Matemaattisten Aineiden
Opettajien Liitto MAOL ry

MAOL ry:n pisteytyssuositus
PITKÄ MATEMATIIKKA syksy 2001

1.

toisen tuntemattoman eliminointi: järkevä alku 1
ryhmän redusointi uuteen yhtälöön +2
tästä $x = \dfrac{9}{23}$ tai $y = \dfrac{2}{23}$ +1
toisenkin tuntemattoman ratkaiseminen +2
-----
laskuvirhe ryhmän redusoinnissa max 2
Jos siirrytty likiarvoihin, pisteitä vain tarkoilla arvoilla lasketusta osasta
tulos suoraan laskimella 0

2.

ratkaisukaavalla $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b(a-b)}}{2(a-b)}$ 1

$x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{2(a-b)}$ +1

$x = \dfrac{-a \pm |a-2b|}{2(a-b)}$ tai $x = \dfrac{-a \pm (a-2b)}{2(a-b)}$ +2

$x_1 = -1$ +1

$x_2 = \dfrac{b}{b-a}$ +1

-----
keksitty juuri –1 ja tarkistettu sijoittamalla 2

3.

s = 187 km, $T_1 = 1\frac{52}{60}$ h, $T_2 = 2\frac{4}{60}$ h

$v_1 = \dfrac{s}{T_1} \approx 100{,}2$ km/h (100 km/h) 1

$v_2 = \dfrac{s}{T_2} \approx 90{,}5$ km/h (90 km/h) +1

kohtaamisaika kahdella tavalla, etäisyys Helsingistä = x, tms.:

$8\frac{58}{60} + \dfrac{x}{v_2} = 8\frac{6}{60} + \dfrac{187 - x}{v_1}$ +1

$x = \dfrac{s}{T_1 + T_2} \approx 47{,}5$ km (48 km) +2

$t = 8\frac{58}{60} + \frac{x}{v_2} = 8\frac{58}{60} + \frac{T_2}{T_1 + T_2} \approx 9,4921$, siis klo 9.30 (klo 9.29) +1

-----

käytetty alusta asti (riittävän tarkkoja) likiarvoja -0

4.

Eliminoitu y, saatu 2. asteen yhtälö x:lle, ei tarvitse olla sievennetty 1

$9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$, siis yksi yhteinen piste +1

derivaatat: $y_1' = \dfrac{3-x}{2}$, $y_2' = 4x$ +1

$y_1'(\frac{1}{3}) = y_2'(\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$, siis yhteinen tangentti +1

tangentin yhtälö $y - \frac{11}{9} = \frac{4}{3}(x - \frac{1}{3})$ +1

$12x - 9y + 7 = 0$ tai $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{9}$ +1

-----

laskettu vain yksi derivaatta -2

5.

pouta $\xrightarrow[0,8]{}$ pouta $\xrightarrow[0,2]{}$ sade

pouta $\xrightarrow[0,2]{}$ sade $\xrightarrow[0,6]{}$ sade

tai muu perustelu 3

$P = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,28$ +3

----

vain toinen haara tutkittu max 2

6.

vyöhykkeen korkeus $h_1 = R\sin 23,5^o$, 1

kalotin korkeus $h_2 = R(1 - \sin 66,5^o)$ +1

trooppinen alue $\dfrac{2 \cdot 2\pi R h_1}{4\pi R^2} = \sin 23,5^o \approx 40$ % (39,9 %) +2

napa-alueet $\dfrac{2 \cdot 2\pi R h_2}{4\pi R^2} = 1 - \sin 66,5^o \approx 8$ % (8,3 %) +2

-----

tulkittu: laskettava vain yhden kalotin osuus maapallon pinta-alasta -0

käytetty säteenä väärää numeerista arvoa 0

7.

tason suuntavektori $\bar{a}$ 1

tason suuntavektori $\bar{b}$ +1

suoran suuntavektori $\bar{s} = 2\bar{i} - 11\bar{j} - 3\bar{k}$ +1

$\bar{s} \cdot \bar{a} = 0,\ \bar{s} \cdot \bar{b} = 0$ tai $\bar{a} \times \bar{b} \parallel \bar{s}$ +2

johtopäätös +1

-----

osoitettu kohtisuoruus vain yhtä tason vektoria vastaan max 3

8.

