YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA — 27.9.2000 — MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Eräät tehtävät sisältävät useita osia [merkittynä **a)**, **b)** jne.], jolloin kaikkien kohtien käsittely kuuluu tehtävän täydelliseen suoritukseen.

**1.** Sievennä seuraavat lausekkeet:

$$\textbf{a)}\quad (x^{n-1})^{n-1}\cdot(x^n)^{2-n}, \qquad \textbf{b)}\quad \sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a^5}\right).$$

**2.** Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{x-2}=1+\frac{2}{\sqrt{x-2}}.$$

**3.** Matkaa kuljetaan tasaisella nopeudella. Kun matkasta on jäljellä 40 %, nopeutta lisätään 20 %. Kuinka monta prosenttia koko matkaan kuluva aika tällöin lyhenee?

**4.** Tasaisella maanpinnalla sijaitsevan tornin huippu näkyy eräästä paikasta katsottuna 3,5 asteen kulmassa vaakasuoraan tasoon nähden. Tasan puoli kilometriä kauempaa katsottuna kulma on 2,5 astetta. Mikä on tornin korkeus, ja mitkä ovat katseluetäisyydet?

**5.** Osoita, että jos $x+y+z=0$ ja $x^2+y^2+z^2=1$, niin $xy+yz+zx=-\frac{1}{2}$.

**6.** Kolmannen asteen polynomilla $p(x)$ on kaksinkertainen nollakohta $x=2$ ja $p(3)=15$, $p'(1)=0$. Määritä $p(x)$.

**7.** Todennäköisyys, että erään tulppaanilajikkeen sipuli itää, on 0,7. Kuinka monta sipulia on vähintään istutettava, jotta niistä ainakin kaksi itäisi yli 99 % todennäköisyydellä?

**8.** Vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat kolmion kärkipisteiden paikkavektorit. Nämä ja erään pisteen $P$ paikkavektori $\bar{p}$ toteuttavat yhtälöt

$$\begin{cases}(\bar{p}-\bar{a})\cdot(\bar{b}-\bar{c})=0,\\(\bar{p}-\bar{b})\cdot(\bar{c}-\bar{a})=0.\end{cases}$$

Miten piste $P$ voidaan tällöin luonnehtia? Todista, että myös

$$(\bar{p}-\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=0.$$

Minkä kolmiota koskevan alkeisgeometrisen lauseen vektorialgebrallinen todistus on kysymyksessä?

**9.** Ympyrän muotoisen suon halkaisija $AB$ on 1 km. Suunnistaja haluaa päästä mahdollisimman lyhyessä ajassa kohdasta $A$ kohtaan $B$. Miten hänen on valittava reittinsä, jos hän juoksee kovalla maalla 10 km/h ja suolla 5 km/h?

**10.** Osoita induktiolla, että $\dfrac{n^3+5n}{6}$ on kokonaisluku, kun $n$ on kokonaisluku ja $n\geq 1$.

KÄÄNNÄ!

**11.** Olkoon suoran $s_1$ yhtälö $3x-4y-4=0$ ja suoran $s_2$ yhtälö $x-2y+2=0$. Suoralla $s_1$ olevasta pisteestä $P_0=(0,-1)$ kuljetaan positiivisen $y$-akselin suuntaan, kunnes osutaan suoralle $s_2$; tästä jatketaan positiivisen $x$-akselin suuntaan, kunnes on palattu suoralle $s_1$ pisteeseen $P_1$. Toistamalla askel pisteestä $P_1$ lähtien saadaan suoralle $s_1$ vastaavalla tavalla piste $P_2$, jne. Laske, kuinka pitkä matka joudutaan kulkemaan edellä kuvattua porrasviivaa pitkin, jotta päästään pisteestä $P_0$ pisteeseen $P_n$. Mikä on kuljetun matkan raja-arvo, kun $n\to\infty$?

**12.** Tutki, mitkä tason pisteet $(x,y)$ toteuttavat yhtälön $\log_y x=\log_x y$. Piirrä kuvio.

**13.** Funktio $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$f(x)=\int_x^{3x}\sqrt{t^2+1}\,dt.$$

Määritä derivaatta $f'(x)$ ja tutki funktion $f$ ääriarvoja.

**14.** Eräälle käyrälle pisteeseen $(x,y)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on puolet pisteen ja origon kautta kulkevan suoran kulmakertoimesta. Määritä käyrän yhtälö, kun lisäksi tiedetään, että se kulkee pisteen $(4,1)$ kautta.

**15.** Määritä Diofantoksen yhtälön $10x+4y=36$ kaikki ratkaisut.