Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Ratkaise yhtälö $2x + 1 = x^2 + 2x$.

b) Ratkaise yhtälöryhmä $2x + y = 1, x - y = 0$.

c) Kumpi luvuista $\frac{5}{7}$ ja $\frac{6}{9}$ on suurempi? Perustele ratkaisusi likiarvoja käyttämättä esimerkiksi muodostamalla lukujen erotus.

2. a) Ratkaise yhtälö $5x - (1 - x) = 13x$.

b) Määritä lukujen 7, 3, 6, 3, 5, 3, 1 mediaani ja keskiarvo.

c) Sievennä lauseke $\dfrac{a+3}{a} : \dfrac{3a+9}{2a}$.

3. a) Lasketteluринteen kaltevuuskulma on 7,0 astetta ja rinteen korkeusero 180 metriä. Kuinka pitkä rinne on? Kuinka kauan kestää hiihtohissillä matka rinnettä pitkin alhaalta ylös, kun hiihtohissin nopeus on 6 km/h?

b) Suora kulkee pisteiden $(1, 0)$ ja $(3, 3)$ kautta. Kuinka suuren kulman se muodostaa x-akselin positiivisen suunnan kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

4. Kumiputken ulkohalkaisija on 53 mm ja seinämän paksuus 4 mm. Kuinka pitkä putken on oltava, jotta putkeen mahtuisi 3,0 litraa vettä?

5. Kännykkäliittymän A kuukausimaksu on 4 euroa ja puhelumaksu 0,09 euroa minuutilta. Kännykkäliittymässä B ei ole kuukausimaksua, mutta puhelumaksu on 0,12 euroa minuutilta. Määritä kuukausilaskun suuruus kummassakin tapauksessa lausekkeena, jossa muuttujana on puheaika minuutteina. Millä puheajalla liittymien A ja B kuukausilaskut ovat yhtä suuret?

6. Äänilähteen tuottaman äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen äänilähteen etäisyyden neliöön. Festareilla Miisa istui aluksi 50 metrin päässä orkesterista, mutta siirtyi sitten 15 metrin päähän orkesterista. Kuinka monta prosenttia kasvoi äänen intensiteetti?

7. Pallo heitetään hetkellä $t = 0$. Sen lentokorkeus metreinä saadaan lausekkeesta $-0{,}15t^2 + 2{,}4t + 1{,}8$, missä t on aika sekunneissa. Kuinka korkealla pallo käy? Millä aikavälillä sen lentorata on laskeva?

8. Kulhossa on viisi punaista ja kymmenen mustaa palloa. Kulhosta poimitaan umpimähkään viisi palloa palauttamatta yhtäkään. Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi poimituista palloista on punainen? Millä todennäköisyydellä kaikki viisi ovat samanvärisiä?

KÄÄNNÄ!

9. Lomapaketin hinta koostui hotelli- ja matkakustannuksista. Hotellikustannukset laskivat 5 % ja matkakustannukset nousivat 18 %. Muutosten jälkeen lomapaketin hinta oli sama kuin aikaisemminkin. Kuinka monta prosenttia matkakustannukset olivat lomapaketin hinnasta ennen muutoksia?

10. Kolmannen asteen polynomifunktiolla $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ on paikallinen minimi -2 kohdassa $x = 0$ ja paikallinen maksimi 1 kohdassa $x = 2$. Määritä kertoimet a, b, c ja d.

11. Isoisä avasi vuoden 2006 alussa lapsenlastaan varten tilin, jonka vuotuinen korkoprosentti lähdeveron vähentämisen jälkeen on 1,750, ja talletti tilille 700 euroa. Isoisä jatkaa seuraavina vuosina tallettamalla saman summan. Korko lisätään vuosittain tilin saldoon vuoden viimeisenä päivänä. Kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden 2010 lopussa koron lisäyksen jälkeen? Muodosta ja sievennä lauseke, joka antaa tilin saldon vuoden lopussa, kun talletus on tehty n kertaa. Minkä vuoden lopussa rahaa on vähintään 12 000 euroa?

12. Taiteilija suunnittelee taideteoksen, joka koostuu suoran ympyrälieriön muotoisesta vesialtaasta sekä siihen sijoitetusta kivikuutiosta, jonka pohjaneliö lepää altaan vaakasuoralla pohjalla. Tilasyistä altaan halkaisijaksi valitaan 3,5 metriä, mutta altaan syvyyden ja kuution koon taiteilija saa valita vapaasti. Hän haluaa kuution ylätahkon olevan samassa tasossa kuin vedenpinta. Vettä altaassa pitää olla mahdollisimman paljon. Mikä on veden syvyys näillä ehdoilla? Anna vastaus desimetrin tarkkuudella.

