Pitkä matematiikka 22.3.2002, ratkaisut:

1. **a)** Suoran yhtälö on $y = 2$. **b)** Yhtälö on $x = 1$. **c)** Suoran kulmakerroin on –1, joten suoran yhtälö on $y - 2 = -1(x - 1)$ eli $y = 3 - x$. **d)** Suoran $2x + y = 0$ eli $y = -2x$ kulmakerroin on –2. Sitä vastaan kohtisuoran suoran kulmakerroin on $\frac{1}{2}$. Koska tämä suora kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta, on sen yhtälö $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ eli $x - 2y + 3 = 0$.

2. **a)** Koska $e^0 = 1$, on $e^x = 1$ arvolla $x = 0$. **b)** Edellisen mukaan $e^{x^3+4x^2+x} = 1$, kun $x^3 + 4x^2 + x = 0$ eli $x(x^2 + 4x + 1) = 0$. Näin on, jos $x = 0$ tai $x^2 + 4x + 1 = 0$. Jälkimmäisen ratkaisu on $x = -2 \pm \sqrt{4-1}$. Vastaus: x on 0 tai $-2-\sqrt{3}$ tai $-2+\sqrt{3}$.

3. Jos vuonna 2000 koko myynti oli $100a$ ja siitä meni ulkomaille x %, oli ulkomaan myynti xa ja kotimaan myynti $(100-x)a$. Vuonna 2001 oli ulkomaan myynti $1{,}1xa$ ja kotimaan myynti $0{,}95(100 - x)a$. Koska koko myynti vuonna 2001 oli $106a$, on oltava $1{,}1xa + 0{,}95(100 - x)a = 106a$ eli $0{,}15x = 11$ eli $x = 73,33$. Vastaus: 73 %.

4. Olkoon pienemmän mitan halkaisija x dm. Mitat ovat yhdenmuotoiset ja tilavuuksien suhde on 2. Näin ollen on suuremman mitan halkaisija $\sqrt[3]{2} \cdot x$ ja tilavuus vastaavasti $V = \pi(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} \cdot x)^2 1{,}5 = 1$ (litra). Tästä saadaan ratkaistua $x^2 = 4/(\sqrt[3]{4} \cdot 1{,}5\pi)$ eli $x = 2/(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{1{,}5\pi}) \approx 0{,}731$. Vastaus: 7,3 cm.

5. Koska $P(x)$ on jaollinen binomilla $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, on $P(x)$:llä nollakohdat +1 ja –1. Koska x^3:n kerroin on yksi, on $P(x)$ muotoa $P(x) = (x - x_1)(x - 1)(x + 1)$. Edelleen, $12 = P(2) = (2-x_1)(2-1)(2+1) = 3(2-x_1)$, josta saadaan, että $2-x_1 = 4$ eli $x_1 = -2$. Polynomi on siis $P(x) = (x + 2)(x^2 - 1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

6. **a)** Jos $\overline{y}$ alkaa $\overline{x}$:n loppupisteestä, muodostavat $\overline{x}$, $\overline{y}$ ja $\overline{x+y}$ tasasivuisen kolmion. Sen jokainen kulma on 60°. Vektorien $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ välinen kulma on 60° kulman vieruskulmana 120°. **b)** Jos $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ alkavat samasta pisteestä, muodostavat $\overline{x}$, $\overline{y}$ ja $\overline{x-y}$ tasasivuisen kolmion. Vektorien $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ välinen kulma on siten 60°.

7. Olkoon suorakulmion sivut x m ja y m. Tällöin $x + y \le 12$ ja $xy = 30$ eli $y = 30/x$. Sijoittamalla tämä epäyhtälöön saadaan $x+30/x \le 12$ eli $x^2-12x+30 \le 0$. Vasemman puolen nollakohdat ovat $x = 6 \pm \sqrt{36-30} = 6 \pm \sqrt{6}$. Siten epäyhtälön ratkaisu on $6-\sqrt{6} \le x \le 6+\sqrt{6}$. Koska $6-\sqrt{6} \approx 3{,}55 > 0$ ja $6+\sqrt{6} \approx 8{,}45 < 12$, antaa epäyhtälön ratkaisu x:n vaihtelurajat. Koska $y = 30/x$, pätee y:lle $30/(6+\sqrt{6}) \le y \le 30/(6-\sqrt{6})$ eli $6 - \sqrt{6} \le y \le 6 + \sqrt{6}$. Vastaus: Arvoja väliltä $[6 - \sqrt{6},\ 6 + \sqrt{6}]$.

