MAOL ry:n pisteytyssuositus

Matematiikka pitkä oppimäärä

Kevät 2008

1. a)	$2x^2 - x - 1 = 0$, sijoitus ratkaisukaavaan	1
	$x = \frac{1 \pm 3}{4}$, $x = -\frac{1}{2} \lor x = 1$	+1
b)	nimittäjien poisto, esim. $2x - 4(x-2) = 5$	+1
	$x = 1\frac{1}{2}$	+1
c)	$x^2 + y^2 = \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}{(1+t^2)^2}$	+1
	$= \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$	+1

2. a)	eliminoitu toinen tuntematon	1
	saatu $x = 11$ ja $y = -14$	+1
b)	$5^{5x-5} = 5^3$, josta $5x - 5 = 3$	+1
	juuri muodossa $\frac{8}{5}$ tai $1\frac{3}{5}$ tai 1,6	+1
c)	neliöön korotus tai $3x - 2 = \pm 5$	+1
	$x = -1 \lor x = 2\frac{1}{3}$	+1
	***	
	c- kohdassa saatu vain toinen juuri jollakin järkevällä tavalla	1

3. a)	derivaatat $Dx^{-4} = -4x^{-5}$, $Dx^{-1} = -x^{-2}$, $Dx^2 = 2x$ integraalifunktiot $-\frac{1}{3}x^{-3} + C$, $\ln\lvert x\rvert + C$, $\frac{1}{3}x^3 + C$	3
	***	
	½ p/kohta alaspäin pyöristäen	
	integroimisvakion puuttumisesta ei sakoteta	
b)	osamäärän derivoimiskaavaa käytetty oikein	+1
	$f'(x) = \frac{2\sin x + 2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$; saa olla sieventämättä	+1
	sijoitus ja tulos $\frac{3}{4}$	+1

4.	<table><tr><td></td><td>veroton hinta</td><td>alv</td><td>kokonaishinta</td></tr><tr><td>ennen</td><td>100*a*</td><td>22*a*</td><td>122*a*</td></tr><tr><td>nyt</td><td>100*a*</td><td>8*a*</td><td>108*a*</td></tr></table> tai vastaavat tiedot	3
	vertailu: $\frac{108a}{122a} \approx 0{,}8852$ tai erotuksen kautta	+2
	$= 1 - 0{,}1148$, eli hinta olisi laskenut n. 11,5 % tai 11 %	+1
	**	
	a puuttuu	- 2
	numeerinen hinta	max 4
	väärä vertailu	max 4

5.	järjestyksiä $5! = 120$	1
	oikean järjestyksen tn = $\frac{1}{120}$, joten väärän tn = $\frac{119}{120}$	+1
	P(ainakin kerran oikein) = 1 – P(7 kertaa väärin)	+2
	$1 - (\frac{119}{120})^7$	+1
	$\approx 0{,}057$ tai 5,7 % tai 6 % (voi olla enemmänkin desimaaleja)	+1

6.	yhdensuuntaisuus: $\overline{a} = s\overline{b}$ eli $5\overline{i} - 2\overline{j} = 3s\overline{i} + st\,\overline{j}$ tai muu ehto	1
	yhtälöpari $5 = 3s,\ -2 = st$	+1
	eliminoitu *s*, saatu $t = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}$	+1
	kohtisuoruus: $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$	+1
	$15 - 2t = 0$	+1
	$t = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$	+1

7. a)	yhtälöpari, josta esim. $x^2 - x - 2 = 0$	1
	juuret $x = -1,\ x = 2$	+1
	y-koordinaatit ja tulos $(-1,-2)$ ja $(2,1)$	+1
b)	koska $-x^2 + 2x + 1 \geq x^2 - 3$, kun $-1 \leq x \leq 2$, (tai muu perustelu)	+1
	niin ala = $\int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx$	+1
	= 9 pay.	+1

8.	laskettu jotakin järkevää: $h_{AB} = \frac{12}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, BC = 3 tai $\sqrt{73}$ tms.	2
	havaittu, että ratkaisuja on kaksi	+1
	$\gamma = 90^\circ$	+1
	$\alpha \approx 143{,}1^\circ$	+2

