YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

19.3.2004

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. Olkoon $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ ja $g(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$. **a)** Laske $f(-2)$. **b)** Laske $g(\frac{1}{2})$. **c)** Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$.

2. Määritä a siten, että $\int_a^{a+1}(2x+3)dx = \frac{1}{2}$.

3. Perheen vuokramenot olivat 25 % tuloista. Vuokramenot nousivat 15 %. Montako prosenttia vähemmän rahaa riitti muuhun käyttöön korotuksen jälkeen?

4. Pisteestä $P = (1, -1)$ lähtevät vektorit $\bar{a} = \bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = -2\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$ ovat suunnikkaan sivuina. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste olkoon Q. Määritä vektori $\overrightarrow{PQ}$ sekä pisteen Q koordinaatit.

5. Määritä se paraabelin $y = x^2 - 2x - 3$ piste, jossa paraabelin tangentin suuntakulma on $+45°$.

6. Talosta 4 metrin korkeudelta katsottaessa linkkimaston huippu näkyy 25 asteen korkeuskulmassa ja 12 metriä korkeammalta katsottaessa 22,5 asteen korkeuskulmassa vaakatasoon nähden. Maston perusta on 21 metriä korkeammalla kuin talon perusta. Määritä maston korkeus 0,1 metrin tarkkuudella.

7. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa hypotenuusan suhteessa 3 : 7. Määritä kateettien pituuksien suhde.

8. **a)** Millä parametrin a arvoilla yhtälö

$$x^2 + y^2 - 2x - 4ay + 5a^2 + 2a = 0$$

esittää ympyrää? **b)** Mikä on tällöin ympyrän alan suurin mahdollinen arvo?

9. Leirikoulun hyväksi järjestetyissä arpajaisissa ilmoitettiin, että joka 20:s arpa voittaa. Kuinka monta arpaa on ostettava, jotta todennäköisyys ainakin yhteen voittoon olisi yli 50 %?

10. Muodosta funktio $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y = 2$ ja jonka derivaatta on $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

11. Olkoon $x \geq 1$. Osoita, että $x^x - e^{x-1} \geq 0$. Millä x:n arvoilla pätee yhtäsuuruus?

KÄÄNNÄ!

12. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$f(x) = 2^{-n}, \text{ kun } n\pi \leq x < (n+1)\pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Laske integraali

$$I(k) = \int_0^{k\pi} f(x) \sin x \, dx, \text{ kun } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Määritä tämän jälkeen raja-arvo $\lim_{k\to\infty} I(k)$.

13. Kokonaisluku m on kokonaisluvun n tekijä, jos on olemassa kokonaisluku k siten, että $n = km$. Osoita: **a)** Jos m on n:n tekijä ja n on m:n tekijä, niin $m = \pm n$. **b)** Jos m on n:n tekijä ja n on p:n tekijä, niin m on p:n tekijä.

14. Anna esimerkki sellaisesta suppenevasta lukujonosta x_1, x_2, $x_3, \ldots$, että vastaava sarja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hajaantuu. Voiko lukujono hajaantua ja vastaava sarja supeta?

15. Suoran ympyrälieriön muotoisen astian pohjassa on reikä, josta astiassa oleva vesi valuu ulos. Astiassa oleva vesimäärä ajanhetkellä t on $V(t) = \pi r^2 h(t)$, missä $r = 10$ cm on astian pohjan säde ja $h(t)$ pinnan korkeus hetkellä t; aika t on ilmaistu sekunteina. Vettä valuu ulos nopeudella $V'(t)$, joka on suoraan verrannollinen pinnankorkeuden neliöjuureen. Muodosta differentiaaliyhtälö vesimäärän tilavuudelle $V(t)$ ja ratkaise se. Laske, kauanko astian tyhjeneminen kestää, kun tiedetään, että vettä oli aluksi 10 litraa ja 30 sekunnissa vesimäärä oli vähentynyt puoleen.