Pitkä matematiikka 19.3.2004, ratkaisut:

1. **a)** $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2 + 1 = 3$. **b)** $g(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 2\frac{3}{8}$. **c)** $f(x) = g(x) \iff 2x^2+3x-2 = 0$. Tämän ratkaisu on $x = \frac{1}{4}(-3\pm\sqrt{25}) = \frac{1}{4}(-3\pm5)$ eli $x = -2$ tai $x = \frac{1}{2}$.

2. $I = \int_a^{a+1}(2x+3)dx = \Big/_a^{a+1}(x^2+3x) = (a+1)^2 + 3(a+1) - (a^2+3a) = 2a+4$. Siis $I = \frac{1}{2}$, kun $2a+4 = \frac{1}{2}$. Tämän yhtälön ratkaisu on $a = -\frac{7}{4}$. Vastaus: $a = -\frac{7}{4}$.

3. Jos tulot olivat $100a$, olivat vuokramenot $25a$. Muuhun käyttöön jäi $75a$. Vuoramenot olivat korotuksen jälkeen $1{,}15 \cdot 25a = 28{,}75a$. Muuhun käyttöön jäi enää $71{,}25a$ eli $3{,}75a$ vähemmän kuin ennen. Prosenteissa vähennys oli $100 \cdot \frac{3{,}75a}{75a} = 5$. Vastaus: 5 %.

4. Koska $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat suunnikkaan sivuina ja suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, on $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b}) = \frac{1}{2}(-\overline{i}+9\overline{j})$. Jos O on origo, on pisteen Q paikkavektori $\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{i} - \overline{j} - \frac{1}{2}\overline{i} + \frac{9}{2}\overline{j} = \frac{1}{2}\overline{i} + \frac{7}{2}\overline{j}$. Vastaus: $\overline{PQ} = -\frac{1}{2}\overline{i} + \frac{9}{2}\overline{j}$ ja $Q = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

5. Funktion $y(x) = x^2 - 2x - 3$ derivaatta on $y'(x) = 2x - 2$. Haetaan paraabelin pistettä (x, y), jossa kulmakerroin $y'(x) = \tan 45^\circ = 1$. On siis oltava $2x - 2 = 1$ eli $x = \frac{3}{2}$. Jos $x = \frac{3}{2}$, on $y = (\frac{3}{2})^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = -\frac{15}{4}$. Vastaus: Piste on $(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$.

6. Olkoon s maston huipun H ja perustan P määräämä suora ja kohdatkoon s talon perustan tason pisteessä T. Olkoon d talon vaakasuora etäisyys suorasta s ja x maston korkeus PH. Olkoon vielä A ja B suoran s pisteitä siten, että $AT = 4$ m ja $BT = 16$ m. Suorakulmaisesta kolmiosta, jonka muodostavat 4 metrin korkeudelta katsova, H ja A, saadaan $\tan 25^\circ = \dfrac{x+17}{d}$ ja kolmiosta, jonka muodostavat 12 metriä korkeammalta katsova, H ja B, saadaan $\tan 22{,}5^\circ = \dfrac{x+5}{d}$. Näin ollen $\dfrac{x+17}{\tan 25^\circ} = d = \dfrac{x+5}{\tan 22{,}5^\circ}$. Tästä voidaan ratkaista $x = \dfrac{17\tan 22{,}5^\circ - 5\tan 25^\circ}{\tan 25^\circ - \tan 22{,}5^\circ} \approx 90{,}4151$. Vastaus: 90,4 m.

7. Olkoon kolmiossa ABC suora kulma C:ssä. C:stä piirretty korkeusjana kohtaa hypotenuusan pisteessä D. Merkitään $CD = h$. Jos $AD = 3a$, on $BD = 7a$. Olkoon vielä $AC = x$ ja $BC = y$. Kolmiot ADC ja CDB ovat yhdenmuotoiset, sillä vastinkulmat ovat yhtäsuuret. Näin ollen $x/y = 3a/h = h/7a$. Viimeisestä yhtäläisyydestä saadaan $h^2 = 21a^2$ eli $h = \sqrt{21}\,a$. Sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtäläisyyteen saadaan $x/y = 3a/(\sqrt{21}a) = \sqrt{3}/\sqrt{7}$. Vastaus: $\sqrt{3} : \sqrt{7}$.

8. **a)** Merkitään yhtälön vasenta puolta $f(x,y)$ ja muokataan sen lauseketta. $f(x,y) = (x^2-2x+1)+(y^2-4ay+(2a)^2)+5a^2+2a-1-4a^2 = (x-1)^2+(y-2a)^2+(a^2+2a-1)$. Yhtälö $f(x,y) = 0$ saa muodon $(x-1)^2+(y-2a)^2 = -(a^2+2a-1)$. Tämä on ympyrän yhtälö, jos $a^2+2a-1 < 0$. Koska $a^2+2a-1 = 0$, kun $a = \frac{1}{2}(-2 \pm \sqrt{8}) = -1 \pm \sqrt{2}$, esittää yhtälö $f(x,y) = 0$ ympyrää, kun $-1-\sqrt{2} < a < -1+\sqrt{2}$. **b)** Ympyrän ala on suurin, kun säteen neliö $r^2 = 1 - 2a - a^2$ on suurin. On siis löydettävä funktion $r^2(a) = 1 - 2a - a^2$ suurin arvo, kun $-1-\sqrt{2} < a < -1+\sqrt{2}$. Funktion derivaatta on $-2-2a = 0$, kun $a = -1$. Funktion $r^2(a)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka huippukohta $a = -1$ kuuluu tarkasteluvälille. Funktion suurin arvo on siten $r^2(-1) = 2$. Alan suurin mahdollinen arvo on $\pi r^2(-1) = 2\pi$.

