Pitkä matematiikka 21.9.2001, ratkaisut:

1. Eliminoimalla ensin toinen tuntematon saadaan ratkaisuksi $x = \frac{9}{23}$, $y = \frac{2}{23}$.

2. $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{2(a-b)} = \dfrac{-a \pm (a-2b)}{2(a-b)}$. Vastaus: $x = -1$ tai $x = \dfrac{b}{b-a}$.

3. Tampereelta lähtevän junan T matkustusaika on $1\frac{52}{60}$ h, joten sen keskinopeus $v_T = 60 \cdot 187/112$ km/h $\approx 100{,}2$ km/h. Vastaavasti Helsingistä lähtevän junan H matkustusaika on $2\frac{4}{60}$ h ja keskinopeus $v_H = 60 \cdot 187/124$ km/h $\approx 90{,}5$ km/h. Jos kohtaamispaikkaan on Helsingistä matkaa s_H km, on $8\frac{58}{60} + \dfrac{s_H}{v_H} = 8\frac{6}{60} + \dfrac{187 - s_H}{v_T}$. Tämän ratkaisu on $s_H = 187/(1\frac{52}{60} + 2\frac{4}{60}) \approx 47,5$ km. Kohtaamishetkellä kello on $8.58 + s_H/v_H \approx 9.30$.

4. Käyrien $y_1 = \frac{1}{4}(-x^2+6x+3)$ ja $y_2 = 2x^2+1$ leikkauspisteillä on samat y-koordinaatit. Niissä on siis $-x^2+6x+3 = 4(2x^2+1)$ eli $9x^2-6x+1 = 0$ eli $(3x-1)^2 = 0$. Tällä on yksi ratkaisu $x = \frac{1}{3}$. Käyrillä on siis yksi leikkauspiste $(\frac{1}{3}, \frac{11}{9})$. Edelleen, $y_1' = \frac{1}{2}(-x+3)$ ja $y_2' = 4x$. Koska $y_1'(\frac{1}{3}) = y_2'(\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$, on käyrillä yhteinen tangentti. Sen yhtälö on $y - \frac{11}{9} = \frac{4}{3}(x - \frac{1}{3})$ eli $12x - 9y + 7 = 0$.

5. Huomenna on pouta (todennäköisyys 0,8) tai sadetta (todennäköisyys 0,2). Näin ollen ylihuomenna sataa todennäköisyydellä $0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}28$. Vastaus: 28 % todennäköisyydellä.

6. Olkoon R maapallon säde ja h napa-aluekalotin korkeus. Leikkaamalla maapallo napojen kautta kulkevalla tasolla nähdään, että $\dfrac{R-h}{R} = \sin 66{,}5^\circ$. Siis $h = R(1 - \sin 66{,}5^\circ)$. Kalotin ala on $A = 2\pi Rh = 2\pi R^2(1 - \sin 66{,}5^\circ)$. Napa-alueiden alojen suhde maapallon alaan on siten $\dfrac{2A}{4\pi R^2} = 1 - \sin 66{,}5^\circ \approx 0{,}08294$. Jos sitten trooppisen vyöhykkeen korkeus on k, on $\frac{1}{2}k = R \sin 23{,}5^\circ$. Trooppisen vyöhykkeen alan suhde maapallon alaan on $\dfrac{2\pi Rk}{4\pi R^2} = \sin 23{,}5^\circ \approx 0{,}3987$. Vastaus: Napa-alueet ovat 8,3 % ja trooppinen alue on 39,9 % maapallon pinta-alasta.

7. Pisteiden $P_1 = (2, 11\frac{1}{2}, 2)$ ja $P_2 = (4, \frac{1}{2}, -1)$ kautta kulkevan suoran s suunta on $\overline{P_1P_2} = 2\overline{i} - 11\overline{j} - 3\overline{k}$. Pisteiden $P_3 = (5,2,0)$, $P_4 = (1,1,1)$ ja $P_5 = (4,1,3)$ kautta kulkevalla tasolla T on suuntavektorit $\overline{P_3P_4} = -4\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{P_3P_5} = -\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$. Koska $\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_3P_4} = -8 + 11 - 3 = 0$ ja $\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_3P_5} = -2 + 11 - 9 = 0$, on $\overline{P_1P_2}$ kohtisuorassa vektoreita $\overline{P_3P_4}$ ja $\overline{P_3P_5}$ vastaan eli s on kohtisuorassa tasoa T vastaan.

8. Käyrien y-koordinaattien erotus $e(x) = \ln(1+e^x) - x = \ln(1+e^x) - \ln e^x = \ln(1+e^{-x})$. Koska $e(x)$ on jatkuva ja $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, on $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ln 1 = 0$. Tämä todistaa väitteen.

9. Kyseessä on geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, jonka suhdeluku $q = \dfrac{2x-1}{3x+1}$. Sarja suppenee, kun $|q| < 1$ eli kun $|2x-1| < |3x+1|$. Korottamalla puolittain toiseen saadaan ehdoksi $5x^2 + 10x > 0$. Vasemman puolen nollakohdat ovat -2 ja 0, joten sarja suppenee kun $x < -2$ tai $x > 0$. Sarjan summa on $\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{3x+1}{x+2} = 3 - \dfrac{5}{x+2}$. Kuvaajan asymptootit ovat suorat $x = -2$ ja $y = 3$, kun $x < -2$ ja suora $y = 3$, kun $x > 0$.

