Pitkä matematiikka 24.9.2004, ratkaisut:

1. **a)** $2x-3<3-2x \iff 4x<6 \iff x<\frac{3}{2}$. **b)** $(x+1)^2 \le 1 \iff -1 \le x+1 \le 1 \iff -2 \le x \le 0$. **c)** $x^3<x^2 \iff x^2\cdot x < x^2\cdot 1 \iff x<1,\ x\ne 0$.

2. Suurin sivunpituus on $a+1$. Kolmio on suorakulmainen, jos $(a-1)^2+a^2=(a+1)^2 \iff a^2-4a=0$. Ainoa positiivinen ratkaisu on $a=4$. Hypotenuusa on ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, joten ympyrän säde $r=\frac{1}{2}(a+1)=\frac{5}{2}$. Vastaus: $a=4$, $r=\frac{5}{2}$.

3. Jos kuution sivun pituus on a, on kuution pinta-ala $6a^2$ ja tilavuus a^3. Pienennetyn kuution pinta-ala on $0{,}64\cdot 6a^2=6(0{,}8a)^2$, joten sen kuution sivun pituus on $0{,}8a$ ja tilavuus $(0{,}8a)^3=0{,}512a^3$. Tilavuuksien suhde on 0,512, joten tilavuus on pienentynyt $100(1-0{,}512)\,\% = 48{,}8\,\%$.

4. On oltava $\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{AP}$. Koska $\overline{OP}=t(3\overline{i}+\overline{j})$ ja $\overline{AP}=u\overline{AB}=u(6\overline{i}-\overline{j})$, saadaan yhtälö $t(3\overline{i}+\overline{j})=\overline{i}+2\overline{j}+u(6\overline{i}-\overline{j})$ eli $(3t-6u-1)\overline{i}+(t+u-2)\overline{j}=\overline{0}$. Näin on, kun $3t-6u-1=0$ ja $t+u-2=0$. Yhtälöparin ratkaisu on $t=\frac{13}{9}$ ja $u=\frac{5}{9}$. Siis $\overline{AP}=\frac{5}{9}\overline{AB}$, joten P jakaa janan AB suhteessa 5:4.

5. Laitteen toimimistodennäköisyys takuuaikana on $p=(1-p_A)(1-p_B)(1-p_C)\approx 0{,}9339$. Vikaantumistodennäköisyys on $1-p\approx 0{,}0661$. Jos komponentti C kahdennetaan, on toimimistodennäköisyys $p=(1-p_A)(1-p_B)(1-p_C^2)\approx 0{,}9806$. Vikaantumistodennäköisyys on $1-p\approx 0{,}0194$.

6. Funktio $f(x)$ on määritelty, kun $x^3-x>0$ eli $x(x^2-1)>0$. Nyt $x^2-1>0$, kun $x>1$ tai $x<-1$ ja $x^2-1<0$, kun $-1<x<1$. Näin ollen $x(x^2-1)>0$, kun $-1<x<0$ tai $x>1$. Derivaatta $f'(x)=(x^3-x)^{-1}(3x^2-1)=0$, kun $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\approx\pm 0{,}58$. Vain $x_\text{o}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ kuuluu määrittelyalueeseen. Se on lokaali maksimikohta, sillä $f'(x)>0$, kun $-1<x<x_\text{o}$ ja $f'(x)<0$, kun $x_\text{o}<x<0$. $f(x_\text{o})=\ln\frac{2}{3\sqrt{3}}\approx -0{,}95$. Vastaus: Määrittelyalue on $-1<x<0$ tai $x>1$. Pisteessä $x_\text{o}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ on lokaali maksimi $f(x_\text{o})=\ln\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

7. Ympyrän yhtälö on muotoa $(x+3)^2+y^2=4$, joten keskipiste on $(-3,0)$ ja säde 2. Suora $y=-x-1$ leikkaa ympyrää pisteissä, joiden x-koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2+(-x-1)^2+6x+5=0$ eli $x^2+4x+3=0$. Tämän ratkaisut ovat $x=-3$ ja $x=-1$. Pienempi segmentti on suoran $y=-x-1$ yläpuolella välillä $-3<x<-1$. Sen pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy kappale, jonka tilavuus on $V=\pi\int_{-3}^{-1}((-x^2-6x-5)-(-x-1)^2)\,dx=\pi\Big/_{-3}^{-1}(-\frac{2}{3}x^3-4x^2-6x)=\frac{8}{3}\pi$.

8.
$$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1+\sin^2\frac{x}{2}/\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1}=\sin x.$$

$$\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\sin^2\frac{x}{2}/\cos^2\frac{x}{2}}{1+\sin^2\frac{x}{2}/\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos x}{1}=\cos x.$$

