Pitkä matematiikka 30.3.2005, ratkaisut:

1. **a)** $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{x(1+x+1-x)}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

b) $x = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2+4a^2}) = \frac{1}{2}a(1 \pm \sqrt{5})$ eli $x = \frac{1}{2}a(1-\sqrt{5})$ tai $x = \frac{1}{2}a(1+\sqrt{5})$.

2. **a)** Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan $2x = 3a$ eli $x = \frac{3}{2}a$. Tällöin $y = a - \frac{3}{2}a = -\frac{1}{2}a$. Vastaus: $x = \frac{3}{2}a$, $y = -\frac{1}{2}a$.

b) Jos $180^\circ < x < 270^\circ$, on $\cos x < 0$. Siis $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\frac{1}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ja $\tan x = (-\frac{1}{\sqrt{5}})/(-\frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{2}$. Vastaus: $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ja $\tan x = \frac{1}{2}$.

3. Jos ylläpitokustannukset olivat $100a$, olivat vuokrat $88a$. Vuokrien korotusprosentille x saadaan ehto $(1+\frac{x}{100})88a = 1{,}1 \cdot 1{,}04 \cdot 100a = 114{,}4a$. Siis $x = 100(\frac{114{,}4a}{88a} - 1) = 100 \cdot 0{,}3 = 30$. Vastaus: 30 %.

4. Vektori $\overline{AB}$ on kohtisuorassa vektoria $\overline{OA}$ vastaan, joten se on muotoa $t(9\bar{i} - 7\bar{j})$. Ehdosta $|\overline{AB}| = \frac{1}{2}|\overline{OA}|$ saadaan $|t|\sqrt{9^2+7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{7^2+9^2}$ eli $t = \pm\frac{1}{2}$. Näin ollen $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = 7\bar{i} + 9\bar{j} \pm \frac{1}{2}(9\bar{i} - 7\bar{j}) = (7 \pm \frac{9}{2})\bar{i} + (9 \mp \frac{7}{2})\bar{j}$. Vastaus: $\overline{OB} = \frac{23}{2}\bar{i} + \frac{11}{2}\bar{j}$ tai $\overline{OB} = \frac{5}{2}\bar{i} + \frac{25}{2}\bar{j}$.

5. Funktion $y(x) = 2x^2 + bx + 3$ derivaatta on $y'(x) = 4x + b$. $y'(x) = 0$, kun $x = -\frac{1}{4}b$ ja $y(-\frac{1}{4}b) = \frac{2}{16}b^2 - \frac{1}{4}b^2 + 3 = -\frac{1}{8}b^2 + 3$. Paraabelin huipun koordinaatit ovat $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{4}b, -\frac{1}{8}b^2 + 3)$. Tarkastellaan sitten paraabelia $y = -2x^2 + 3$. Koska $-2x_0^2 + 3 = -\frac{2}{16}b^2 + 3 = y_0$, sijaitsee huippu tällä paraabelilla kaikilla arvoilla b.

6. Kolmiot ABC ja CBD ovat yhdenmuotoiset. Jos $BD = b$, on $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{a}$, josta $a^2 = b(a+b)$ eli $b^2 + ab - a^2 = 0$. Tästä saadaan, koska $b > 0$, $b = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4})a$. Kulmalle $\angle CBD = \beta$ saadaan tästä $\cos\beta = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, josta $\alpha \approx 51{,}83^\circ$. Edelleen, $\angle BAC = 90^\circ - \beta \approx 38{,}17^\circ$. Vastaus: Kulmat ovat 38°, 52° ja 90°.

7. **a)** Olkoon ympyrän säde r. Tällöin kuusikulmion sivun pituus on myös r. Kuusikulmion piiri $p = 6r$ ja pinta-ala $A = \frac{1}{2}3\sqrt{3}\,r^2$. Piirin perusteella $\pi \approx \dfrac{p}{2r} = \dfrac{6r}{2r} = 3$ ja alan $\pi \approx \dfrac{A}{r^2} = \frac{1}{2}3\sqrt{3} \approx 2{,}5981$. Vastaus: α) $\pi \approx 3$, β) $\pi \approx \frac{1}{2}3\sqrt{3} \approx 2{,}598$.

b) Olkoon ympyrän säde r ja kahdeksankulmion sivun pituus a. Sivua vastaava keskuskulma $\alpha = 45^\circ$. Ympyrän keskipisteestä sivun keskipisteeseen piirretyn janan pituus $h = r\cos 22{,}5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,r$. Vastaavasti $\dfrac{a}{2r} = \sin 22{,}5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, josta $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,r$. Koska piiri $p = 8a$, on $\pi \approx \dfrac{p}{2r} = \dfrac{8a}{2r} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3{,}06147$. Kahdeksankulmion ala $A = 4ah = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\,r \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}\,r = 2\sqrt{2}\,r^2$. Siis $\pi \approx \dfrac{A}{r^2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8284$. Vastaus: α) $\pi \approx 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3{,}061$, β) $\pi \approx 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$.

