YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA 29.09.2006 MATEMATIIKAN KOE PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Sievennä lauseke $(1+x)^3 - (1-x)^3$. b) Ratkaise yhtälö $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{x+1}$.

2. a) Derivoi lauseke $(x^2+1)e^{2x}$. b) Laske integraali $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$.

3. Annetun ympyrän pinta-ala on A. Mikä on ympyrän ympäri piirretyn neliön ala? Entä ympyrän sisään piirretyn neliön ala?

4. Jaa vektori $\bar{i}+7\bar{j}$ vektoreiden $\bar{a} = 2\bar{i}+3\bar{j}$ ja $\bar{b} = -7\bar{i}+6\bar{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

5. Hopean ja kuparin seoksesta tehty esine painaa 150 g, ja sen tiheys on 10,1 kg/dm^3. Kuinka monta painoprosenttia esineessä on hopeaa ja kuinka monta kuparia, kun hopean tiheys on 10,5 kg/dm^3 ja kuparin 9,0 kg/dm^3?

6. Määritä funktion $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ suurin ja pienin arvo.

7. Nelikulmion muotoisen tontin kolme peräkkäistä kulmaa ovat mittausten mukaan 70°, 125° ja 110°; näiden välisten rajalinjojen pituudet ovat (samassa järjestyksessä) 88 metriä ja 120 metriä. Kuinka suuri on tontin neljäs kulma? Mitkä ovat tontin kahden muun sivun pituudet? Ilmoita pituudet metrin tarkkuudella.

8. Määritä muodossa $ax+by+cz=1$ sen tason yhtälö, joka kulkee pisteen $(1,1,1)$ kautta ja leikkaa xy-tason pitkin suoraa $x-y=2$.

9. Suoran ympyräkartion korkeus on h ja pohjan säde r. Kartion sisään asetetaan pallo, joka sivuaa vaippaa ja pohjaa. Määritä pallon säde R. Määritä $\lim_{h\to\infty} R$, kun r on vakio, ja $\lim_{r\to\infty} R$, kun h on vakio.

10. Tiedetään, että eräässä nelilapsisessa perheessä ainakin yksi lapsista on tyttö. Mikä on tällöin todennäköisyys, että kaikki lapset ovat tyttöjä? Jos tiedetään, että ainakin kaksi lapsista on tyttöjä, mikä on todennäköisyys, että perheessä on kaksi poikaa? Oletetaan, että poikia ja tyttöjä syntyy yhtä suurella todennäköisyydellä. Millaiset tulokset saadaan, jos käytetäänkin tilastojen antamia todennäköisyyksiä: poikien syntymistodennäköisyys on $p = 0{,}51$ ja tyttöjen $t = 0{,}49$? Sukupuolen määräytymiset oletetaan riippumattomiksi tapahtumiksi.

11. Yhtälö $2x^2 + y^2 = 6$ määrittää pisteen $x = 1$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = y(x)$, jolle pätee $y(1) = -2$. Määritä funktion kuvaajalle pisteeseen $(1,-2)$ asetetun tangentin yhtälö ja laske, missä pisteessä tangentti leikkaa x-akselin.

12. Jonot (x_n) ja (y_n) olkoot geometrisia lukujonoja. Näytä, että myös tulojono $(z_n) = (x_n y_n)$ on geometrinen jono. Jos geometrinen jono (x_n) suppenee ja geometrinen jono (y_n) hajaantuu, niin onko jono (z_n) aina hajaantuva?

KÄÄNNÄ!

13. Ympyränkaaren päätepisteet ovat $(-2,0)$ ja $(2,0)$, ja kaari kulkee pisteen $(0,1)$ kautta. Kun kaari pyörähtää x-akselin ympäri, syntyy pyörähdyspinta. Muodosta integraali, joka esittää pinnan rajaaman kappaleen tilavuutta. Integraalia ei tarvitse laskea.

14. Osoita, että funktio

$$y(x) = \frac{(x-a)^2 - 1}{x-a}$$

on differentiaaliyhtälön $(y')^2 - (y^2+4)(y'-1) = 0$ ratkaisu vakion a kaikilla reaaliarvoilla. Millä vakion a arvoilla funktio toteuttaa alkuehdon $y(1) = 2$?

15. Laske integraali $\int_0^4 x^2\,dx$ numeerisesti Simpsonin säännöllä jakamalla integroimisväli neljään osaväliin. Totea, että tulos on tarkka. Tutki virhetermin avulla, minkäasteiset polynomit Simpsonin sääntö integroi tarkasti.

Pitkä matematiikka 29.9.2006, ratkaisut:

1. a) $(1+x)^3-(1-x)^3=1+3x+3x^2+x^3-(1-3x+3x^2-x^3)=6x+2x^3$.

   b) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x}{x+1}\iff(x+1)^2=x^2\iff 2x+1=0\iff x=-\frac{1}{2}$.

