



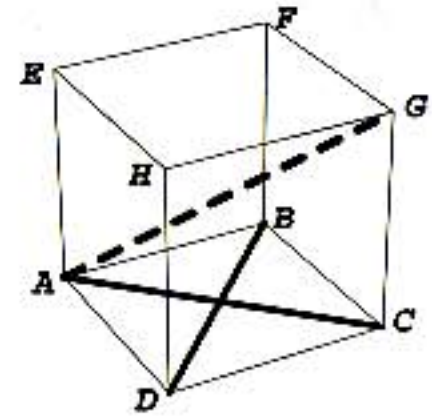
Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (★) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

- Ratkaise yhtälö  $7x^2 - 6x = 0$ .
  - Ratkaise epäyhtälö  $|3x - 2| < 4$ .
  - Sievennä lauseke  $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$  ( $a > 0$ ).
- Laske integraali  $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + 2x^2) dx$ .
  - Määritä funktion  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  derivaatta  $f'(1)$ .
  - Sievennä lauseke  $e^{2 \ln x} - 2x^2$ .
- Merivettä, jossa on 4,0 painoprosenttia suolaa, haihdutetaan altaassa, kunnes sen massa on vähentynyt 28 %. Mikä on suolapitoisuus haihduttamisen jälkeen? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.
  - Mikä on vuotuinen korkoprosentti, jos tilille talletettu rahamäärä kasvaa korkoa korolle 1,5-kertaiseksi 10 vuodessa? Lähdeveroa ei oteta huomioon. Anna vastaus prosentin sadasesosan tarkkuudella.
- Määritä jokin pisteiden  $A = (2, 3, 6)$  ja  $B = (4, -7, -3)$  kautta kulkevan suoran suuntavektori ja muodosta suoran parametriesitys. Määritä suoran ja  $xy$ -tason leikkauspiste.
- Laske suorien  $x + y = 1$ ,  $x + y = 6$ ,  $x - 3y = 1$  ja  $x - 3y = -4$  väliin jäävän alueen pinta-ala.
- Ratkaise epäyhtälö  $\frac{x^2 + 7x + 2}{x - 3} > 1$ .
- Suoran ympyräpohjaisen kartion sisään asetetaan tilavuudeltaan suurin mahdollinen suora ympyräpohjainen lieriö, jonka akseli on kartion akselilla, pohjista toinen on kartion pohjalla ja toisen kehä koskettaa kartion vaippaa. Kartion korkeus on 6 pituusyksikköä ja pohjan säde on  $r$ . Määritä lieriön korkeus.
- Satunnaismuuttuja  $X$  saa arvoja väliltä  $[0, 1]$ , ja sen tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{2}$$

Määritä vakio  $a$ . Millä todennäköisyydellä  $X$  on välillä  $[0, \frac{1}{2}]$ ?

9. Laske kuution avaruoslävistäjän  $AG$  ja sivutahkon lävistäjän  $AC$  suuntien välinen kulma  $0,1$  asteen tarkkuudella. Laske edelleen avaruoslävistäjän  $AG$  ja sivutahkon lävistäjän  $BD$  suuntien välinen kulma.



10. Jonon  $(a_n)$  termit ovat muotoa  $a_n = \frac{2n-2}{n+1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Osoita, että kaikille termeille pätee  $a_n < 2$  ja  $a_{n+1} > a_n$ . Määritä raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
11. Olkoon  $f$  funktio, jolla on seuraavat ominaisuudet:  $f(x+y) = f(x)f(y)$  kaikilla reaaliluvuilla  $x$  ja  $y$ ,  $f(0) = 1$  ja  $f$  on derivoituva muuttujan arvolla  $0$ . Osoita erotusosamäärää käyttäen, että  $f$  on derivoituva kaikkialla ja että  $f'(x) = f'(0)f(x)$ . Anna esimerkki funktiosta, joka toteuttaa nämä ehdot.
12. Laske integraalin  $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$  tarkka arvo. Laske sille myös viisidesimaalinen likiarvo puolisuunnikassäännöllä käyttämällä neljää jakoväliä. Mikä on likiarvon suhteellinen virhe prosentteina?
13. Olkoon  $n$  alkuluku sekä  $x$  ja  $y$  kokonaislukuja. Osoita, että

