Pitkä matematiikka 24.9.2003, ratkaisut:

1. **a)** $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{29})$. **b)** $f'(x) = 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$. **c)** Kuvaaja on suora pisteiden (0,–3) ja $(\frac{3}{2}$,0) kautta.

2. Neljäkkään $ABCD$ lävistäjät ovat kohtisuorat. Olkoon niiden leikkauspiste E, $AE = x$ ja $BE = 2x$. Koska kolmio AEB on suorakulmainen, on $x^2+(2x)^2 = 5^2$ eli $5x^2 = 25$, josta $x = \sqrt{5}$. Neljäkkään ala on $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = 20$. Vastaus: 20 cm^2.

3. **a)** $f'(x) = 2e^{2x-2} + 3x^2$. **b)** Koska $f'(1) = 2e^0 + 3 = 5$, on käyrän pisteeseen (1,1) piirretyn tangentin yhtälö $y-1 = 5(x-1)$ eli $y = 5x-4$. **c)** Tangentti leikkaa akseleita pisteissä (0,–4) ja $(\frac{4}{5}, 0)$. Näiden välisen janan pituus on $\sqrt{(\frac{4}{5})^2 + 4^2} = \frac{4}{5}\sqrt{26}$.

4. Olkoon $P = (x, y)$. Tällöin $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} + \overline{PE} = (-1-x)\bar{i} + (1-y)\bar{j} + (1-x)\bar{i} + (-2-y)\bar{j} + (2-x)\bar{i} + (1-y)\bar{j} + (2-x)\bar{i} + (3-y)\bar{j} + (-2-x)\bar{i} + (-2-y)\bar{j} = (2-5x)\bar{i} + (1-5y)\bar{j}$. Tämä on nollavektori, kun $2 - 5x = 0$ ja $1 - 5y = 0$ eli $x = \frac{2}{5}$ ja $y = \frac{1}{5}$. Vastaus: Pisteestä $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$.

5. Jos seoksessa on päärynämehua $100a$ ja omenamehua $100b$, on seoksessa sokeria $14a + 7b$. Toisaalta seoksessa on sokeria $\frac{11}{100}(100a+100b)$ eli $11a+11b$. Tästä saadaan yhteys $14a + 7b = 11a + 11b$ eli $3a = 4b$ eli $a/b = 4/3$. Vastaus: Neljä osaa päärynämehua ja kolme osaa omenamehua.

6. Jos $|x| \leq \pi/2$ ja $\pi \leq y \leq 2\pi$, on $\cos x = +\sqrt{1-\sin^2 x}$ ja $\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y}$. Siis $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{1}{4}(-\frac{1}{3}) - \sqrt{\frac{15}{16}}\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{30}-1}{12} \approx 0{,}83$.

7. **a)** Unioni $T_0 \cup T_{60^o}$ on kuusisakarainen tähti, missä kukin sakara on tasasivuinen kolmio, jonka sivuksi saadaan $\frac{1}{3}a$. Unionin ala on T_0:n ala lisättynä kolmen sakaran alalla eli on $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{4}(\frac{1}{3}a)^2\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}a^2$. **b)** Unioni $T_0 \cup T_{120^o} = T_0$, joten sen ala on $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. **c)** Unioni $T_0 \cup T_{180^o} = T_0 \cup T_{60^o}$, joten sen ala on a)-kohdan mukaan $\frac{1}{\sqrt{3}}a^2$.

8. **a)** Olkoon $O = (0,0), A = (2, \frac{2}{5})$ ja $B = (5,0)$. Tiheysfunktion kuvaaja koostuu välillä $[0,5]$ janoista OA ja AB sekä muualla x-akselista. **b)** $P(x \leq 1)$ on sen kolmion ala, jonka kärjet ovat O, $(1,0)$ ja $(1, \frac{1}{5})$. Siis $P(x \leq 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{10}$. $P(x > 3)$ on sen kolmion ala, jonka kärjet ovat $(3,0)$, $(3, \frac{4}{15})$ ja B. Siis $P(x > 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} \cdot 2 = \frac{4}{15}$. $P(1 < x \leq 3) = 1 - P(x \leq 1) - P(x > 3) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{4}{15} = \frac{19}{30}$.

9. Olkoon O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja R säde. Jos sivu $BC = a$, on $\angle BAC = \alpha$. Vastaava keskuskulma $BOC = 2\alpha$. Leikatkoon 2α:n puolittaja BC:n pisteessä D. Kolmio ODC on suorakulmainen, hypotenuusa $OC = R$ ja α:n vastainen kateetti $DC = \frac{1}{2}a$. Siis $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$ eli $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, mikä piti todistaa.