   Vastaus: a) $2x^3+6x$, b) $x=-\frac{1}{2}$.

2. a) $D(x^2+1)e^{2x}=2xe^{2x}+2(x^2+1)e^{2x}=2(x^2+x+1)e^{2x}$.

   b) $\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx=-\Big/_{1}^{2}\dfrac{1}{x}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

   Vastaus: a) $2(x^2+x+1)e^{2x}$, b) $\frac{1}{2}$.

3. Jos ympyrän ala on $A=\pi r^2$, on säde $r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Ympyrän ympäri piirretyn neliön sivu on $2r=2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Neliön ala on $(2r)^2=4\frac{A}{\pi}$.

   Ympyrän sisään piirretyn neliön sivu on $r\sqrt{2}$. Neliön ala on $(r\sqrt{2})^2=2r^2=2\frac{A}{\pi}$.

   Vastaus: Ympäri piirretyn neliön ala on $4\frac{A}{\pi}$ ja sisään piirretyn neliön ala on $2\frac{A}{\pi}$.

4. On määrättävä x ja y siten, että $\bar{i}+7\bar{j}=x\bar{a}+y\bar{b}$ eli $\bar{i}+7\bar{j}=x(2\bar{i}+3\bar{j})+y(-7\bar{i}+6\bar{j})$ $=(2x-7y)\bar{i}+(3x+6y)\bar{j}$. Tästä saadaan yhtälöpari $2x-7y=1$ ja $3x+6y=7$. Eliminoimalla x saadaan $y=\frac{1}{3}$ ja edelleen $x=\frac{1}{2}(1+7y)=\frac{5}{3}$.

   Vastaus: $\bar{i}+7\bar{j}=\frac{5}{3}\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{b}$.

5. Jos hopeaa on x g, on kuparia $150-x$ g. Hopean tilavuus on $\dfrac{x}{10{,}5}$ cm^3 ja kuparin $\dfrac{150-x}{9{,}0}$ cm^3. Koska esineen tilavuus on $\dfrac{150}{10{,}1}$ cm^3, saadaan tästä yhtälö $\dfrac{x}{10{,}5}+\dfrac{150-x}{9{,}0}=\dfrac{150}{10{,}1}$ eli $x(\dfrac{1}{9{,}0}-\dfrac{1}{10{,}5})=150(\dfrac{1}{9{,}0}-\dfrac{1}{10{,}1})$. Tämän ratkaisu on $x=100\cdot 1{,}1\cdot\dfrac{10{,}5}{10{,}1}\approx 114{,}356$. Prosentuaalisesti hopean osuus on $100\cdot\dfrac{114{,}356}{150}\approx 76{,}2376$. Kuparin osuus on $100-76{,}2376=23{,}7624$.

   Vastaus: Hopeaa 76,2 % ja kuparia 23,8 %.

6. Jaksollisuuden vuoksi riittää tarkastella väliä $[0,2\pi]$. Funktion $f(x)=\cos^2x+\sin x$ derivaatta on $f'(x)=-2\cos x\sin x+\cos x=\cos x(1-2\sin x)$. Derivaatta on nolla, kun joko $\cos x=0$ tai $\sin x=\frac{1}{2}$. Välillä $[0,2\pi]$ edellinen toteutuu, kun $x=\frac{\pi}{2}$ tai $x=\frac{3\pi}{2}$ ja jälkimmäinen kun $x=\frac{\pi}{6}$ tai $x=\frac{5\pi}{6}$. Näissä pisteissä funktio saa arvot $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{5\pi}{6})=\frac{5}{4}, f(\frac{\pi}{2})=1, f(\frac{3\pi}{2})=-1$. Välin päätepisteissä funktio saa arvot $f(0)=f(2\pi)=1$. Funktion suurin arvo on siis $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{5\pi}{6})=\frac{5}{4}$ ja pienin $f(\frac{3\pi}{2})=-1$.

   Vastaus: Funktion suurin arvo on $\frac{5}{4}$ ja pienin -1.