$$x^n + y^n \equiv (x+y)^n \pmod{n}.$$

- ★14. Olkoon  $P_n(x) = \sum_{i=1}^n x^i$  välillä  $-1 < x < 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .
- a) Perustele, miksi raja-arvo  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$  on olemassa välillä  $-1 < x < 1$ . Määritä  $f(x)$ .
- b) Johda ja sievennä erotuksen  $P_n(x) - f(x)$  itseisarvon lauseke.
- c) Kuinka suuri on polynomin  $P_n(x)$  asteluvun  $n$  vähintään oltava, jotta

$$|P_n(-0,5) - f(-0,5)| \leq 0,01?$$

- ★15. a) Olkoon  $a > 0$ ,  $b > 0$  ja  $0 < p < 2$ . Näytä, että  $pab < a^2 + b^2$ . (3 pistettä)
- b) Osoita, että jos suorakulmaisella kolmiolla ja neliöllä on sama pinta-ala, niin kolmion piiri on pidempi kuin neliön piiri. (6 pistettä)

Pitkä matematiikka 16.3.2007, ratkaisut:

1. a)  $7x^2 - 6x = 0 \iff x(7x - 6) = 0 \iff x = 0$  tai  $x = \frac{6}{7}$ .
- b)  $|3x - 2| < 4 \iff -4 < 3x - 2 < 4$ . Nyt  $-4 < 3x - 2 \iff 3x > -2 \iff x > -\frac{2}{3}$  ja  $3x - 2 < 4 \iff 3x < 6 \iff x < 2$ . Epäyhtälön ratkaisu on siis  $-\frac{2}{3} < x < 2$ .
- c)  $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{a^{3/2}} = (a^{3/2})^{1/3} = a^{1/2} = \sqrt{a}$ .
2. a)  $\int_0^{1/2} (1 + 2x^2) dx = \int_0^{1/2} x + \frac{2}{3}x^3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$ .
- b)  $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . Siis  $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- c)  $e^{2 \ln x} - 2x^2 = e^{\ln x^2} - 2x^2 = x^2 - 2x^2 = -x^2$ .
3. a) Jos merivettä on  $100a$ , on siinä vettä  $96a$  ja suolaa  $4a$ . Haihdutuksen jälkeen jäljellä on vettä  $96a - 28a = 68a$  ja suolaa edelleen  $4a$  eli yhteensä  $72a$  merivettä. Sen suolaprosentti on nyt  $100 \cdot \frac{4a}{72a} = \frac{50}{9} \approx 5,5556$ . Vastaus: 5,6 %.
- b) Jos korkoprosentti on  $p$ , on korkotekijä  $q = 1 + p/100$ . Tehtävän mukaan rahamäärän  $a$  kasvulle pätee  $q^{10}a = 1,5a$  eli  $q^{10} = 1,5$ . Tästä saadaan  $q = \sqrt[10]{1,5} \approx 1,04138$ , josta edelleen  $p = 100(q - 1) \approx 4,138$ . Vastaus: 4,14 %.
4. Pisteiden  $A$  ja  $B$  paikkavektorit ovat  $\overline{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$  ja  $\overline{OB} = 4\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}$ . Kysytty suuntavektori on  $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 2\vec{i} - 10\vec{j} - 9\vec{k}$ . Suoran pisteen  $P$  paikkavektori on  $\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{AB} = (2 + 2t)\vec{i} + (3 - 10t)\vec{j} + (6 - 9t)\vec{k}$ . Suoran parametriesitys on siten  $x = 2 + 2t$ ,  $y = 3 - 10t$ ,  $z = 6 - 9t$ .
- Suora leikkaa  $xy$ -tason, kun  $z = 0$  eli kun  $6 - 9t = 0$ . Näin tapahtuu, kun  $t = \frac{2}{3}$ . Leikkauspisteen koordinaatit ovat  $x = 2 + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$  ja  $y = 3 - 10 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{11}{3}$ .
