Pitkä matematiikka 24.3.2006, ratkaisut:

1. **a)** $4x + 2 = 3 - 2(x + 4) \iff 6x = -7 \iff x = -\frac{7}{6}$.

b) Leikkauspisteen y-koordinaatti on 0, joten x-koordinaatille pätee $3x - 4 = 0 \iff x = \frac{4}{3}$. *Vastaus:* Pisteessä $(\frac{4}{3}, 0)$.

c) $\dfrac{1}{a-1}(a - \dfrac{1}{a}) = \dfrac{a^2 - 1}{(a-1)a} = \dfrac{a+1}{a} = 1 + \dfrac{1}{a}$.

2. **a)** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{6}{x^3}$.

b) $\int (x^2 + \sin 2x) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

c) $\log(xy^2) - 2\log y = \log x + \log y^2 - 2\log y = \log x$.

3. Jos kateettien pituudet ovat a cm ja b cm, on $a + b + 15 = 36$ ja $a^2 + b^2 = 15^2$. Tämän mukaan on $a^2 + (21 - a)^2 = 225$ eli $a^2 - 21a + 108 = 0$. Yhtälön ratkaisut ovat $a = \dfrac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 108}}{2} = \dfrac{21 \pm 3}{2}$. Näin ollen $a = 12$, jolloin $b = 21 - a = 9$ tai $a = 9$, jolloin $b = 21 - a = 12$.

Vastaus: 9 cm ja 12 cm.

4. Jos kokonaiskustannusarvio oli a ja rakennustarvikkeiden osuus siitä xa, oli muiden kustannusten arvio $(1 - x)a$. Kustannusten noususta saadaan x:lle yhtälö $1{,}19xa + 1{,}28(1 - x)a = 1{,}25a$ eli $0{,}09x = 0{,}03$. Tämän ratkaisu on $x = \frac{1}{3}$, joten rakennustarvikkeiden arvioitu osuus oli 33,33 %. Rakennustarvikkeiden lopullinen osuus oli $1{,}19 \cdot \frac{1}{3}a$, mikä oli prosentteina $100 \cdot \dfrac{1{,}19a}{3 \cdot 1{,}25a} \approx 31{,}73$.

Vastaus: Arvioitu osuus oli 33,3 % ja lopullinen 31,7 %.

5. Muutetaan yhtälö $\sin x = 5 - a^2 \sin x$ muotoon $\sin x = \dfrac{5}{1 + a^2}$. Koska $-1 \le \sin x \le 1$ ja $\dfrac{5}{1 + a^2} > 0$, on oltava $\dfrac{5}{1 + a^2} \le 1$ eli $5 \le 1 + a^2$ eli $a^2 \ge 4$ eli $|a| \ge 2$.

Vastaus: Arvoilla $a \le -2$ ja $a \ge 2$.

6. Pisteiden A ja B määräämän avaruussuoran s suuntajana $\overline{AB} = (-1 - 1)\overline{i} + (1 - 1)\overline{j} + (3 - 1)\overline{k} = -2\overline{i} + 2\overline{k}$. Koska $\overline{AP} = (4 - 1)\overline{i} + (1 - 1)\overline{j} + (-2 - 1)\overline{k} = 3\overline{i} - 3\overline{k} = -\frac{3}{2}\overline{AB}$, suuntajanat $\overline{AP}$ ja $\overline{AB}$ ovat yhdensuuntaiset. Koska ne alkavat samasta pisteestä, on P suoralla s. Edelleen $\overline{AQ} = (0 - 1)\overline{i} + (2 - 1)\overline{j} + (4 - 1)\overline{k} = -\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$. Jos olisi vakio t siten, että $\overline{AQ} = t\overline{AB}$, olisi myös $\overline{j} \cdot \overline{AQ} = \overline{j} \cdot t\overline{AB}$ eli $1 = 0$, mikä on mahdotonta. Näin ollen vektorit $\overline{AQ}$ ja $\overline{AB}$ eivät ole yhdensuuntaisia, joten Q ei ole suoralla s.

Vastaus: Piste P on pisteiden A ja B määräämällä suoralla, mutta piste Q ei ole.