$y_1 - y_2 = \ln(1+e^x) - x$ 1

$= \ln \dfrac{1+e^x}{e^x}$ +1

$= \ln(1+e^{-x})$ +1

$\to 0$ +2

perustelu raja-arvolle (logaritmifunktion jatkuvuus) +1

9.

ehto $|q| = \left|\dfrac{2x-1}{3x+1}\right| < 1$ 1

tästä $x < -2$ tai $x > 0,\ x \neq \frac{1}{2}$ +2

summa $S(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$ +1

kuvaaja +1

määrittelyalue kuvaajassa oikein +1

-----

havaitsematta $x \neq \frac{1}{2}$ -0

murtoepäyhtälössä kerrottu ristiin tms. väärä käsittely tuhoaa jatkon

q ilman itseisarvoja max 2

10.

idea keskipisteen laskemiseksi 1

keskipiste (70,42) +3

säde $r = 70$ +1

mittakaavamuunnos $70 \cdot 25\,\text{m}$ = 1750 m +1

11.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$, $m(a) = \displaystyle\int_a^{a+2} f(x)dx = [\ F(a+2) - F(a)\ ]$ 1

lauseke derivaatalle $m'(a)[= f(a+2) - f(a)]$ +2

$m'(a) = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$ +2

ääriarvon perustelut +1

12.

periaatteellinen kuva, jossa pyörähtävä alue, tai perustelu integraalille 1

$V = \pi\int_0^9 \left(3 - \sqrt[3]{y-1}\right)^2 dy$ +1

integraalifunktio $\frac{3}{5}\sqrt[3]{(y-1)^5} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{(y-1)^4} + 9y$ +2

$V = \dfrac{333\pi}{10}(\approx 105)$ +2

-----

vain likiarvo -1

13.

Piste / kohta annetaan, jos vastaus on oikein ja perustelut osoittavat ymmärrystä.

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ 1

b) $x = \dfrac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tai $x = 0$ +1

c) $g(x) \in [-1,1]$ +1

d) $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$ +1

e) on jatkuva +1

f) ei ole +1

Perustelujen epätarkkuuksista ei sakoteta.

b-kohdassa nollakohdista saa unohtaa origon

14.

selostus: yleinen iteraatiokaava tai rekursion idea 2

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} + \sin x_n}{e^{x_n} + \cos x_n}$ +1

sopiva alkuarvo suurimmalle juurelle perusteluineen, esim. kuvaaja +1

iteraatio, josta näkyy viidennen desimaalin stabiloituminen +1

vastaus -0,58853 +1

15.

differentiaaliyhtälö $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{k}{E}$ 1

separoimalla $E(t) = \sqrt{2kt + C}$ +2

on jatkuva kasvu (perusteluksi riittää, että jostakin ilmenee $k > 0$) +1

kasvu on hidastuvaa (kuvaajakin riittää perusteluksi) +1

ei lähesty vakiotasoa (maininta $\lim_{t\to\infty} E(t) = \infty$) +1

C puuttuu -1

Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL ry

Lyhyt koe, syksy 2001
21.9.2001

1. Kaavaa sievennetty f:n ratkaisemiseksi, kun c = 38,2 ; järkevä aloitus. 1
Saatu f = 100,76, josta vastaus 100,8°F (101°F) . +2
Muodostettu yhtälö

$f = \frac{5}{9}(f - 32)$ tai vastaava. +2

Saatu f = -40, josta vastaus -40°C (= -40°F). +1

Kaavan yleistä ratkaisua $f = \frac{9}{5}c + 32$ ei vaadita.

Haarukoimalla (taulukko näkyvissä) -1

2. Laskettu tilavuus
$V = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 40\,\mathrm{dm}^3 = 250\pi\ \mathrm{dm}^3$ 2
Merkitty massa $m = 0,9 \cdot 250\pi$ kg +2
Saatu m = 706,85… kg, josta vastaus 700 kg (710 kg). +2

Yksikkömuunnosvirhe -2
Laskettu välivaiheittain ja kaikki yksiköt puuttuvat välivaiheista -2
Säteen tilalla halkaisija -2

3. Lähtökohta:
Kun tuotteen veroton hinta a, on arvonlisävero 0,22a ja 1
myyntihinta 1,22a. +1
Laskettu suhde

$\frac{0,22a}{1,22a} = 0,18032\ldots$,(joten riippumaton a:sta) +2

josta vastaus 18 % (18,0 %; 18,03 %). +1
Tulos riippumaton myyntihinnasta. +1

Lähtökohtana jokin vakiohinta -1

Jos käytetty vakiohintaa (tai vakiohintoja), eikä tuloksen riippumattomuutta perusteltu pitävästi -1

4. Ratkaistu yhtälö yleisessä muodossa

$x = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 + 48a^2}}{8}$ 2

$= \frac{4a \pm 8a}{8}$ +1

$x_1 = -\frac{a}{2},\ x_2 = \frac{3a}{2}$ +1

Sijoitettu ja saatu
$x_1 = -0,0005,\ x_2 = 0,0015$. +2

Suoritettu ensin sijoitus ja saatu
$4x^2 - 0,004x - 0,000003 = 0$ +1

$x = \frac{0,004 \pm \sqrt{1,6 \cdot 10^{-5} + 4,8 \cdot 10^{-5}}}{8}$ +1

$= \frac{0,004 \pm 0,008}{8}$, +2

josta ratkaisut. +2

Virhe esim. sijoituksessa, ratkaisukaavaa sovellettu oikein. 2
Tulos graafisella laskimella ilman välivaiheita 2