10. Pisteet $P_1 = (28, 98)$, $P_2 = (70, 112)$ ja $P_3 = (126, 84)$ ovat ympyrän kehällä. Jos ympyrän keskipiste on $O = (x, y)$, on säde $r = OP_1 = OP_2 = OP_3$. Tästä saadaan yhtälöt $OP_1^2 = OP_2^2$ eli $(28-x)^2+(98-y)^2 = (70-x)^2+(112-y)^2$ ja $OP_1^2 = OP_3^2$ eli $(28-x)^2+(98-y)^2 = (126-x)^2+(84-y)^2$. Edellinen sievenee muotoon $3x+y = 252$ ja jälkimmäinen muotoon $7x-y = 448$. Yhtälöparin ratkaisu on $x = 70, y = 42$. Säteeksi kartalla saadaan $r = \sqrt{1764 + 3136} = 70$. Luonnossa säde on $25r$ m $= 1750$ m.

11. Pinta-ala on $A(a) = \int_a^{a+2}(x^2+x+1)^{-1}dx = F(a+2) - F(a)$, missä $F(x)$ on funktion $(x^2+x+1)^{-1}$ integraalifunktio. Pinta-alan derivaatta on $A'(a) = F'(a+2) - F'(a) = ((a+2)^2 + (a+2)+1)^{-1} - (a^2+a+1)^{-1} = -(4a+6)(a^2+5a+7)^{-1}(a^2+a+1)^{-1}$. Edelleen, $A'(a) = 0$, kun $a = -\frac{3}{2}$, $A'(a) > 0$, kun $a < -\frac{3}{2}$ ja $A'(a) < 0$, kun $a > -\frac{3}{2}$. Näin ollen pinta-ala $A(a)$ saavuttaa suurimman arvonsa, kun $a = -\frac{3}{2}$.

12. Siirrämme koordinaattiakselin pyörähdysakselille muunnoksella $z = x - 3$. Tällöin käyrän yhtälö muuttuu muotoon $y = (z+3)^3 + 1$ tai $z = \sqrt[3]{y-1} - 3$. Pyörähdyskappaleen tilavuus on nyt $V = \pi \int_0^9 z^2 dy = \pi \int_0^9 ((y-1)^{2/3} - 6(y-1)^{1/3} + 9)dy = \pi \Big/_0^9 \frac{3}{5}(y-1)^{5/3} - \frac{9}{2}(y-1)^{4/3} + 9y = 333\pi/10$.

13. **a)** $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$. **b)** $g(x) = 0$ kun $x = 0$ tai $\sin(1/x) = 0$. Jälkimäinen pätee, kun $1/x = n\pi$ eli $x = 1/(n\pi)$, $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$. **c)** Kaikilla arvoilla x on $|g(x)| \leq 1$. Edelleen $g(x) = 1$, kun $1/x = \pi/2 + 2n\pi$ eli kun $x = x_n = (\pi/2 + 2n\pi)^{-1}$. Vastaavasti $g(x) = -1$, kun $x = y_n = (-\pi/2 + 2n\pi)^{-1}$. Välillä $[x_{20}, y_{20}] \in [0{,}0078; 0{,}0081] \in]0; 0{,}01]$ on g jatkuva ja saa päätepisteissä arvot +1 ja –1. Näin ollen se saa ao. välillä myös kaikki arvot päätepistearvojen väliltä. Koska $|g(x)| \leq 1$, ei g voi saada muita arvoja. c):n vastaus on siis, että g saa kaikki arvon väliltä $[-1, +1]$. **d)** Kun $x \neq 0$, on $|h(x)| = |x \sin(1/x)| \leq |x|$. Koska $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, on myös $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. **e)** Koska $\lim_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$, on h jatkuva origossa. **f)** Olkoon $x_n = (\pi/2 + 2n\pi)^{-1}$, jolloin $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Tällöin $h(x_n) = x_n$ ja $\lim_{n\to\infty} f(h(x_n)) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Olkoon sitten $z_n = (n\pi)^{-1}$, jolloin $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ ja $h(z_n) = 0$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} f(h(x_n)) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Näin ollen raja-arvoa $\lim_{x\to 0} f(h(x))$ ei voi olla olemassa.

14. Newtonin menetelmällä haetaan yhtälön $f(x) = 0$ juuria, kun f on derivoituva ja derivaatta nollasta poikkeava. Menetelmässä muodostetaan jono (x_n) rekursiivisesti seuraavasti. Valitaan alkuarvo x_o juuren läheisyydestä. Kun arvo x_n on määrätty, asetetaan $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Jono suppenee suotuisassa tapauksessa kohti yhtälön juurta. Olkoon määrättävänä yhtälön $f(x) = 0$ suurin juuri, kun $f(x) = e^x + \sin x$. Selvästi $f(-1) \leq -0{,}47 < 0$ ja $f(0) = 1 > 0$. Edelleen $f'(x) = e^x + \cos x > 0$, kun $x > -1$. Näin ollen kaikki yhtälön juuret ovat negatiivisia ja välillä $]-1, 0[$ on yksi juuri, joka on suurin. Valitsemalla $x_o = -0{,}5$ saadaan $x_1 = -0{,}5856438$, $x_2 = -0{,}5885294$, $x_3 = -0{,}5885327 = x_4$. Kysytty juuren likiarvo on siis $-0,58853$.

15. Jos elintaso ajan funktiona on $y = y(t)$, on elintason kasvu $y' = y'(t)$. Tehtävän mukaan $y' = k/y$, missä $k > 0$ on verrannollisuuskerroin. Differentiaaliyhtälömallin ratkaisu on $y^2 = 2kt + c$ eli $y = \sqrt{2kt + c}$. Kasvu on jatkuvaa, koska y on t:n jatkuva funktio. Koska $y'' = -ky^{-2}y' < 0$, on y' pienenevä eli kasvu on hidastuva. Koska $\lim_{t\to\infty} y = \lim_{t\to\infty} \sqrt{2kt + c} = \infty$, ei elintaso lähene mitään vakiotasoa.