9. Funktio f on välillä $[-1,0]$ jana pisteestä $(-1,0)$ pisteeseen $(0,1)$ ja välillä [0,1] jana pisteestä $(0,1)$ pisteeseen $(1,0)$. Koska f on jaksollinen jaksolla 2, on se jokaisella välillä $[-1+2n, 2n]$, $n \in Z$ jana pisteestä $(-1+2n,0)$ pisteeseen $(2n,1)$ ja jokaisella välillä $[2n, 1+2n]$, $n \in Z$ jana pisteestä $(2n,1)$ pisteeseen $(1+2n,0)$. Tämä "sahanteräfunktio" f ei ole derivoituva arvoilla $x \in Z$, sillä niissä f:n kuvaajassa on kulma, jonka vasemmanpuolisella suoralla on eri kulmakerroin kuin oikeanpuolisella. Koska $g(x) = f(x+1)$, saadaan g:n kuvaaja siirtämällä f:n kuvaajaa yhden yksikön verran vasemmalle. Tämän vuoksi g:n derivoituvuudelle pätee sama kuin f:n derivoituvuudelle eli g ei ole derivoituva arvoilla $x \in Z$. Koska $h(x) = f(x)+f(x+1) = f(x)+g(x)$, saadaan h:n kuvaaja kullakin välillä $[n, n+1]$, $n \in Z$ laskemalla yhteen jana pisteestä $(n,0)$ pisteeseen $(n+1,1)$ ja jana pisteestä $(n,1)$ pisteeseen $(n+1,0)$. Summa on jana pisteestä $(n,1)$ pisteeseen $(n+1,1)$. Ts. $h(x) = 1$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Se on tällöin derivoituva kaikkialla.

10. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{1}{h}(\dfrac{1}{2+h} - \dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{2-2-h}{2(2+h)} = -\dfrac{1}{2(2+h)} \longrightarrow -\dfrac{1}{4}$, kun $h \to 0$. Siis $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

11. Arvoilla $x \neq 0$ on $x^4 \leq 1/x^4 \Leftrightarrow x^8 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Näin ollen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} x^{-4}\,dx + \int_{-1}^{1} x^4\,dx + \int_1^{\infty} x^{-4}\,dx$. Edelleen, $\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{5}x^5 = \frac{2}{5}$ ja $\int_1^n x^{-4}\,dx = \Big/_{1}^{n} -\frac{1}{3}x^{-3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^3} \to_{n\to\infty} \frac{1}{3}$ sekä $\int_{-n}^{-1} x^{-4}\,dx = \Big/_{-n}^{-1} -\frac{1}{3}x^{-3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^3} \to_{n\to\infty} \frac{1}{3}$. Siten $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{16}{15}$.

12. Koska $a_1 = \dfrac{1}{2\cdot 1+1}$, $a_2 = \dfrac{2}{2\cdot 2+1}$, $a_3 = \dfrac{3}{2\cdot 3+1}$, $a_4 = \dfrac{4}{2\cdot 4+1}$, on oltava $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$. Edelleen, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$. Koska yleinen termi ei lähesty raja-arvoa nolla, ei sarja suppene.

13. Funktio $x^4 - 7x^2 = x^2(x^2-7)$ leikkaa x-akselia arvoilla $x = 0$, $x = \pm\sqrt{7}$. Pisteissä $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ se saa pienimmän arvonsa $-12\frac{1}{4}$, ja pisteessä $x = 0$ lokaalin maksimin 0. Suora $y = 4x - 21$ leikkaa y-akselia kohdassa $y = -21$ ja x-akselia kohdassa $5\frac{1}{4}$. Siinä käyrän pisteessä, joka on lähimpänä suoraa, on käyrän tangentin kulmakerroin sama kuin suoran kulmakerroin eli 4. Koska $y' = 4x^3 - 14x$, on ko. pisteessä oltava $4x^3 - 14x = 4$ eli $2x^3 - 7x - 2 = 0$. Helposti nähdään, että yhtälö toteutuu arvolla $x = 2$. Siten $2x^3 - 7x - 2 = (x-2)(2x^2+4x+1)$. Jälkimmäisen tekijän nollakohdat ovat $x = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} < 0$. Koska käyrän kulun perusteella pienimmän etäisyyden antavan pisteen on oltava 4. neljänneksessä, on sen oltava $(2, y(2)) = (2, -12)$. Tämän pisteen etäisyys suorasta on $d = \dfrac{|4\cdot 2 - (-12) - 21|}{\sqrt{4^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \approx 0{,}2425$.

14. Yhtälö $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{4x+x^2}$ separoituu muotoon $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x(x+4)} = \dfrac{1}{4}(\dfrac{dx}{x} - \dfrac{dx}{x+4})$. Tämän ratkaisu on $\ln|y| = \frac{1}{4}(\ln|x| - \ln|x+4|) + C' = \frac{1}{4}\ln|\dfrac{x}{x+4}| + C'$ eli $y = C\sqrt[4]{|\dfrac{x}{x+4}|}$.

15. Fermat'n pieni lause: Jos p on alkuluku ja $a \in Z$ ei ole jaollinen p:llä, niin $a^{p-1} = 1 \mod p$. Luku 2003 nähdään helposti alkuluvuksi. Jos 2003 on luvun $n \in N$ tekijä eli $n = 2003k$, niin $(2003k)^{2003} - 2003k = k((2003k)^{2002} - 1)2003 = r \cdot 2003$, missä $r = k((2003k)^{2002} - 1)$ on kokonaisluku. Siis $n^{2003} = n \mod 2003$. Jos 2003 ei ole luvun $n \in N$ tekijä, niin Fermat'n pienen lauseen mukaan $n^{2002} - 1 = 2003k$ eräällä $k \in Z$. Tällöin $n^{2003} - n = n(n^{2002} - 1) = nk \cdot 2003$, missä nk on kokonaisluku. Siis $n^{2003} = n \mod 2003$. Väite on todistettu.