8. $\int_1^n (x^{-2} + \cos nx)dx = \Big/_1^n -1/x + (\sin nx)/n = 1 + (\sin n^2 - \sin n - 1)/n$. Edelleen, $0 \le |\sin n^2 - \sin n - 1|/n \le 3/n \to 0$, kun $n \to \infty$, joten myös $(\sin n^2 - \sin n - 1)/n \to 0$, kun $n \to \infty$. Näin ollen $\lim_{n\to\infty} \int_1^n (x^{-2} + \cos nx)dx = 1$.

9. Arvotut reaaliluvut määrittävät pisteen (a, b) xy-tason neliöstä $[0, 3] \times [0, 3]$. Ehto $\log_{10}(2a + 3b) > 1 \Leftrightarrow 2a + 3b > 10$. Ehdon täyttävien lukujen määrittämät pisteet ovat siinä neliön $[0, 3] \times [0, 3]$ osassa, joka on suoran $2x + 3y = 10$ yläpuolella. Ko. suora leikkaa neliötä pisteissä $(3, 4/3)$ ja $(1/2, 3)$. Suotuisa osa on siis suorakulmainen kolmio, jonka ala on $(3 - 4/3)(3 - 1/2)/2 = 25/12$. Koska koko neliön ala on 9, on kysytty todennäköisyys $25/(12 \cdot 9) = 25/108 \approx 0{,}2315$. Vastaus: 25/108.

10. Olkoon A pyramidin huippu, B pohjaneliön sivun keskipiste ja D pohjaneliön keskipiste. Sisäpallon keskipiste E on janalla AD ja pallo koskettaa janaa AB pisteessä F. Olkoon pallon säde r, $AE = x$, $BD = BF = y$ ja $AF = z$. Kolmioista AFE ja ADB saadaan, että $z = \sqrt{x^2 - r^2}$ ja $(y + z)^2 = y^2 + (x + r)^2$. Sijoittamalla z:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön saadaan $y = \dfrac{r(x+r)}{\sqrt{x^2 - r^2}}$. Pyramidin tilavuus $V = V(x) = \frac{1}{3}(2y)^2(x + r) = \frac{4}{3}r^2\dfrac{(x + r)^2}{x - r}$. Derivaatta on sievennettynä $V'(x) = \frac{4}{3}r^2\dfrac{x^2 - 2rx - 3r^2}{(x - r)^2}$, joten $V'(x) = 0$, kun $x^2 - 2rx - 3r^2 = 0$ eli kun $x = -r$ tai $x = 3r$. Koska $x \geq 0$, vain $x = 3r$ kelpaa. $V'(x)$ on saman merkkinen kuin $x^2 - 2rx - 3r^2$. Siksi $V'(x) < 0$, kun $0 < x < 3r$ ja $V'(x) > 0$, kun $x > 3r$ eli $V(x)$ saa pienimmän arvonsa, kun $x = 3r$. Pienin arvo on $V(3r) = \frac{4}{3} \cdot 8r^3$. Sisällä olevan pallon tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3$. Sen suhde pyramidin tilavuuteen on $\pi/8$.

11. Olkoon $P = (1, 1, 1)$. Valitaan suoralta pisteet, $Q = (1, 2, 3)$ $(t{=}0)$ ja $O = (0, 0, 0)$ $(t = -1)$. Tällöin vektorit $\overline{OP} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{PQ} = \overline{j} + 2\overline{k}$ ovat tasossa. Vektori $\overline{n} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ on tason normaali, jos $\overline{n} \cdot \overline{PQ} = 0 = \overline{n} \cdot \overline{OP}$. Edellisestä saadaan $y + 2z = 0$ eli $y = -2z$. Sijoittamalla tämä jälkimmäiseen ehtoon $x + y + z = 0$ saadaan $x - z = 0$ eli $x = z$. Kaikki muotoa $\overline{n} = z(\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k})$, $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olevat vektorit ovat normaalivektoreita. Riittää antaa yksi niistä. Vastaus: $\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$.

12. Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ on injektio, sillä jos $x \neq y$, niin $f(x) \neq f(y)$. Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ ei ole injektio, sillä vaikka $x \neq y$, niin $f(x) = 1 = f(y)$. Kuvaus $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ on määritelty kaikilla arvoilla $x \in \mathbb{R}$, joten se on $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2 \geq 0$. Lisäksi $f'(x) > 0$, kun $x \neq 2$. Näin ollen f on aidosti kasvava $\mathbb{R}$:ssä eli $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Tästä seuraa, että jos $x \neq y$, on myös $f(x) \neq f(y)$, eli että f on injektio. Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ on aidosti kasvava, koska kaikilla arvoilla x on $f'(x) = e^x > 0$. Tästä seuraa kuten edellä, että f on injektio. Koska kaikilla arvoilla x on $f(x) > 0$, ei f voi olla surjektio. Jos esimerkiksi $y = -1$, ei ole sellaista reaalilukua x, että $e^x = -1$, eli että $f(x) = y$.

13. Funktion lauseke on muotoa $1+\sum_{n=1}^{\infty} q(x)^n$, missä $q(x) = -\frac{9}{5}\sin x \cos x = -\frac{9}{10}\sin 2x$. Sarja on geometrinen ja suhdeluku on $q(x)$. Sarja suppenee, kun $|q(x)| < 1$. Koska aina $|\sin 2x| \leq 1$, on kaikilla $x \in \mathbb{R}$ $|q(x)| = \frac{9}{10}|\sin 2x| < 1$. Siten f on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q(x)^n = 1/(1 - q(x)) = 1/(1 + \frac{9}{10}\sin 2x)$. Funktio saa suurimman arvonsa, kun $\sin 2x$ on pienin ja pienimmän arvonsa, kun $\sin 2x$ on suurin. Edellinen tapahtuu, kun $\sin 2x = -1$ eli kun $x = x_o = -\pi/4 + n\pi$. Suurin arvo on $f(x_o) = 1/(1 - 9/10) = 10$. Jälkimmäinen tapahtuu, kun $\sin 2x = 1$ eli kun $x = x_1 = \pi/4 + n\pi$. Pienin arvo on $f(x_1) = 1/(1 + 9/10) = 10/19$.

14. Koska $\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$, saadaan derivoimalla yhtälö puolittain ensimmäisen kertaluvun lineaari differentiaaliyhtälö $f(x) = f'(x)$ eli $f' - f = 0$. Tämän yleinen ratkaisu on $f(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla ratkaisu alkuyhtälön vasempaan puoleen saadaan $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x ce^t dt = c\Big/_0^x e^t = c(e^x - 1)$. Ratkaisu ce^x toteuttaa siis ensin mainitun yhtälön jos ja vain jos $ce^x - c = ce^x + 2 \Leftrightarrow c = -2$. Jokainen differentiaaliyhtälön ratkaisu ei siten toteuta ensin mainittua yhtälöä.

15. Funktion $f(x)$ astetta n oleva Taylorin polynomi kohdassa $x = 0$ on $T_n(x) = f(0) +$

$f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$. Jos $f(x) = e^{x/2}$, niin $f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}, f''(x) = (\frac{1}{2})^2 e^{x/2}, ..., f^{(n)}(x) = (\frac{1}{2})^n e^{x/2}$. Kysytyiksi Taylorin polynomeiksi saadaan siis $T_0(x) = 1, T_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x, T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2, T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3$. Jos $f(1)$ korvataan $T_n(1)$:llä, on virhe $R_{n+1}(1) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)$, missä $0 \leq t \leq 1$. Jos $f(x) = e^{x/2}$, niin $R_{n+1}(1) = \frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1}e^{t/2} \leq \frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1}e^{1/2} < 10^{-16}$, kun $(n+1)!2^{n+1} > 10^{16} \cdot e^{1/2} \approx 1{,}6487 \cdot 10^{16}$. Vasen puoli kasvaa n:n kasvaessa. Koska $(14)! \cdot 2^{14} \leq 1{,}5 \cdot 10^{15}$ ja $(15)! \cdot 2^{15} \geq 4{,}2 \cdot 10^{16}$, kelpaa kysytyksi asteluvuksi 14 tai sitä suurempi luku.