YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA | 30.3.2005 | MATEMATIIKAN KOE PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. **a)** Sievennä lauseke $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x}{1+x}$. **b)** Ratkaise x yhtälöstä $x^2 - ax - a^2 = 0$.

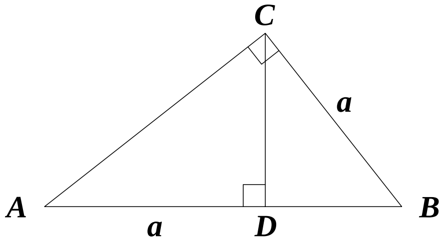
2. **a)** Ratkaise yhtälöryhmä $x + y = a$, $x - y = 2a$. **b)** Tiedetään, että $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $180° < x < 270°$. Määritä $\cos x$ ja $\tan x$ (tarkat arvot).

3. Asuinrakennuksesta saadut vuokrat ovat 12 % pienemmät kuin ylläpitokustannukset. Kuinka monta prosenttia vuokria olisi korotettava, jotta ne tulisivat 10 % suuremmiksi kuin ylläpitokustannukset, jotka samanaikaisesti kohoavat 4 %?

4. Olkoon $\overrightarrow{OA} = 7\bar{i} + 9\bar{j}$ tason vektori. Määritä kaikki sellaiset vektorit $\overrightarrow{OB}$, että kulma OAB on suora ja vektorin $\overrightarrow{AB}$ pituus on puolet vektorin $\overrightarrow{OA}$ pituudesta.

5. Määritä paraabelin $y = 2x^2 + bx + 3$ huippu ja totea, että se kertoimen b arvosta riippumatta sijaitsee paraabelilla $y = -2x^2 + 3$.

6. Kuvion suorakulmaisessa kolmiossa on toisen kateetin projektio hypotenuusalle yhtä pitkä kuin toinen kateetti: $AD = BC = a$. Määritä kolmion kulmat asteen tarkkuudella.

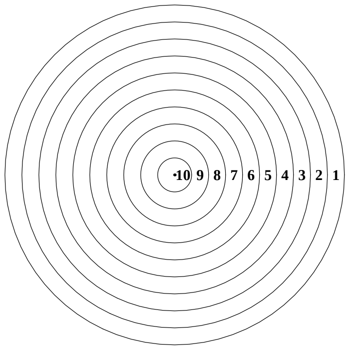


7. Luvulle π saadaan karkea likiarvo sijoittamalla ympyrän sisään **a)** säännöllinen kuusikulmio tai **b)** säännöllinen kahdeksankulmio ja rinnastamalla tämän α) piirin pituus tai β) pinta-ala ympyrän kehän pituuteen tai vastaavasti ympyrän alaan. Laske tällä tavoin neljä eri likiarvoa luvulle π. Anna vastaukset tarkkoina arvoina (trigonometrisia funktioita käyttämättä) ja kolmidesimaalisina likiarvoina.

8. Anna esimerkki sellaisesta jatkuvasta funktiosta $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, että f saa arvon 6 jossakin pisteessä ja $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Saako nämä ehdot täyttävä funktio aina arvon 0 jossakin pisteessä?

KÄÄNNÄ!

9. Tikkataulun säde on 20 cm, ja taulu jakautuu kymmeneen samankeskiseen yhtä leveään renkaaseen, jotka on numeroitu ulkoa sisäänpäin 1:stä 10:een. Gabrielin heittämät tikat osuvat tauluun siten, että niiden etäisyys r taulun keskipisteestä noudattaa todennäköisyysjakaumaa, jonka tiheysfunktio on



$$f(r) = \begin{cases} \frac{3}{16000}(400 - r^2), & \text{kun } 0 \le r \le 20, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä r on ilmaistu senttimetreinä. **a)** Laske todennäköisyys, että Gabrielin heittämä tikka osuu 9:ään tai 10:een. **b)** Laske todennäköisyys, että Gabrielin heittämistä viidestä tikasta ainakin kolme osuu 9:ään tai 10:een.

10. Neljännen asteen polynomilla on paikallinen maksimi 16, kun $x = -1$. Origossa polynomi saa arvon 11. Polynomin kuvaajan pisteeseen $(1, 11)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 0. Muodosta yhtälöryhmä, josta polynomin kertoimet voidaan ratkaista. Ratkaise tämä laskinta käyttämättä. Mikä on kyseinen polynomi?

11. Rasian pohja on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 7 cm ja 15 cm. Rasian laidat kallistuvat ulospäin kaikki samassa kaltevuudessa siten, että laitojen yläreunat muodostavat suorakulmion, jonka sivujen pituudet ovat 11 cm ja 19 cm. Rasian korkeus (pystysuoraan mitattuna) on 8 cm. Laske pinta-ala rasian vaakasuoralle poikkileikkaukselle korkeudella z ($0 \le z \le 8$, z senttimetreinä). Laske myös rasian tilavuus.

12. Olkoon funktio f jatkuva origossa. Määritä erotusosamäärän avulla funktion $g(x) = xf(x)$ derivaatta origossa. Voidaanko tulosta soveltaa funktioon $f(x) = |x| + 1$?

13. Geometrisen sarjan ensimmäinen termi on $x^2 + 1$ ja toinen $x^2 + 3x$. Tutki, millä muuttujan x arvoilla sarja suppenee.

14. Etsi ratkaisut differentiaaliyhtälölle $y'^2 - xy' + y = 0$ derivoimalla se kerran ja ratkaisemalla tällöin syntynyt uusi differentiaaliyhtälö. Ovatko tämän ratkaisut myös alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja? Piirrä alkuperäisen yhtälön ratkaisujen kuvaajia.

15. Määritä funktion $f(x) = x \sin x$ pienin positiivinen ääriarvokohta ja vastaava ääriarvo ratkaisemalla derivaatan nollakohta Newtonin menetelmällä. Anna vastaukset viiden desimaalin tarkkuudella. Hahmottele funktion kuvaaja välillä $[0, 2\pi]$.