9.	$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$	1
	$f'(x) = 0$, josta $\sqrt{9-x^2} = x$ eli $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$	+2
	laskettu $f(-3) = -3$, $f(3) = 3$ ja $f(3/\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$ (tai $\frac{6}{\sqrt{2}}$)	+1
	valittu suurin $3\sqrt{2}$ ja pienin -3	+1
	kuvaaja	+1
	***	
	väitetään, että $f'(-3/\sqrt{2}) = 0$	max 5

10.	$f(x) = \begin{cases} e^x + ax - a, & x \le 1 \\ e^x - ax + a, & x \ge 1 \end{cases}$	1
	$f'(x) = \begin{cases} e^x + a, & x < 1 \\ e^x - a, & x > 1 \end{cases}$	+1
	$x > 1: e^x - a > 0 \Rightarrow a \le e$, $x < 1: e^x + a > 0 \Rightarrow a \ge 0$	+3
	siis $0 \le a \le e$	+1
	***	
	toinen ehdoista $a \le e$, $a \ge 0$ väärin	- 1
	vastauksena avoin väli	- 1

11. a)	tekijöihin jako tai Eukleideen algoritmi tai ilmoitettu laskimen käyttö	1
	syt = 14	+2
	***	
	pelkkä vastaus	0
	***	
b)	Eukleideen algoritmilla tai muuten perustellen $56 = 20 \cdot 126 - 16 \cdot 154$, jolloin eräs ratkaisu on $x_0 = -16, y_0 = 20$	+1
	täydellinen ratkaisu $x = -16 + 9n,\ y = 20 - 11n,\ n \in \mathbf{Z}$ (tai $x = 2 + 9m,\ y = -2 - 11m$)	+2

12.	$f(-1)=\frac{1}{2},\ f(1)=-1$	1
	perusteltu: välillä $]-1,1[$ on nollakohta	+1
	esim. Newton: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^{\,2}-2^{x_n}}{2x_n-2^{x_n}\ln 2}$	+2
	esim. $x_0=-1,\ x_1\approx -0{,}7869,\ x_2\approx -0{,}7668,\ x_3\approx -0{,}7667\approx x_4$	+2

13. a)	vastaesimerkki; esim. $f(x)=\sin x,\ g(x)=1; \sin x\le 1$, mutta ei päde $\cos x\le 0$	2
	siis väite on väärä	+1
b)	todistus: $\int_0^x g(t)dt-\int_0^x f(t)dt=\int_0^x [g(t)-f(t)]dt\ge 0$	+2
	koska $g(t)-f(t)\ge 0$ (tai vastaava sanallinen perustelu), siis väite on oikea	+1

14. a)	muoto $\tan x=1$ tai vast.	1
	$x=\frac{\pi}{4}\vee x=\frac{5\pi}{4}$	+1
b)	$f'(x)=-\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \cos x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ tai vast.	+1
	max kun $x=\frac{7\pi}{4}$, min kun $x=\frac{3\pi}{4}$	+1
c)	$\int_0^{2\pi}(\cos x-\sin x)dx=\Big/_0^{2\pi}(\sin x+\cos x)$	+1
	= 0	+1
d)	$\int_0^{2\pi}\lvert\cos x-\sin x\rvert dx=\left(\int_0^{\pi/4}-\int_{\pi/4}^{5\pi/4}+\int_{5\pi/4}^{2\pi}\right)(\cos x-\sin x)dx$	+2
	$=4\sqrt{2}$ (tai $\frac{8}{\sqrt{2}}$)	+1

15. a)	1. tapaus: täyttösuhde $s_1 = \dfrac{n^2\pi r^2}{(n \cdot 2r)^2} = \dfrac{\pi}{4}$	1
	2. tapaus: täyttösuhde $s_2 = \dfrac{n^2\pi r^2}{(2n+1)r \cdot \left[(n-1)r\sqrt{3} + 2r\right]} =$ $\dfrac{n^2\pi}{2\sqrt{3}n^2 + (4-\sqrt{3})n + (2-\sqrt{3})}$	+2
	numeeriset arvot, kun $n = 10$: $s_1 \approx 0{,}79$ ja $s_2 \approx 0{,}85$	+1
b)	$\lim\limits_{n\to\infty} s_1 = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}79$	+2
	$\lim\limits_{n\to\infty} s_2 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}91$	+3