MAOL ry:n pisteytyssuositus
PITKÄ MATEMATIIKKA SYKSY 2002

1.

a) järkevä määritystapa (laskut tai kuvio)	1
oikeat tulokset (0,0), (1,2), (6,-3)	1
b) järkevä laskutapa	1
oikeat tulokset $\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 5\sqrt{2}$	1
kuvio	2
----------	
vastauksessa $\sqrt{45}$ ja/tai $\sqrt{50}$	-1

2.

ennen-nyt-taulukko tms. + perustelut	1
$\dfrac{s/0,63t}{s/t}$ tai verranto tai vast.	+2
$=1/0,63=1,5873...$	+1
59 %	+2
----------	
keksitty omia lukuarvoja	-2
jos lisäksi perustelut puuttuvat	-3
vastauksena 58,7 %	-0

3.

$f(0)=A+2B=1$	1
$f'(x)=Ae^{x}-2Be^{-x}$	+1
$f'(0)=A-2B=2$	+1
$A=\frac{3}{2},\ B=-\frac{1}{4}$	+3
----------	
jos $f'(x)$ väärin	max 1

4.

a) $\dfrac{a+\frac{b^2}{a}}{b+\frac{a^2}{b}}=\dfrac{\frac{a^2+b^2}{a}}{\frac{b^2+a^2}{b}}$	1
$=\dfrac{b}{a}$	+2
b) $x^2-y^2=\frac{1}{4}(\frac{1}{t}+t)^2-\frac{1}{4}(\frac{1}{t}-t)^2$	+1
$=\frac{1}{4}(\frac{1}{t^2}+2+t^2-\frac{1}{t^2}+2-t^2)=1$	+2
----------	
lähdetty väitöksestä ilman ekvivalensseja	-2

5.
JOKO:

etäisyys $d = \left|\overline{r} \cdot \overline{n}^0\right|$

yhdysvektori $\overline{r} = (2\overline{i} + 2\overline{j}) - (\overline{i} + 3\overline{j}) = \overline{i} - \overline{j}$ 2

$\overline{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\overline{i} + 3\overline{j})$ +2

$d = \frac{1}{\sqrt{13}}$ +2

TAI:

Etäisyys $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Suoran yhtälö $2x + 3y - 11 = 0$ 3

$d = \frac{1}{\sqrt{13}}$ +3

----

suoran yhtälössä laskuvirhe, muuten oikein max 3
vastaus vain likiarvona -1

6.

sinilause: $\dfrac{\sin\alpha}{5} = \dfrac{\sin 2\alpha}{8}$ 1

$\dfrac{\sin\alpha}{5} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{8} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$ +1

$\alpha = 36{,}869...^\circ \approx 36{,}9^\circ$ +1

kosinilause $x^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5\cos(180^\circ - 3\alpha)$ +1

$= 89 + 80(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) = \frac{1521}{25}$ +1

$x = \frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}$ +1

----

jos käytetty kosinilausetta muodossa $5^2 = x^2 + 8^2 - ...$ ja saatu
kaksi x:n arvoa, joista $x = 5$ hylkäämättä -1

7.
sisään jäävä osa on tasasivuinen kolmio, sivuna *a*/2;
perustelu geometrisesti tai muutoin 3

ala = $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$ +3

8.

AC: $y = \frac{2}{3}x$ 1

vastaus: $y = \frac{2}{3}x \pm \frac{13}{3}$ eli $2x - 3y \pm 13 = 0$ + rehellinen selitys +2

järkevät perustelut (pikemmin geometriaa kuin ääriarvoja) +3

----

toinen suorista riittää ratkaisuksi

9.

P(Leena ensin) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \ldots$ 1

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^k$ (ts. tunnistettu geometriseksi sarjaksi) +1

P(Sari ensin) = $\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \ldots$ +1

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4}(\frac{1}{4})^k$ (ts. tunnistettu geometriseksi sarjaksi) +1

summeeraus: P(Leena ensin) = 2/3, P(Sari ensin) = 1/3 +2

----

kyseessä ei komplementtitapahtumat; jos laskettu näin, -0

10.

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$ 1

$x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1-a}}{a} = \dfrac{1}{-1-\sqrt{1-a}} \to -\frac{1}{2}$ +2

$x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{1-a}}{a} \to \pm\infty$ (siis ei raja-arvoa) +2

$a = 0 : 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} = \lim x_1$ +1

11.

$T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x,\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ 2

$x = -1 : T_n(-1) = (-1)^n,$

$x = 0 : 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots,$

$x = 1 : T_n(1) = 1$ +2

perustelut (ei tarvitse olla muodollisia induktiopäättelyitä,
mutta pelkkä alkupään laskeminen ei riitä) +2

12.

kohdassa x olevan suorakulmion ala $= 2(R^2 - x^2)$ 1

$V = 2\int_0^R 2(R^2 - x^2)dx$ +1

$= \frac{8}{3}R^3 = \frac{1}{3}d^3$ +2

$R = 19,7/2, V = 2548,4... \approx 2550$ (m³) +2

R väärin -1

13.

ei voida esittää murtolukuna tai
päättymätön jaksoton desimaaliluku 2
määrittelynä: ”Luku, joka ei ole rationaaliluku” ei kelpaa

vastaoletus: $\log_2 n = \frac{p}{q}$, n pariton, $n \neq 1$ +1

$\Rightarrow n = 2^{p/q} \Rightarrow n^p = 2^q$ +1

$\Rightarrow n$ parillinen, ristiriita +2

14.

a) $(1-i)(2+3i) = 5+i$ 2

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$ +2

c) $\frac{z_1}{z_2} = 2+3i$ (ei pisteitä, jos b-kohta väärin) +2

15.

n = 4:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{12}(1 + 4e^{-1/32} + 2e^{-4/32} + 4e^{-9/32} + e^{-1/2})$ 2

= 0,84135548… +1

n = 8:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{24}(1 + 4e^{-1/128} + 2e^{-4/128} + 4e^{-9/128} + 2e^{-16/128} +$

$+4e^{-25/128} + 2e^{-36/128} + 4e^{-49/128} + e^{-1/2})$ +1

= 0, 84134540… +1

siis: neljä oikeata desimaalia +1

----

jos vastauksissa desimaaleja 4 tai 5 -1

jos desimaaleja alle 4 -2