13. Piirrä funktioiden $x^3 - 2x$ ja $-x+3$ kuvaajat samaan koordinaatistoon. Etsi yhtälön $x^3 - 2x = -x+3$ juuri haarukoimalla. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

14. Vuoden 2002 alussa Liisa talletti 1 000 euroa tilille, jonka vuotuinen korko oli 1,5 prosenttia. Kuinka suuri talletus korkoineen oli viisi vuotta myöhemmin? Korkotulon lähdevero oli 1.1.2005 lähtien 28 prosenttia ja sitä ennen 29 prosenttia. Mikä oli talletuksen reaaliarvon muutos prosentteina? Vuoden 2002 alussa elinkustannusindeksi oli 1548 ja viisi vuotta myöhemmin 1632.

15. Ratkaise joko kohta **A** tai kohta **B***:

A) Lukion 325 opiskelijasta 65 opiskelee espanjaa. Arvalla valitaan 32 opiskelijan ryhmä. Kuinka suuri on todennäköisyys, että ryhmän jäsenistä 12 opiskelee espanjaa? Entä mikä on todennäköisyys, että tässä 32 opiskelijan ryhmässä korkeintaan 3 opiskelee espanjaa? Approksimoi binomijakaumaa normaalijakaumalla ja laske todennäköisyys sille, että edellä kuvatussa ryhmässä on vähintään 13 espanjan opiskelijaa.

B) Suunnikkaan $ABCD$ kärki A on pisteessä $(-3, 7)$ ja sen pisteestä A lähtevinä sivuina ovat vektorit $\overrightarrow{AB} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ ja $\overrightarrow{AD} = \bar{i} + 5\bar{j}$. Määritä pisteiden B, C ja D paikkavektorit. Kuinka suuri on lävistäjävektoreiden $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{DB}$ välinen kulma? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

---

* Tehtävät 15A ja 15B ovat keskenään vaihtoehtoisia. Tehtävä 15A on laadittu vanhojen, vuoden 1994 lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan, tehtävä 15B uusien, vuonna 2005 käyttöön otettujen lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan. Kumpaan tahansa tehtävään saa vastata.

Lyhyt matematiikka 12.3.2008, ratkaisut:

1. a) $2x+1=x^2+2x \iff x^2=1 \iff x=\pm 1$.

   b) Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan $3x=1$ eli $x=\frac{1}{3}$. Edelleen, $y=x=\frac{1}{3}$.

   c) $\frac{5}{7}-\frac{6}{9}=\frac{45}{63}-\frac{42}{63}=\frac{3}{63}>0$. Siis $\frac{5}{7}>\frac{6}{9}$.

   Vastaus: a) $x=\pm 1$, b) $x=y=\frac{1}{3}$, c) $\frac{5}{7}>\frac{6}{9}$.

2. a) $5x-(1-x)=13x \iff 6x-1=13x \iff 7x=-1 \iff x=-\frac{1}{7}$.

   b) Luvut ovat suuruusjärjestyksessä 1, 3, 3, 3, 5, 6, 7. Mediaani on 3. Keskiarvo on $\dfrac{1+3+3+3+5+6+7}{7}=4$.

   c) $\dfrac{a+3}{a}:\dfrac{3a+9}{2a}=\dfrac{a+3}{a}\cdot\dfrac{2a}{3(a+3)}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a(a+3)}{a(a+3)}=\dfrac{2}{3}$.

   Vastaus: a) $x=-\frac{1}{7}$, b) mediaani 3, keskiarvo 4, c) $\frac{2}{3}$.

3. a) Jos rinteen pituus on x metriä, on $\dfrac{180}{x}=\sin 7^\circ$, josta $x=\dfrac{180}{\sin 7^\circ}\approx 1476{,}99$. Hiihtohissin nopeus on 6 km/h = 100 m/min. Hiihtohissillä matka kestää $\dfrac{x}{100}$ min $\approx$ 14 min 46 s.

   b) Suoran suuntakulmalle α pätee: $\tan\alpha=\frac{3-0}{3-1}=\frac{3}{2}$. Tästä saadaan $\alpha\approx 56{,}310^\circ$.

   Vastaus: a) Rinne 1480 m, hissimatka kestää 14 min 50 s. b) $56{,}3^\circ$.

4. Kumiputken sisäsäde on $\frac{53}{2}-4$ mm $=22{,}5$ mm $=2{,}25$ cm. Jos putken pituus on x cm, on $\pi 2{,}25^2x=3000$, josta $x=\dfrac{3000}{\pi 2{,}25^2}\approx 188{,}628$.