7. Nelikulmiossa $ABCD$ kulma A on 70°, kulma B 125° ja kulma C 110°. Sivu AB on 88 m ja sivu BC 120 m. Kulma D on $360^\circ - (70^\circ + 125^\circ + 110^\circ) = 55^\circ$. Nelikulmion lävistäjän AC pituus d saadaan kosinilauseella. $d^2 = 88^2 + 120^2 - 2\cdot 88\cdot 120\cos 125^\circ \approx 34257{,}934$. Näin ollen $d \approx 185{,}0890$ m. Kulmalle $\beta = \angle BAC$ saadaan sinilauseesta ehto $\dfrac{\sin\beta}{120} = \dfrac{\sin 125^\circ}{d}$, josta $\beta \approx 32{,}07889^\circ$. Tällöin kulma $\gamma = \angle CAD = 70^\circ - \beta \approx 37{,}92111^\circ$ ja kulma $\delta = \angle ACD = 180^\circ - 55^\circ - \gamma \approx 87{,}07889^\circ$. Jos AD:n pituus on x m ja CD:n y m, on $\dfrac{\sin\delta}{x} = \dfrac{\sin 55^\circ}{d}$, josta $x = d\dfrac{\sin\delta}{\sin 55^\circ} \approx 225{,}66$. Vastaavasti $\dfrac{\sin\gamma}{y} = \dfrac{\sin 55^\circ}{d}$, josta $y = d\dfrac{\sin\gamma}{\sin 55^\circ} \approx 138{,}86$.

Vastaus: Neljäs kulma on 55°. Kahden muun sivun pituudet ovat 226 m ja 139 m.

8. Jos taso leikkaa xy-tason pitkin suoraa $x - y = 2$, on sen yhtälö muotoa $x - y + cz = 2$. Jotta taso kulkisi pisteen $(1,1,1)$ kautta, on oltava $1 - 1 + c = 2$ eli $c = 2$. Tason yhtälö on siis $x - y + 2z = 2$ eli $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z = 1$.

Vastaus: Yhtälö on $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z = 1$.

9. Olkoon AB kartion korkeusjana ja AC kartion sivujana. Pallo sivuaa sivujanaa pisteessä D. Kolmiot ABC ja ADO, missä O on pallon keskipiste, ovat yhdenmuotoiset. Sen vuoksi $\dfrac{R}{r} = \dfrac{h-R}{\sqrt{h^2+r^2}}$ eli $R\sqrt{h^2+r^2} = hr - rR$. Tästä ratkeaa pallon säde, $R = \dfrac{hr}{r + \sqrt{h^2+r^2}}$. Edelleen, kun r on vakio, on $\lim_{h\to\infty} R = \lim_{h\to\infty} \dfrac{r}{r/h + \sqrt{1 + (r/h)^2}} = \dfrac{r}{0 + \sqrt{1+0}} = r$ ja kun h on vakio, on $\lim_{r\to\infty} R = \lim_{r\to\infty} \dfrac{h}{1 + \sqrt{(h/r)^2 + 1}} = \dfrac{h}{1 + \sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}h$.

10. Olkoon poikien syntymistodennäköisyys p ja tyttöjen t. Olkoon A tapahtuma "ainakin yksi tyttö" ja B "neljä tyttöä" Tällöin $P(A\cap B) = t^4$ ja $P(A) = 1 - p^4$. Jos tiedetään, että ainakin yksi lapsi on tyttö, on todennäköisyys sille, että kaikki ovat tyttöjä $P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Olkoon sitten C tapahtuma "ainakin kaksi tyttöä" ja D "kaksi poikaa". Tällöin $P(C\cap D) = 6p^2t^2$ ja $P(C) = 1 - p^4 - 4p^3t$. Jos tiedetään, että ainakin kaksi lapsista on tyttöjä, on todennäköisyys sille, että perheessä on kaksi poikaa $P(D|C) = \dfrac{P(C\cap D)}{P(C)}$.

Oletetaan ensin, että $p = t = \frac{1}{2}$. Tällöin $P(A\cap B) = \frac{1}{16}$ ja $P(A) = \frac{15}{16}$, joten $P(B|A) = \frac{1}{16}\cdot\frac{16}{15} = \frac{1}{15}$. Edelleen, $P(C\cap D) = \frac{6}{16}$ ja $P(C) = \frac{11}{16}$, joten $P(D|C) = \frac{6}{16}\cdot\frac{16}{11} = \frac{6}{11}$. Oletetaan sitten, että $p = 0{,}51$ ja $t = 0{,}49$. Tällöin $P(A\cap B) = 0{,}057688$ ja $P(A) = 0{,}932348$, joten $P(B|A) = 0{,}061831$. Edelleen, $P(C\cap D) = 0{,}374700$ ja $P(C) = 0{,}672352$, joten $P(D|C) = 0{,}557298$.

Vastaus: Todennäköisyydet ovat kysytyssä järjestyksessä $\frac{1}{15}$, $\frac{6}{11}$, 0,06183 ja 0,55730.

11. Yhtälöstä $2x^2 + y^2 = 6$ saadaan, että $y = \pm\sqrt{6-2x^2}$. Koska $y(1) = -2$, on kysytty funktio $y = y(x) = -\sqrt{6-2x^2}$. Sen derivaatta on $y'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{6-2x^2}}$, joten $y'(1) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$. Pisteeseen $(1, -2)$ asetetun funktion kuvaajan tangentin yhtälö on $y + 2 = x - 1$ eli $y = x - 3$. Tämä leikkaa x-akselin pisteessä $x = 3$.