9. Ostettaessa n arpaa on ainakin yhden voiton todennäköisyys $P_1 = 1 - P(\text{ei voittoa}) = 1 - (\frac{19}{20})^n$. Siten $P_1 > \frac{1}{2}$, kun $(\frac{19}{20})^n < \frac{1}{2}$ eli kun $n \ln \frac{19}{20} < \ln \frac{1}{2}$. Näin on, kun $n > \ln \frac{1}{2} / \ln \frac{19}{20} \approx 13{,}51$. Vastaus: Vähintään 14 arpaa.

10. Jos $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, on $f(x) = \int (1 + \frac{1}{x}) dx + c = x + \ln|x| + c$. Sivuamispisteessä x on $f'(x) = 0$ eli $1 + \frac{1}{x} = 0$ eli $x = -1$. On myös oltava $f(-1) = 2$, josta saadaan $-1 + c = 2$ eli $c = 3$. Funktion lauseke on $f(x) = x + \ln|x| + 3$.

11. Funktio $f(x) = x^x - e^{x-1} = e^{x \ln x} - e^{x-1}$. Koska e^x on kasvava, on $f(x) \geq 0$, kun $x \ln x \geq x - 1$ eli kun $g(x) = x \ln x - x + 1 \geq 0$. Kun $x \geq 1$, on $g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x \geq 0$. Näin ollen g on kasvava ja koska $g(1) = 0$, on $g(x) \geq 0$, kun $x \geq 1$. Tämä osoittaa, että $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 1$. Edellisen mukaan $f(x) = 0$, kun $g(x) = 0$. Koska $g(1) = 0$, ja $g'(x) > 0$, kun $x > 1$, on piste $x = 1$ funktion g ainoa nollakohta ja siten myös funktion f ainoa nollakohta.

12. Koska funktio on määritelty paloittain, on integraali laskettava vastaavissa paloissa. $I(k) = \int_0^{k\pi} f(x) \sin x \, dx = \sum_{n=0}^{k-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} 2^{-n} \sin x \, dx$. Nyt $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} 2^{-n} \sin x \, dx = 2^{-n} \Big/_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \cos x = 2^{-n}(\cos n\pi - \cos(n+1)\pi) = 2^{-n}((-1)^n - (-1)^{n+1}) = 2^{-n}(-1)^n(1 - (-1)) = (-1)^n 2^{-n+1}$. Näin ollen $I(k) = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n 2^{-n+1}$. Kyseessä on geometrinen sarja, jonka ensimmäinen termi on 2 ja suhdeluku $q = -\frac{1}{2}$. Siis $I(k) = 2 \dfrac{1 - (-\frac{1}{2})^k}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^k)$. Kun $k \to \infty$, niin $(-\frac{1}{2})^k \to 0$. Näin ollen $\lim_{k \to \infty} I(k) = \frac{4}{3}$. Vastaus: $I(k) = \frac{4}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^k)$ ja $\lim_{k \to \infty} I(k) = \frac{4}{3}$.

13. **a)** On siis olemassa luku k siten, että $n = km$ ja luku p siten, että $m = pn$. Näin ollen $n = km = kpn$ eli $n = 0$ tai $kp = 1$. Jos $n = 0$, on $m = p \cdot 0 = 0$. Jos kokonaisluvuille k ja p pätee $kp = 1$, on joko $k = p = 1$ tai $k = p = -1$. Edellisessä tapauksessa $m = n$ ja jälkimmäisessä $m = -n$. Siis joka tapauksessa $m = \pm n$, mikä piti todistaa. **b)** Jos on olemassa luvut k ja r siten, että $n = km$ ja $p = rn$, on $p = rkm$ eli m on p:n tekijä, mikä oli todistettava.

14. **a)** Jos $x_i = 1$ kaikilla arvoilla i, on $\lim_{i \to \infty} x_i = 1$, joten lukujono suppenee. Toisaalta $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 1 = \lim_{n \to \infty} n = \infty$, joten vastaava sarja hajaantuu. **b)** Jos lukujono $\{x_i\}$ hajaantuisi ja sarja $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ suppenisi, olisi $x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \to \sum_{i=1}^{\infty} x_i - \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin jono $\{x_i\}$ olisi suppeneva, mikä on vastoin olettamusta. Siis hajaantuvaa lukujonoa vastaava sarja ei voi supeta.

15. Olkoon nopeuden verrannollisuuskerroin $kr\sqrt{\pi}$. Tilavuuden lausekkeesta saadaan, että $h(t) = \dfrac{1}{\pi r^2} V(t)$. Siten $V'(t) = kr\sqrt{\pi}\sqrt{h(t)} = k\sqrt{V(t)}$. Differentiaaliyhtälö on siis $\dfrac{dV}{dt} = k\sqrt{V}$. Erottamalla muuttujat saadaan $\dfrac{dV}{\sqrt{V}} = k dt \Leftrightarrow 2\sqrt{V(t)} = kt + c$. Koska $V(0) = 10$, on $2\sqrt{10} = c$. Koska $V(30) = 5$, on $2\sqrt{5} = 30k + 2\sqrt{10}$, joten $k = \frac{\sqrt{5}}{30} \cdot 2(1 - \sqrt{2})$. Ratkaisuksi saadaan täten $V(t) = \frac{1}{4}(kt + c)^2 = 5(\frac{1-\sqrt{2}}{30} t + \sqrt{2})^2$. Astia on tyhjä, kun $V(t) = 0$ eli kun $\frac{1-\sqrt{2}}{30} t + \sqrt{2} = 0$, josta saadaan $t = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \approx 102{,}4$. Astian tyhjeneminen kestää siis 102 sekuntia.