5. Merkitty (painotettuna keskiarvona) $\overline{x} =$
$0,013 \cdot 4 + 0,098 \cdot 5 + \cdots + 0,061 \cdot 10$ 3
Saatu $\overline{x} = 7,491$,
josta vastaus 7,5 (7,49). +3

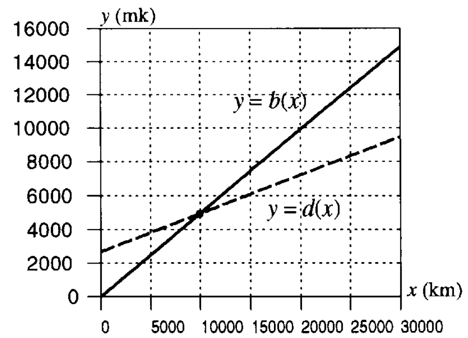
Merkitty annettuja arvosanojen määrä esim. n =1000, jolloin eri arvosanojen frekvenssit ovat 13, 98 jne. ja laskettu
$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum fx$ 6

6. Vuotuiset kustannukset y (mk), kun ajetaan x km vuodessa:
bensiinikäyttöisellä
$y = b(x) = 0,079 \cdot 6,29 \cdot x$ = 0,4969x 1
dieselmoottorilla
$y = d(x) = 0,054 \cdot 4,19 \cdot x + 2700$
$= 0,22626x + 2700$ +1
Kuvaajat +2
Merkitty $b(x) = d(x)$
ja saatu x = 9975,9…, josta
vastaus vähintään 10 000 km (9 980 km). +2

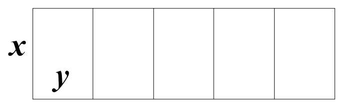
Kustannukset laskettu epähuomiossa 100 km kohti, jolloin vastauksena saatu, että on ajettava vähintään 100 km. -3

Kertoimet funktioiden lausekkeissa pyöristettyinä likiarvoina -2

Tulos luettu vain kuviosta -1



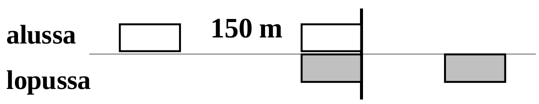
7. Kuvion merkinnöillä koko aitauksen
leveys = x, pituus $5y = \frac{200-6x}{2}$ 1
ja pinta-ala
$A(x) = x(100-3x) = 100x - 3x^2$ +1
$A'(x) = 100 - 6x$
Derivaatan nollakohta $x = \frac{50}{3} = 16,66...$,
jolloin y = 10. +1
Koko aitauksen ala
$A(\frac{50}{3}) = \frac{2500}{3} = 833,3\ldots$ +1
Perustelut suurimmalle arvolle +1
Vastaus: Mitat ovat 10,0 m × 16,7 m,
aitauksen pinta-ala 833 m^2 +1
$\left(833,3\,\text{m}^2, 888\frac{1}{3}\,\text{m}^2\right)$



Tutkittu yhden osaston suurinta alaa 6
Käytetty liian epätarkkoja likiarvoja -1

Aitaus hahmoteltu oikein, saatu pelkästään yhtälö $6x + 10y = 200$ 1

8. Nopeudet v (km/h), ajat t (h), etäisyydet d ja D (km):
v_1 = 120, $t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{0,150}{120} = 1,25 \cdot 10^{-3}$ h 2
v_2 =100, $t = 1,25 \cdot 10^{-3}$,
$D = 1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,125$ km = 125 m +2
Yleisesti $D = \frac{d\ (\text{m})}{v_1\ (\text{km/h})} \cdot v_2(\text{km/h})$, ts.
uusi etäisyys = $\frac{v_2}{v_1} \cdot d$ +2



Tilanne hahmotettu oikein, mutta ei oleellisia tuloksia 1

9. Silmälukujen suhteet:
1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 — 1

Silmälukujen todennäköisyydet:

$$\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{3}{21}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{6}{21}$$ +2

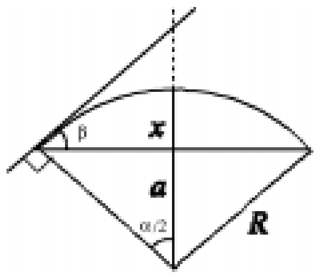
P(kuutonen ja kuutonen) = $\frac{6}{21} \cdot \frac{6}{21}$ +2

$$= \frac{36}{441} = \frac{4}{49} = 0,0816\ldots \approx 8,2\ \%$$ +1

Yksittäiset todennäköisyydet vain desimaalilukuina -1

Murtolukujen sievennyksiä ei vaadita.