8. Valitaan vaikkapa $f(x) = 6 - 12x$. Tällöin f on polynomina jatkuva, $f(0) = 6$ ja $\int_0^1 f(x)dx = \Big/_0^1 6x - 6x^2 = 0$ eli f täyttää vaatimukset. Jokainen ehdot täyttävä funktio on positiivinen jossain pisteessä ja myös sen ympäristössä. Sen määrätty integraali tulee nollaksi vain jos funktio saa myös negatiivisia arvoja. Jatkuva funktio, joka saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, saa aina myös arvon nolla. Siis ehdot täyttävä funktio saa aina arvon nolla jossain pisteessä.

9. Todennäköisyysjakauman kertymäfunktio $F(x) = \int_0^x f(r)dr = \frac{3}{16\,000}\Big/_0^x(400r - \frac{1}{3}r^3)$ $= \frac{3}{16\,000}(400x - \frac{1}{3}x^3)$. **a)** Todennäköisyys saada 9 tai 10 on $p = P(0 \leq x \leq 4) =$ $F(4) - F(0) = \frac{3}{16\,000}(1600 - \frac{1}{3} \cdot 64) = \dfrac{4736}{16\,000} = 0{,}296$. **b)** Jos $q = 1 - p = 0{,}704$, on todennäköisyys sille, että viidestä tikasta k osuu 9:ään tai 10:een $P(k) = \binom{5}{k}p^k q^{5-k}$. Kysytty todennäköisyys on $P(3)+P(4)+P(5) = 10p^3q^2+5p^4q+p^5 \approx 0{,}1578$. Vastaus: **a)** 0,296, **b)** 0,158.

10. Polynomin $P(x)$ ja sen derivaatan $P'(x)$ on toteutettava ehdot $P(-1) = 16$, $P(0) = 11$, $P(1) = 11$, $P'(-1) = 0$ ja $P'(1) = 0$. Jos $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, on $P'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$. Toisen ehdon mukaan $e = 11$. Muista ehdoista saadaan kertoimille yhtälöryhmä $a + b + c + d = 0$, $a - b + c - d = 5$, $-4a + 3b - 2c + d = 0$, $4a + 3b + 2c + d = 0$. Laskemalla kaksi ensimmäistä yhteen ja vähentämällä kaksi viimeistä toisistaan saadaan yhtälöt $2a + 2c = 5$, $2a + c = 0$, joista ratkeaa $a = -\frac{5}{2}$, $c = 5$. Vähentämällä kaksi ensimmäistä yhtälöä toisistaan ja laskemalla kaksi viimeistä yhteen saadaan yhtälöt $2b + 2d = -5$, $3b + d = 0$, joista ratkeaa $b = \frac{5}{4}$, $d = -\frac{15}{4}$. Vastaus: Polynomi $P(x) = -\frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{4}x^3 + 5x^2 - \frac{15}{4}x + 11$.

11. Olkoon rasian pystysuorassa poikkileikkauksessa AB sivu, missä A on pohjan ja sivun leikkauspiste ja olkoon C pisteen A yläpuolella yläreunan korkeudella. Tällöin kolmio ACB on suorakulmainen. Leikatkoon kolmio korkeudella z olevasta vaakasuorasta poikkileikkauksesta janan DE pituudeltaan x. Koska kolmiot ADE ja ABC ovat yhdenmuotoiset ja $BC = \frac{1}{2}(19 - 15) = 2$, on $x/2 = z/8$, josta $x = z/4$. Rasian vaakasuoran poikkileikkauksen pinta-ala korkeudella z on $A(z) = (7 + \frac{1}{2}z)(15 + \frac{1}{2}z) =$ $\frac{1}{4}z^2 + 11z + 105$. Rasian tilavuus on $V = \int_0^8 A(z)dz = \Big/_0^8 (\frac{1}{12}z^3 + \frac{11}{2}z^2 + 105z) =$ $\frac{512}{12} + 352 + 840 = 1234\frac{2}{3}$. Vastaus: Pinta-ala on $\frac{1}{4}z^2 + 11z + 105$ ja tilavuus 1235 cm^3.