10. $\ln y > 0$, kun $y > 1$, $\ln y = 0$, kun $y = 1$ ja $\ln y < 0$, kun $0 < y < 1$. Edelleen, $|x-2| = x-2 > 1$, kun $x > 3$, $0 < |x-2| = x-2 \leq 1$, kun $2 < x \leq 3$ sekä $|x-2| = 2-x > 1$, kun $x < 1$ ja $0 < |x-2| = 2-x \leq 1$, kun $1 \leq x < 2$. Siis $f(x)$ on $\ln(2-x)$, kun $x < 1$, $-\ln(2-x)$, kun $1 \leq x < 2$, $-\ln(x-2)$, kun $2 < x \leq 3$ ja on $\ln(x-2)$, kun $x > 3$. Selvästi $f(x) \geq 0$ ja on nolla, kun $x = 1$ ja kun $x = 3$. Funktio saa siis pienimmän arvonsa arvoilla $x = 1$ ja $x = 3$. Derivaatta $f'(x) > 0$, kun $1 < x < 2$ ja kun $x > 3$, joten $f(x)$ on näillä väleillä kasvava. $f'(x) < 0$, kun $x < 1$ ja kun $2 < x < 3$, joten $f(x)$ on näillä väleillä vähenevä.

11. $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x^2 - 2a_kx + a_k^2) = nx^2 - 2x\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2$. Tämä on ylöspäin aukeava paraabeli, joka saa pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa. Koska $f'(x) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k$, on $f'(x) = 0$, kun $nx - \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ eli kun $x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Tämä on juuri väitetty pienimmän arvon kohta. Pienin arvo on $f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 - 2\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$.

12. Korkotekijä $q = 1{,}015$. Ensimmäisen vuoden korko on $200 \cdot 0{,}015 \cdot (12+11+...+1)/12 = 19{,}5$. Pääoma ensimmäisen vuoden jälkeen on $K = 12 \cdot 200 + 19{,}5 = 2419{,}5$, toisen vuoden jälkeen $(1+q)K$, kolmannen vuoden $(1+q+q^2)K$ jne. **a)** Kun poika täyttää 18 vuotta, on tilillä rahaa $(1+q+q^2+...+q^{17})K = K\dfrac{1-q^{18}}{1-q} \approx 49\,574{,}0446$. **b)** Jos kaksioon on talletettava n vuotta, on $K\dfrac{1-q^n}{1-q} = 135\,000$, josta $q^n = 1 + \dfrac{q-1}{K} \cdot 135\,000$ eli $n = \dfrac{1}{\ln q}\ln(1 + \dfrac{q-1}{K} \cdot 135\,000) \approx 40{,}84$. Vastaus: a) 49574,04 euroa, b) 41 vuotta.

13. Tilavuus $V = \pi\int_1^e (\ln x)^2 dx$. Osittaisintegrointi antaa $V = \pi(\Big/_1^e x(\ln x)^2 - 2\int_1^e \ln x dx) = \pi(e - 2(\Big/_1^e x\ln x - \int_1^e dx)) = \pi(e - 2e + 2(e-1)) = \pi(e-2)$.

14. Jos $F(x) = \int f(t)dt$, on $G(x) = \frac{1}{x}(F(x) - F(0))$ ja $G'(x) = -\frac{1}{x^2}(F(x) - F(0)) + \frac{1}{x}(F'(x) - 0) = -\frac{1}{x}G(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}(f(x) - G(x))$. Jos f on kasvava, on $f(x) \geq f(t)$ kaikilla $t \leq x$. Tällöin $\int_0^x f(t)dt \leq f(x)\int_0^x dt = xf(x)$ eli $f(x) \geq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = G(x)$. Tämän perusteella $G'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - G(x)) \geq 0$, joten myös G on kasvava.

15. **a)** $y'(x) = \cos x - \sin x$, joten $y'(x) + 2\sin x = \cos x + \sin x = y(x)$. Lisäksi $y(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$. Siis $y(x)$ on differentiaaliyhtälön ratkaisu annetulla alkuehdolla. **b)** Yhtälön Eulerin menetelmä on $y_0 = 1, x_0 = 0,\ y_{i+1} = y_i + h(y_i - 2\sin x_i),\ i = 0, 1, 2, ...$ Kun $h = 0{,}5$, on laskettava $y_{i+1} = 1{,}5y_i - \sin x_i,\ i = 0, 1, 2, 3$. Kysytyiksi arvoiksi saadaan

x_i	$y(x_i)$	y_i	$y_i - y(x_i)$
0	1	1	0
0,5	1,3570	1,5	0,1430
1,0	1,3818	1,7706	0,3888
1,5	1,0682	1,8144	0,7462
2,0	0,4931	1,7241	1,2309