10. Kuvio, jossa oleellisia merkintöjä: 1
keskuskulma = α
kaltevuuskulma = β



Yhtälö jänteen keskuskulmalle

$\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R = 1650$, josta

α = 14,841…° +1

Ajokulma

$$\left(\beta = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$\beta = \frac{\alpha}{2}$ = 7,420…°, josta vastaus 7,4°. +2

Jänteen etäisyys keskipisteestä

$a = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot R \quad (= 6316,6\ldots)$ +1

Syvin kohta

$x = R - a = 53,349\ldots$

Vastaus 53 km (50 km; 53,3 km; 53,4 km). +1

Tulokset mitattu kuviosta 0

11. Aika *x*, jona talletus kaksinkertaistui

$58 \cdot 1,008^x = 2 \cdot 58$ 1

$x = \frac{\log 2}{\log 1,008} = 86,98\ldots \approx$ 87 a, ts. +2

vuoden 1786 alkuun mennessä. +1

Aika *y*, jona talletus nelinkertaistui

$y = \frac{\log 4}{\log 1,008} = 173,97\ldots \approx$ 174 a, ts.

vuoden 1873 alkuun mennessä. +1

Vuoden 2001 alkuun 302 vuotta ja talletus

$58 \cdot 1,008^{302} = 643,4\ldots$

≈ 643 Fr (643,44 Fr). +1

Ajanlaskussa virheitä (± 1 a) -1
Yhtälöiden ratkaisut saatu kokeilemalla -1

0,8 % tulkittu 8 %:na
ja laskettu muuten oikein -3

12. Todettu värähdyslukujen suhteet:

$\frac{f}{e} = \frac{c^1}{h} = k$ ja

$\frac{d}{c} = \frac{e}{d} = \frac{g}{f} = \frac{a}{g} = \frac{h}{a} = k^2$ 1

Päädytty yhtälöön

$k^{12} = 2 \;(k^{12} \cdot 130 = 260)$ +1

$k = \sqrt[12]{2} = 1{,}0594\ldots \approx 1{,}06$. +2

Värähdysluvut: +2

$d = k^2 \cdot 130 \approx 146$, $e = k^4 \cdot 130 \approx 164$

$f = k^5 \cdot 130 \approx 174$, $g = k^7 \cdot 130 \approx 195$

$a = k^9 \cdot 130 \approx 219$, $h = k^{11} \cdot 130 \approx 245$

Suhdeluvun tietäminen ja arvon pelkkä ilmoitus 0

13. $f(2) + f(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ 1

$f(5) = \frac{1}{5} \neq f(2) + f(3)$ +1

$f(2) + f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x+2}{2x}$ +1

Tutkittu yhtälöä

$f(2) + f(x) = f(2+x)$

$\frac{x+2}{2x} = \frac{1}{2+x}$ +1

$x^2 + 2x + 4 = 0$

Todettu juurrettava negatiivinen, joten yhtälöllä ei ratkaisua. +2

14. Sijoituspääoma K, korkotekijä q = 1,045:

Merkitty K =

$200 \cdot q^{-1} + 300 \cdot q^{-2} + 400 \cdot q^{-3}$

$+ 500 \cdot q^{-4} + 600 \cdot q^{-5}$ 3

Tulos K = 1717,376… , joten on sijoitettava 1 718 € (1 717,40 €; 1 720 €). +3

Muodostettu yhtälö

$((((Kq - 200) \cdot q - 300) \cdot q - 400) \cdot q - 500) \cdot q$

$- 600 = 0$ 3

Saatu $K \cdot q^5 = 2140{,}16\ldots$,
josta vastaus +3

15. Laskettu normitetut vertailuluvut

Alina: $\frac{82-72}{9{,}2} \approx 1{,}09$

Bertta: $\frac{80-72}{6{,}8} \approx 1{,}18 > 1{,}09$

Tulos: Bertta menestyi paremmin suhteessa oman lukionsa tasoon. 2

P(alle 80 pistettä lukiossa B)
= P(x < 1,18) = 0,8810

P(tulos välillä [72 p, 80 p] lukiossa B)
= 88,10 % - 50 % ≈ 38 % (38,1 %) +2

P(tulos yli 82 pistettä lukiossa A)
= P(x > 1,09) = 1 – 0,8621
= 0,1379 ≈ 14 % (13,8 %) +2