12. Funktion g erotusosamäärä origon suhteen on $\frac{1}{h}(g(h) - g(0)) = \frac{1}{h}(hf(h) - 0 \cdot f(0)) =$ $f(h)$ Koska f on jatkuva origossa, on $\lim_{h\to 0} f(h) = f(0)$. Näin ollen $g'(0) =$ $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(g(h) - g(0)) = f(0)$. Funktio $f(x) = |x| + 1$ on jatkuva origossa, joten siihen voidaan soveltaa tulosta. Siten tässä tapauksessa on olemassa $g'(0) = 0 + 1 = 1$.

13. Geometrisen sarjan suhdeluku $q = (x^2 + 3x)/(x^2 + 1)$. Sarja suppenee, jos $|q| < 1$. Näin on jos $|x^2 + 3x| < x^2 + 1$ eli $-x^2 - 1 < x^2 + 3x < x^2 + 1$. Edellinen epäyhtälö on sievennettynä $2x^2 + 3x + 1 > 0$. Vasen puoli on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{9 - 8})$ eli $x = -1$ ja $x = -\frac{1}{2}$. Epäyhtälö toteutuu siis, kun $x < -1$ tai $x > -\frac{1}{2}$. Jälkimmäinen epäyhtälö on sievennettynä $3x < 1$, jonka ratkaisu on $x < \frac{1}{3}$. Yhdistämällä tulokset saadaan kaksoisepäyhtälön ratkaisuksi $x < -1$ tai $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$. Vastaus: Sarja suppenee, kun $x < -1$ tai $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$.

14. Derivoidun yhtälön vasen puoli on $\frac{d}{dx}(y'^2 - xy' + y) = 2y'y'' - y' - xy'' + y' = (2y' - x)y''$. Siis $\frac{d}{dx}(y'^2 - xy' + y) = 0$, jos $2y' - x = 0$ tai $y'' = 0$. Edellisestä saadaan $y' = \frac{1}{2}x$, josta $y = \frac{1}{4}x^2 + c$. Jälkimmäisestä saadaan $y = ax + b$. Nämä ovat uuden differentiaaliyhtälön ratkaisuja. Sijoittamalla $y = \frac{1}{4}x^2 + c$ alkuperäiseen yhtälöön saadaan $0 = y'^2 - xy' + y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + c = c$. Siis alkuperäisen yhtälön toteuttaa vain paraabeli $y = \frac{1}{4}x^2$. Vastaavasti nähdään sijoittamalla $y = ax + b$ alkuperäiseen yhtälöön, että $0 = y'^2 - xy' + y = a^2 - xa + ax + b = a^2 + b$. Siis alkuperäisen yhtälön toteuttavat vain muotoa $y = ax - a^2$ olevat ratkaisut. Nämä ovat pisteiden $(a, 0)$ ja $(0, -a^2)$ kautta kulkevia suoria. Derivoidun yhtälön ratkaisut eivät siis aina toteuta alkuperäistä yhtälöä.

15. Jos $f(x) = x \sin x$, on $f'(x) = \sin x + x \cos x$ ja $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$. Newtonin menetelmän algoritmi yhtälölle $f'(x) = 0$ on $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$, mikä on tässä tapauksessa $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\sin x_n + x_n \cos x_n}{2 \cos x_n - x_n \sin x_n}$. Koska $f(x + 2n\pi) = f(x) + 2n\pi \sin x$, on pienimmän positiivisen ääriarvokohdan oltava välillä $0 < x < \pi$. Lähtemällä alkuarvosta $x_0 = 2$, saadaan algorimilla $x_1 = 2{,}02904828$, $x_2 = 2{,}02875787$, $x_3 = 2{,}02875784$. Koska $x_2 = x_3$ kuuden desimaalin tarkkuudella, on derivaatan nollakohdan viisidesimaalinen likiarvo $z = 2{,}02876$. Vastaava ääriarvo on likimäärin $f(z) \approx 1{,}81971$. Vastaus: Pienin positiivinen ääriarvokohta on $z = 2{,}02876$ ja $f(z) \approx 1{,}81971$.