- Vastaus: Parametriesitys on  $x = 2 + 2t$ ,  $y = 3 - 10t$ ,  $z = 6 - 9t$  ja leikkauspiste  $(\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, 0)$ .
5. Suorien  $x + y = 1$  ja  $x - 3y = 1$  leikkauspiste saadaan yhtälöparista  $x + y = 1$ ,  $x - 3y = 1$ , jonka ratkaisu on  $x = 1$ ,  $y = 0$ . Näin jatkamalla nähdään, että suora  $x + y = 1$  leikkaa suoria  $x - 3y = 1$  ja  $x - 3y = -4$  pisteissä  $A = (1, 0)$  ja  $B = (-\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ . Samoin nähdään, että suora  $x + y = 6$  leikkaa suoria  $x - 3y = 1$  ja  $x - 3y = -4$  pisteissä  $D = (\frac{19}{4}, \frac{5}{4})$  ja  $C = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$ . Vaakasuora jana  $DE$  jakaa tarkasteltavan nelikulmion  $ABCD$  kahteen kolmioon. Kolmion  $ABD$  ala on  $\frac{1}{2} \cdot (\frac{19}{4} - (-\frac{1}{4})) \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{8}$ , ja kolmion  $BCD$  ala  $\frac{1}{2} \cdot (\frac{19}{4} - (-\frac{1}{4})) \cdot (\frac{5}{2} - \frac{5}{4}) = \frac{25}{8}$ . Kysytyn nelikulmion  $ABCD$  ala on siis  $\frac{25}{8} + \frac{25}{8} = \frac{25}{4}$ .
- Vastaus:  $\frac{25}{4}$ .
6. Kun  $x > 3$ , saadaan epäyhtälö muotoon  $x^2 + 7x + 2 > x - 3$  eli  $x^2 + 6x + 5 > 0$ . Vasemman puolen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Sen nollakohdat ovat  $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = -3 \pm 2$  eli  $x = -5$  ja  $x = -1$ . Näin ollen  $x^2 + 6x + 5 > 0$ , kun  $x < -5$  tai  $x > -1$ . Alueessa  $x > 3$  on siis  $x^2 + 6x + 5 > 0$  kaikilla arvoilla  $x$ .
- Kun  $x < 3$ , saadaan epäyhtälö muotoon  $x^2 + 7x + 2 < x - 3$  eli  $x^2 + 6x + 5 < 0$ . Edellisen mukaan  $x^2 + 6x + 5 = 0$ , kun  $x = -5$  ja  $x = -1$ . Näin ollen alueessa  $x < 3$  on  $x^2 + 6x + 5 < 0$ , kun  $-5 < x < -1$ .

**Vastaus:** Kun  $-5 < x < -1$  tai  $x > 3$ .

7. Leikataan kartiota sen akselin kautta kulkevalla tasolla. Olkoon leikkauskuviossa  $A$  pohjaympyrän keskipiste ja  $r = AC$  säde sekä  $B$  kartion huippu. Olkoon vielä  $x = AD$  lieriön korkeus,  $0 < x < 6$  ja  $s = ED$  lieriön säde. Yhdenmuotoisista kolmioista  $ABC$  ja  $DBE$  saadaan verranto  $\frac{6}{r} = \frac{6-x}{s}$ , josta edelleen  $s = r - \frac{1}{6}rx$ . Lieriön tilavuus  $V = \pi s^2 x$  on  $x$ :n funktiona  $V(x) = \pi r^2 (1 - \frac{1}{6}x)^2 x = \pi r^2 (x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36}x^3)$ . Tämän derivaatta on  $V'(x) = \pi r^2 (1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}x^2) = \frac{1}{12}\pi r^2 (x^2 - 8x + 12)$ . Derivaatta häviää, kun  $x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = 4 \pm 2$  eli kun  $x = 2$  tai  $x = 6$ . Näistä vain edellinen on tarkastelualueella. Koska  $V'(x) > 0$ , kun  $0 < x < 2$  ja  $V'(x) < 0$ , kun  $2 < x < 6$ , saavuttaa lieriön tilavuus suurimman arvonsa, kun  $x = 2$ .

