



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. Ratkaise epäyhtälöt

a) $2x - 3 < 3 - 2x$,

b) $(x + 1)^2 \leq 1$,

c) $x^3 < x^2$.

2. Kolmion sivujen pituudet ovat $a - 1$, a ja $a + 1$. Määritä a siten, että kolmio on suorakulmainen. Määritä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

3. Kuutio pienennetään toiseksi kuutioksi siten, että sen kokonaispinta-ala pienenee 36 %. Kuinka monta prosenttia tilavuus pienenee?

4. Origosta O alkava vektori \overrightarrow{OP} on vektorin $3\vec{i} + \vec{j}$ suuntainen, ja sen kärki P on pisteiden $A = (1, 2)$ ja $B = (7, 1)$ yhdysjanalla. Missä suhteessa piste P jakaa janan AB ?

5. Laite koostuu kolmesta toiminnallisesti riippumattomasta komponentista A , B ja C , joiden vikaantumistodennäköisyydet takuuajana ovat $p_A = 0,01$, $p_B = 0,007$ ja $p_C = 0,05$. Laite ei toimi, jos yksikin komponenteista on viallinen. Mikä on laitteen vikaantumistodennäköisyys takuuajana? Luotettavuuden parantamiseksi komponentti C kahdennetaan, ts. laite varustetaan kahdella rinnakkaisella, toisistaan riippumattomalla komponentilla C , ja riittää, että ainakin toinen näistä toimii. Mikä on tällöin vikaantumistodennäköisyys takuuajana?

6. Etsi funktion $\ln(x^3 - x)$ määrittelyalue ja ääriarvot.

7. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy ympyrän $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ ja suoran $y = -x - 1$ muodostaman pienemmän segmentin pyörähtäessä x -akselin ympäri.

8. Olkoon annettuna trigonometrian kaavat $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ja $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. Osoita pelkästään näiden perusteella oikeiksi seuraavat kaavat:

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}.$$

Ilmoita, mitä kaavaa olet missäkin laskun vaiheessa käyttänyt.

KÄÄNNÄ!

- 9.** Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jakso on 2, toisin sanoen $f(x+2) = f(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x . Lisäksi on

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{kun } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Piirrä funktion f kuvaaja. Missä pisteissä f ei ole derivoituva? Piirrä funktioiden g ja h kuvaajat, kun $g(x) = f(x+1)$ ja $h(x) = f(x) + f(x+1)$. Missä pisteissä nämä eivät ole derivoituvia?

- 10.** Määritä funktion $f(x) = 1/x$ derivaatta pisteessä $x = 2$ laskemalla erotusosamäärän raja-arvo.

- 11.** Laske integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad \text{kun } f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{jos } x = 0 \text{ tai } x^4 \leq 1/x^4, \\ 1/x^4, & \text{jos } 1/x^4 \leq x^4. \end{cases}$$

- 12.** Mikä on sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \dots$$

yleisen termin a_n lauseke? Tutki, suppeneeko sarja.

- 13.** Mikä käyrän $y = x^4 - 7x^2$ pisteistä on lähinnä suoraa $y = 4x - 21$? Mikä on kyseinen lyhin etäisyys? Piirrä kuvio.

- 14.** Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = \frac{y}{4x + x^2}$.

- 15.** Esitä Fermat'n pieni lause ja osoita sen avulla, että $n^{2003} \equiv n \pmod{2003}$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n .