7. Jos keskipisteen y-koordinaatti on y_0, on x-koordinaatti $x_0 = 2y_0$. Koska ympyrä sivuaa x-akselia on sen säde $r = |y_0|$. Toisaalta myös keskipisteen etäisyys suorasta $4x + 3y - 24 = 0$ on säde. Tästä saadaan yhtälö $\dfrac{|4 \cdot 2y_0 + 3y_0 - 24|}{\sqrt{4^2+3^2}} = |y_0|$ eli $|11y_0 - 24| = 5|y_0|$. Näin ollen joko $11y_0 - 24 = 5y_0$ tai $11y_0 - 24 = -5y_0$. Edellisen ratkaisu on $y_0 = 4$ ja jälkimmäisen $y_0 = \frac{3}{2}$. Vastaavat säteet ovat $r = 4$ ja $r = \frac{3}{2}$ sekä x-koordinaatit $x_0 = 8$ ja $x_0 = 3$. Ehdot toteuttavien ympyröiden yhtälöt ovat $(x-8)^2 + (y-4)^4 = 16$ ja $(x-3)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Vastaus: $x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 6x - 3y + 9 = 0$.

8. Pallon tilavuus $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Jos tilavuus tunnetaan, on pallon halkaisija $d = 2r = 2\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$. Tavoitteena olevan 5000 l säiliön halkaisija on $d = 2\sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 5000}{4\pi}} \approx 21{,}2157$ (dm). Virherajojen mukaiset halkaisijat ovat $d_1 = 2\sqrt[3]{\dfrac{3\cdot(5000-65)}{4\pi}} \approx 21{,}1234$ (dm) ja $d_2 = 2\sqrt[3]{\dfrac{3\cdot(5000+65)}{4\pi}} \approx 21{,}3072$ (dm). Hyväksytyjen säiliöiden halkaisijoiden poikkeamien e cm on oltava lukujen $d_1 - d = -0{,}9234$ (cm) ja $d_2 - d = 0{,}9154$ (cm) välissä. Normitetussa normaalijakaumassa $N(0,1)$ sallittujen poikkeamien rajat ovat $e_1 = -0{,}9234/1{,}75 \approx -0{,}5276$ (cm) ja $e_2 = 0{,}9154/1{,}75 \approx 0{,}5231$ (cm). Kysytty todennäköisyys on $P(e_1 \le e \le e_2) = \Phi(e_2) - \Phi(e_1) = \Phi(e_2) + \Phi(-e_1) - 1 \approx 0{,}401$.

Vastaus: Tavoitteena oleva halkaisija on 212,2 cm ja virherajojen mukaiset halkaisijat 211,2 cm ja 213,1 cm. Hyväksyttäviä säiliöitä syntyy 40 % todennäköisyydellä.

9. Jos $y = 2\ln(x+1)$, on $e^y = e^{2\ln(x+1)} = (x+1)^2$ eli $e^{y/2} = x + 1$, josta $x = e^{y/2} - 1$. Jos $0 \le x \le e - 1$, on $0 \le y \le 2$. Pyörähdyskappaleen tilavuus on $V = \pi \int_0^2 x(y)^2 dy = \pi \int_0^2 (e^y - 2e^{y/2} + 1)dy = \pi \Big/_0^2 (e^y - 4e^{y/2} + y) = \pi(e^2 - 4e + 5) \approx 4{,}7624$.

Vastaus: $\pi(e^2 - 4e + 5) \approx 4{,}76$.

10. Olkoon kulkija lohikäärmeiden välissä etäisyydellä x Dracosta ja $200 - x$ Nidistä. Jos tässä kohtaa Dracon tulisuihkun vaikutus on $\dfrac{2a}{x^3}$, on Nidin tulisuihkun vaikutus $\dfrac{a}{(200-x)^3}$. Tässä a on verrannollisuuskerroin. On määrättävä yhteisvaikutuksen $f(x) = \dfrac{2a}{x^3} + \dfrac{a}{(200-x)^3}$ minimi. Derivaatta $f'(x) = -\dfrac{6a}{x^4} + \dfrac{3a}{(200-x)^4}$ on nolla, kun $\dfrac{2}{x^4} = \dfrac{1}{(200-x)^4}$ eli $x^4 = 2(200-x)^4$ eli $x = \pm\sqrt[4]{2}(200 - x)$. Tämän ratkaisut ovat $x_1 = \dfrac{200 \cdot \sqrt[4]{2}}{1 + \sqrt[4]{2}} \approx 108{,}64$ ja $x_2 = \dfrac{200 \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2} - 1} \approx 1257{,}04$. Näistä vain $x_1 \in [0, 200]$. Koska $f'(x) < 0$, kun $0 < x < x_1$ ja $f'(x) > 0$, kun $x_1 < x < 200$, saa $f(x)$ pienimmän arvonsa pisteessä x_1.