**Vastaus:** Lieriön korkeus on 2.

8. Jotta  $f$  olisi tiheysfunktio, on oltava  $f(x) \geq 0$ , kun  $0 \leq x \leq 1$  sekä  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ .  
 Nyt  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (\frac{1}{a}x + \frac{a}{2}) dx = \int_0^1 \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}x = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + a)$ . Integraalin arvo on 1, jos  $\frac{1}{a} + a = 2 \iff a^2 - 2a + 1 = 0 \iff (a-1)^2 = 0 \iff a = 1$ .  
 Arvolla  $a = 1$  on  $f(x) = x + \frac{1}{2} > 0$ , kun  $0 \leq x \leq 1$ . Näin ollen  $f(x)$  on tiheysfunktio, kun  $a = 1$ .

Todennäköisyys, että  $X$  on välillä  $[0, \frac{1}{2}]$  on  $\int_0^{1/2} (x + \frac{1}{2}) dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ .

**Vastaus:**  $a = 1$  ja todennäköisyys on  $\frac{3}{8}$ .

9. Olkoon kuution sivun pituus  $a$ . Sijoitetaan kuutio koordinaatistoon siten, että  $A = (0, 0, 0)$ ,  $D = (a, 0, 0)$ ,  $B = (0, a, 0)$  ja  $E = (0, 0, a)$ . Tällöin  $\overline{AC} = a\vec{i} + a\vec{j}$ ,  $|\overline{AC}| = a\sqrt{2}$  ja  $\overline{AG} = a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}$ ,  $|\overline{AG}| = a\sqrt{3}$ . Näiden väliselle kulmalle  $\alpha$  saadaan  $\cos \alpha = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AG}}{|\overline{AC}||\overline{AG}|} = \frac{a^2 + a^2}{a^2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \approx 0,8164966$ , joten  $\alpha \approx 35,26439^\circ$ .

Vektori  $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = a\vec{i} - a\vec{j}$ . Koska  $\overline{AG} \cdot \overline{BD} = a^2 - a^2 = 0$ , on vektoreiden välinen kulma  $\beta = 90^\circ$ .

**Vastaus:** Kysytyt kulmat ovat  $35,3^\circ$  ja  $90^\circ$ .

10. Yleinen termi  $a_n = \frac{2n-2}{n+1} = 2 \cdot \frac{n-1}{n+1} < 2$ , koska  $\frac{n-1}{n+1} < 1$ .  
 $a_{n+1} - a_n = 2(\frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1}) = 2 \cdot \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0$ .  
 Näin ollen aina  $a_{n+1} > a_n$ .

Lopulta  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2$ , sillä  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

11. Koska  $f$  on derivoituva arvolla 0, on olemassa  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$ .  
 Pisteessä  $x$  on  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - 1}{h} = f(x) \frac{f(h) - f(0)}{h}$ .  
 Näin ollen on olemassa  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)f'(0)$ . Siis  $f$  on derivoituva kaikkialla ja  $f'(x) = f(x)f'(0)$ .

Esimerkiksi funktio  $f(x) = e^x$  täyttää tehtävän ehdot:  $f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$ ,  $f(0) = e^0 = 1$  ja  $f$  on derivoituva arvolla 0.