Vastaus: Tangentin yhtälö on $y = x - 3$ ja se leikkaa x-akselin pisteessä $x = 3$.

12. Lukujonojen (x_n) ja (y_n) jäsenet ovat muotoa $x_n = xp^{n-1}$ ja $y_n = yq^{n-1}$. Tällöin tulojonon (z_n) jäsenet ovat muotoa $z_n = x_n y_n = xyp^n q^n$. Kahden peräkkäisen jäsenen suhde on $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = pq$. Tämä ei riipu indeksistä n, joten jono on geometrinen suhdeluvulla pq.

Jos (x_n) suppenee, on $|p| < 1$ ja jos (y_n) hajaantuu, on $|q| \geq 1$. Tulojono (z_n) on suppeneva, jos $|pq| < 1$. Näin käy esimerkiksi, kun $p = \frac{1}{4}$ ja $q = 2$, jolloin $|pq| = \frac{1}{2}$.

13. Ympyränkaaren yhtälö on muotoa $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$, missä (x_0, y_0) on keskipiste ja r säde. Koska pisteet $(2,0)$ ja $(-2,0)$ ovat kaarella, on $(2 - x_0)^2 + y_0^2 = r^2 = (-2 - x_0)^2 + y_0^2$. Tästä saadaan, että $-4x_0 = 4x_0$ eli $x_0 = 0$. Pisteiden $(2,0)$ ja $(0,1)$ etäisyydet keskipisteestä $(0, y_0)$ ovat molemmat säteitä. Näin ollen $2^2 + y_0^2 = r^2 = (1 - y_0)^2$. Tästä saadaan $4 = -2y_0 + 1$ eli $y_0 = -\frac{3}{2}$. Säde on silloin $r = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$. Ympyrän yhtälö on siis $x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$. Ratkaistaan tästä y, $y = \pm\sqrt{\frac{25}{4} - x^2} - \frac{3}{2}$. Koska tarkasteltava kaari kulkee pisteen $(0,1)$ kautta, vain $+$-merkki kelpaa. Kaaren yhtälö on siten $y = \sqrt{\frac{25}{4} - x^2} - \frac{3}{2}$. Kun kaari pisteiden $(-2,0)$ ja $(2,0)$ välillä pyrähtää x-akselin ympäri, syntyy pyörähdyspinta. Sen rajaaman kappaleen tilavuus on $V = \pi \int_{-2}^{2} (\sqrt{\frac{25}{4} - x^2} - \frac{3}{2})^2\, dx$.

14. Funktio $y(x) = \dfrac{(x-a)^2 - 1}{(x-a)} = x - a - \dfrac{1}{x-a}$. Sen derivaatta on $y'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-a)^2}$. Näin ollen $y^2(x) = (x-a)^2 + \dfrac{1}{(x-a)^2} - 2$ ja $y'(x)^2 = 1 + \dfrac{2}{(x-a)^2} + \dfrac{1}{(x-a)^4}$. Siis $(y(x)^2 + 4)(y'(x) - 1) = (x - a + \dfrac{1}{x-a})^2 \cdot \dfrac{1}{(x-a)^2} = (1 + \dfrac{1}{(x-a)^2})^2 = y'(x)^2$. Tästä näkyy, että $y(x)$ on differentiaaliyhtälön ratkaisu kaikilla vakion a reaaliarvoilla.

Jotta olisi $y(1) = 2$, on oltava $1 - a - \dfrac{1}{1-a} = 2$ eli $(1-a)^2 - 1 = 2(1-a)$. Sievennettynä yhtälö saa muodon $a^2 = 2$, jonka ratkaisut ovat $a = \pm\sqrt{2}$.

15. Neljän osavälin Simpsonin sääntö välillä [0,4] askelpituudella $h = 1$ on $\int_0^4 f(x)dx \approx \frac{1}{3}(f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4))$. Kun integroitava funktio $f(x) = x^2$, saadaan $\int_0^4 x^2 dx \approx \frac{1}{3}(0{+}4{+}8{+}36{+}16) = \frac{64}{3}$. Integraalin tarkka arvo on $\int_0^4 x^2 dx = \Big/_{0}^{4} \frac{1}{3}x^3 = \frac{64}{3}$. Simpsonin säännön antama tulos on siis tässä tapauksessa tarkka.

Smpsonin säännön virhetermi on $E_n = -\dfrac{(b-a)^5 f^{(4)}(t)}{180n^4}$. Virhetermi häviää, jos $f^{(4)}(t) = 0$ kaikilla arvoilla t. Jos f on polynomi, näin tapahtuu silloin, kun polynomin aste on korkeintaan kolme.