Vastaus: 109 kyynärää Dracosta.

11. Jos $x = 0$, on sarjan jokainen termi nolla, jolloin sarjan summakin on nolla. Oletetaan sitten, että $x \neq 0$. Sarja voidaan kirjoittaa muotoon $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Tämä on geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q = \dfrac{(1+x^2)^n}{(1+x^2)^{n+1}} = \dfrac{1}{1+x^2}$. Sarja suppenee, kun $|q| < 1$. Koska $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$, on ehto $\dfrac{1}{1+x^2} < 1$ eli $1 + x^2 > 1$. Näin on, kun $x \neq 0$.
Sarjan summa on, kun $x \neq 0$, $\dfrac{x^2}{1+x^2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \dfrac{x^2}{1+x^2-1} = 1$.
Vastaus: Sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Summa on nolla, kun $x = 0$ ja 1, kun $x \neq 0$.

12. Jos funktio kasvaa lineaarisesti, on sillä esitys $f(x) = ax + b$. Tällöin $f'(x) = a$ eli myös $f'(2) = a$. Kertoimille a ja b saadaan ehdot $f(2) = 2a + b = 3{,}7458053$ ja $f(2{,}0005) = 2{,}0005a + b = 3{,}7458664$. Vähentämällä ehdot toisistaan saadaan $0{,}0005a = 0{,}0000611$, jonka ratkaisu on $a = 0{,}1222$.
Vastaus: $f'(2) \approx 0{,}1222$.

13. Funktion f derivaatta $f'(x) = -e^{-x} < 0$ aina, joten f on aidosti vähenevä. Koska $f(x) > 0$, f:n suurin arvo välillä $[1,2]$ on $f(1) = e^{-1} + 1 \leq 1{,}4 < 2$ ja pienin arvo $f(2) = e^{-2} + 1 \geq 1{,}1 > 1$. Siis $1 < f(x) < 2$, kun $x \in [1,2]$.
Toinen derivaatta $f''(x) = e^{-x} > 0$, joten f' on aidosti kasvava. Koska $f'(x) < 0$, on välillä $[1{,}2]$ $|f'(x)| \leq |f'(1)| \leq 0{,}37 < 0{,}4$.
Yhtälön $f(x) = x$ ratkaisu saadaan siis raja-arvona jonosta $x_0, x_1, x_2, ...$, missä $x_n = f(x_{n-1})$. Valitsemalla $x_0 = 1{,}3$ saadaan seuraavaa jonoa

n	1	2	3	4	5
x_n	1,272531	1,280122	1,278004	1,278593	1,278429

n	6	7	8	9
x_n	1,278474	1,278462	1,278466	1,278464

Tässä vaiheessa voidaan päätää, että kysytty ratkaisu on $x = 1{,}278$.

14. Funktio on määritelty, kun $x \neq -1$. Sen derivaatta on
$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot (-\dfrac{2}{(1+x)^2}) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$. Koska derivaatta häviää, on funktiolla vakioarvo alueessa $x < -1$ ja myös alueessa $x > -1$.
$f(2) = \arctan 2 + \arctan(-\frac{1}{3}) \approx 0{,}785398$ ja $f(-2) = \arctan(-2) + \arctan(-3) \approx -2{,}356194$.
Funktion kuvaaja on suora $y = f(-2)$, kun $x < -1$ ja suora $y = f(2)$, kun $x > -1$.
Vastaus: $f'(x) = 0$, $f(2) \approx 0{,}785398$, $f(-2) = -2{,}356194$.

15. Totuusarvotaulut ovat

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Koska sarakkeiden 3 ja 6 mukaan lauseilla $p \Rightarrow q$ ja $\neg q \Rightarrow \neg p$ on samat totuuarvot, on lause $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ tautologia.