

MAOL ry:n pisteytysuositus

Pitkä matematiikka 24.9.2003

1.

- a) kertoimien sijoittaminen ratkaisukaavaan 1
 juuret $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{29})$ 1
- b) derivointi $f'(x) = 2x - 3$ 1
 yhtälönmuodostus ja ratkaisu $2x - 3 = 1, x = 2$ 1
- c) kuvio koordinaattiakseliineen, yksikkö näkyvissä 2

2.

- selkeä mallikuvio, lävistäjien puolikkaat a ja $2a$ 1
 ehto $a^2 + (2a)^2 = 5^2$ 1
 suorankulman perustelu esim. neljäkkään lävistäjien ominaisuutena 1
 $a = \sqrt{5}$ tai $a^2 = 5$ 1
 ala = $4a^2 = 20 \text{ cm}^2$ 2

3.

- a) $f'(x) = 2e^{2x-2} + 3x^2$ 2
- b) $f'(1) = 5$ 1
 tangentin yhtälö $y = 5x - 4$ 1
- c) janan päätepisteet $(0, -4), (\frac{4}{5}, 0)$ 1
 janan pituus $\frac{4}{5}\sqrt{26} (\approx 4,1)$ 1

 Pituus vain likiarvona - 1
 c-kohdasta saa pisteet vaikka b-kohdassa olisi virhe, joka ei oleellisesti muuta tehtävän jatkoa

4.

- etsittävä piste $P = (x, y)$
- periaate: vektorit muodostetaan koordinaattierotuksista 1
 summavektori = $(2 - 5x)\bar{i} + (1 - 5y)\bar{j}$ 2
 ehdot $2 - 5x = 0, 1 - 5y = 0$ 1
 $P = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ 2

 Kaikki yhdysvektorit vastavektoreina max. 4

5.

- päärynämehua $100a$, omenamehua $100b$
- ehto sokerimääristä $14a + 7b = 11(a + b)$ tai vast. 2
 $3a = 4b$ 2
 vastaus $100a : 100b = 4 : 3$ 2

 Jokin numeerinen mehumäärä, muuten oikein max. 3
 Suhteen suunta ilmettävä vastauksesta

6.

$$\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad 1$$

$$\sin y = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad 2$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad (\text{taulukosta}) \quad 1$$

$$= \frac{2\sqrt{30}-1}{12} \quad 1$$

$$\approx 0,83 \quad 1$$

laskettu vain likiarvoilla max 3

7.

a) kuvio 1

$$\text{ala} = \frac{a^2}{\sqrt{3}} \text{ tai } \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \text{ perusteltuna} \quad 1$$

b) kuvio 1

$$\text{ala} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ perusteltuna} \quad 1$$

c) sama kuin a-kohta 2

8.

kuvaaja 2

$$P(x \leq 1) = \frac{1}{10} \quad 1$$

$$P(1 < x \leq 3) = \frac{19}{30} \quad 2$$

$$P(x > 3) = \frac{4}{15} \quad 1$$

kuvaaja piirretty vain välillä $[0, 5]$ - 1

9.

kuvio merkintöineen 2

perustelut 2

$$\text{yhtälön } \sin \alpha = \frac{a}{2R} \text{ tai vast. muodostaminen ja tuloksen saaminen tästä} \quad 2$$

riittää tarkastella vain terävää kulmaa α

10.

kuvaaja, jossa äärettömyyteen meno ja kärjet oikein 2

$\ln(2-x), x \leq 1$ vähenee 2

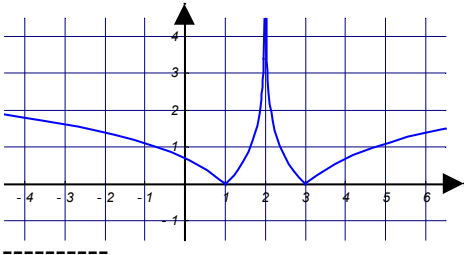
$-\ln(2-x), 1 \leq x < 2$ kasvaa

$-\ln(x-2), 2 < x \leq 3$ vähenee

$\ln(x-2), x \geq 3$ kasvaa

perustelut kasvavuudelle ja vähenevyydelle 1

pienin arvo = 0, kun $x = 1$ tai $x = 3$ 1



ei lausekkeita, vain kuvaaja ja päättely siitä max. 4
 osavälien päätepisteiden mukaan ottamisesta tai pois jättämisestä ei sakoteta

11.

$$f(x) = \prod_{k=1}^n (x - a_k)^2$$

$$f'(x) = 2 \prod_{k=1}^n (x - a_k) \quad 1$$

$$f'(x) = 0 \quad x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \quad 2$$

perustelu pienimmälle arvolle 1

$$\text{pienin } f = \prod_{k=1}^n a_k^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2 \quad 2$$

12.

$$a = 200, p = 1,5, q = 1,015$$

$$(1 + 2 + \dots + 12) \cdot \frac{p}{12 \cdot 100} = \frac{13p}{200}$$

$$\text{vuoden kertymä } k_v = a \left(12 + \frac{13p}{200} \right) \text{€} = 2419,50 \text{€} \quad 2$$

$$n \text{ vuoden kertymä } k_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} k_v = 161300(1,015^n - 1) \text{€} \quad 2$$

a) $k_{18} \approx 49574,04 \text{€}$ tai 49574€ 1

b) kokeilemalla tai muutoin $k_{40} \approx 131301,17 \text{€}$, $k_{41} \approx 135690,19 \text{€}$, siis 41 vuotta 1

 vastauksena voi olla 49600 €, kunhan laskussa on eo. tarkkuus

13.

$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx \quad 1$$

osittaisintegroinnin ensimmäinen vaihe, esim. $\pi x (\ln x)^2 - 2\pi \ln x dx$ 2

toinen vaihe, esim. $\pi x (\ln x)^2 - 2\pi x \ln x + 2\pi dx$ 1

rajojen sijoittaminen 1

tulos $\pi(e - 2)$ 1

14.

$$G'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x) \quad 2$$

$$= \frac{1}{x} (f(x) - G(x)) \quad 1$$

f kasvava $G(x) = \int_0^x f(t) dt$ arvioimalla integraali, kuviosta tai muulla tavoin 2
seuraus: $G'(x) \geq 0$ ja siis G kasvava 1

15.

a) toteuttaa diff.yhtälön 2
toteuttaa alkuehdon 1

b) Euler: $y_{i+1} = y_i + h(y_i - 2 \sin x_i)$ 1

x_i	$y(x_i)$	y_i	$y_i - y(x_i)$	
0	1	1	0	
0,5	1,357	1,5	0,143	
1,0	1,382	1,771	0,389	
1,5	1,068	1,814	0,746	
2,0	0,493	1,724	1,231	2

tarkkuus vähintään 2 desimaalia