12.  $\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \int_1^3 \ln x = \ln 3 \approx 1,098612.$

Puolisuunnikkasääntö funktiolle  $f(x)$  välillä  $[1, 3]$  käyttäen neljää jakoväliä on  $S(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}f(1) + f(\frac{3}{2}) + f(2) + f(\frac{5}{2}) + \frac{1}{2}f(3))$ . Kun  $f(x) = \frac{1}{x}$ , on  $S(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}) = \frac{67}{60} \approx 1,116667$ . Siis  $\int_1^3 \frac{1}{x} dx \approx \frac{67}{60} \approx 1,11667$ .

Likiarvon suhteellinen virhe prosentteina on  $100 \cdot \frac{\frac{67}{60} - \ln 3}{\ln 3} \approx 1,643$  eli 1,64 %.

13. Jos  $n$  on alkuluku ja  $z$  kokonaisluku, joka ei ole jaollinen  $n$ :llä, on Fermatin pienen lauseen mukaan  $z^{n-1} = 1 \pmod{n}$  eli  $z^n = z \pmod{n}$ . Jos taas  $z$  on jaollinen  $n$ :llä, on olemassa kokonaisluku  $k$  siten, että  $z = kn$ . Tällöin  $z^n - z = (kn)^n - kn = n(n^{n-1}k - k)$  eli  $z^n = z \pmod{n}$ . Siis kun  $n$  on alkuluku ja  $z$  kokonaisluku, on  $z^n = z \pmod{n}$ .

Jos nyt  $n$  on alkuluku ja  $x, y$  kokonaislukuja, niin edellisen mukaan

$(x+y)^n = x+y \pmod{n} = x^n \pmod{n} + y^n \pmod{n} = x^n + y^n \pmod{n}$ , mikä piti todistaa.

\*14. a)  $P_n(x) = \sum_{i=1}^n x^i$  on geometrinen summa, jonka ensimmäinen termi on  $x$  ja suhdeluku  $q = x$ . Näin ollen summa on  $P_n(x) = x \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ . Kun  $-1 < x < 1$ , on  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ , joten on olemassa  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ . On osoitettu, että välillä  $-1 < x < 1$  on olemassa raja-arvo  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \frac{x}{1-x}$ .

b) Edellisen mukaan  $|P_n(x) - f(x)| = |x| \cdot \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$ .

c) Edellisen mukaan  $|P_n(-0,5) - f(-0,5)| \leq 0,01$ , kun  $\frac{|-0,5|^{n+1}}{1+0,5} \leq 0,01$  eli  $(0,5)^{n+1} \leq 0,015$ . Tästä saadaan ehdoksi  $(n+1) \ln 0,5 \leq \ln 0,015$  eli  $n+1 \geq \frac{\ln 0,015}{\ln 0,5} \geq 6,05$  eli  $n \geq 6$ . Asteluvun on siis oltava vähintään 6.

\*15. a) Jos  $a > 0, b > 0$ , on  $0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ , joten  $2ab \leq a^2 + b^2$ . Koska  $p < 2$ , on  $pab < 2ab$ . Siis  $pab < a^2 + b^2$ , mikä piti todistaa.

b) Olkoon suorakulmaisen kolmion kateetit  $a$  ja  $b$  sekä neliön sivu  $c$ . Tällöin kolmion kolmas sivu on  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Koska pinta-alat ovat samat, on  $\frac{1}{2}ab = c^2$ , josta saadaan  $c = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$ . Väite on nyt  $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} > 4c$  eli  $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} > 2\sqrt{2ab}$  eli  $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} - 2\sqrt{2ab} > 0$ .

Koska  $b > 0$ , on  $\sqrt{a^2 + b^2} > a$ . Näin ollen  $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} - 2\sqrt{2ab} > 2a + b - 2\sqrt{2ab} = (\sqrt{2a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ . Siis  $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} > 4c$ , mikä piti todistaa.