulos $\frac{\pi}{2} - 1$	+1
11.a)	ehto seuraavan ympyrän säteelle x , esim. $r\sqrt{2} = r + x + x\sqrt{2}$	1
	$x = (\sqrt{2} - 1)^2 r$ (ei tarvitse olla sievennetty)	+1
b)	peräkkäisten ympyröiden alat $\pi, \pi q, \pi q^2, \dots$, missä $q = (\sqrt{2} - 1)^4$	+2
	näiden summa $\frac{\pi}{1 - (\sqrt{2} - 1)^4}$ tai $\frac{1}{8}\pi(3\sqrt{2} + 4)$	+1
	= 3,2368... \approx 3,237	+1
12.	$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$	1
	f aidosti vähenevä välillä $[2, 5]$, siis $\exists g = f^{-1}$	+2

	$x = g(45) \Leftrightarrow f(x) = 45$; tällöin $x = 3$ ja siis $g(45) = 3$	+2
	$g'(45) = \frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{12}$	+1

	g :n määrittelyjoukon tarkistaminen ($f(2) = 52, f(5) = 25$) puuttuu	-0
13.	$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$, tekijät peräkkäisiä	1
	ainakin yksi tekijöistä parillinen	+1
	yksi kolmella jaollinen	+2
	siis kuudella jaollinen	+2
	TAI induktiolla:	
	$n = 1 : n^3 - n = 0$, joka on kuudella jaollinen	1
	$n \rightarrow n+1 : (n+1)^3 - (n+1) = n^3 - n + 3n(n+1)$	+2
	n tai $n+1$ on parillinen, joten $3n(n+1)$ on kuudella jaollinen	+1
	induktio-oletuksen mukaan $n^3 - n$ on kuudella jaollinen	+1
	siis $(n+1)^3 - (n+1)$ on kuudella jaollinen	+1
14.	$f'(x) = 1 + \sin x$	1
	$f'(x) \geq 0, = 0$ vain erillisissä pisteissä; siis f aidosti kasvava	+1
	f saa kaikki reaaliarvot, koska esim. $x-1 \leq f(x) \leq x+1$ tai raja-arvojen ja jatkuvuuden avulla	+2
	siis: f saa jokaisen reaaliarvon kerran, jolloin yhtälöllä $f(x) = 0$ on täsmälleen yksi ratkaisu	+1
	ratkaisun paikallistaminen esim. välille $]0, \pi/2[$ tai sopivan alkuarvon valitseminen	+1
	Newton tai joku muu järkevä menettely; $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$	+1
	tulos $0,73908... \approx 0,739$	+2
15.	$A = (0, r)$, ympyrät $x^2 + y^2 = r^2, (x-1)^2 + y^2 = 1$	1
	$B = \left(\frac{r^2}{2}, r\sqrt{1 - \frac{r^2}{2}} \right)$	+2
	suora AB : $y - r = \frac{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{4}} - 1 \right)}{r} x$	+2
	leikkauskohta x -akselilla: $x_p = 2 + \sqrt{4 - r^2}$ (ei tarvitse olla sievennetty)	+2
	$\lim_{r \rightarrow 0} x_p = 4$	+2