   Vastaus: 189 cm.

5. Jos x on puheaika minuutteina, kuukausilasku on A liittymässä $4+0{,}09x$ (euroa) ja B liittymässä $0{,}12x$ (euroa). Kun laskut ovat yhtäsuuret, on $4+0{,}09x=0{,}12x$, josta $x=\dfrac{4}{0{,}03}=133\frac{1}{3}$ (min) = 2 h 13 min 20 s.

6. Jos äänen intensiteetti oli aluksi x ja sitten y, oli $\dfrac{y}{x}=(\dfrac{50}{15})^2=\dfrac{100}{9}$. Kysytylle prosenttiluvulle p pätee $1+\dfrac{p}{100}=\dfrac{100}{9}$, josta $p=1011\frac{1}{9}$.

   Vastaus: Intensiteetti kasvoi 1010 %.

7. Alaspäin aukeavan paraabelin $h(t)=-0{,}15t^2+2{,}4t+1{,}8$ ylin piste löytyy derivaatan nollakohdasta. Derivaatta $h'(t)=-0{,}30t+2{,}4$ häviää, kun $t=\frac{2{,}4}{0{,}3}=8$. Korkein piste on $h(8)=-0{,}15\cdot 8^2+2{,}4\cdot 8+1{,}8=11{,}4$ (m). Lentorata laskee korkeimman pisteen jälkeen kunnes $h(t)=0$ eli $-0{,}15t^2+2{,}4t+1{,}8=0$. Näin on, kun $t=\dfrac{-2{,}4\pm\sqrt{5{,}76+1{,}08}}{-0{,}30}\approx\dfrac{2{,}4\pm 2{,}61534}{0{,}3}=16{,}7178$ (s). Negatiivinen arvo hylättiin, koska on oltava $t>0$.

   Vastaus: Pallo käy 11,4 m korkeudessa. Lentorata laskee aikavälillä 8 s - 16,7 s.

8. Viiden mustan pallon todennäköisyys $P_M = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{12}{143} \approx 0{,}083916$. Ainakin yhden punaisen pallon todennäköisyys on tämän komplementtitapaus eli on $1 - P_M = \frac{131}{143} \approx 0{,}916084$.
Viiden punaisen pallon todennäköisyys $P_P = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{3003} \approx 0{,}000333$. Viiden samanvärisen pallon todennäköisyys on $P_M + P_P = \frac{253}{3003} \approx 0{,}084249$.

Vastaus: Ainakin yksi on punainen todennäköisyydellä 0,9161. Kaikki ovat samanvärisiä todennäköisyydellä 0,0842.

9. Olkoot hotellikustannukset $100h$ ja matkakustannukset $100m$. Muutosten jälkeen hotellikustannukset ovat $95h$ ja matkakustannukset $118m$. Paketin hinnan samuudesta saadaan yhtälö $95h + 118m = 100h + 100m$, josta seuraa $h = \frac{18}{5}m$. Kysytty prosenttiluku on $100 \cdot \dfrac{100m}{100h + 100m} = \dfrac{100m}{\frac{18}{5}m + m} = \frac{500}{23} \approx 21{,}7391$.

Vastaus: 21,7 %.

10. Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ derivaatta on $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Ehdosta $f(0) = -2$ seuraa, että $d = -2$ ja ehdosta $f'(0) = 0$, että $c = 0$. Funktio on nyt $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2$ ja derivaatta $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$. Ehdosta $f'(2) = 0$ saadaan yhtälö $12a + 4b = 0$ ja ehdosta $f(2) = 1$ yhtälö $8a + 4b = 3$. Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan $4a = -3$ eli $a = -\frac{3}{4}$ ja edelleen $b = -3a = \frac{9}{4}$.

Vastaus: $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$, $c = 0$, $d = -2$.

11. Korkotekijä on $q = 1 + 0{,}01p = 1{,}0175$, kun korko $p = 1{,}750$. Talletuksen alkamisen jälkeen tilillä on rahaa ensimmäisen vuoden lopussa $700q$ euroa, toisen vuoden lopussa $700(q + q^2)$ euroa, kolmannen vuoden lopussa $700(q + q^2 + q^3)$ euroa ja yleisesti n:nen vuoden lopussa $700(q + q^2 + ... + q^n)$ euroa eli $S_n = 700q\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ euroa. Vuonna 2010 on $n = 5$ ja $S_5 = 700 \cdot 1{,}0175 \cdot \dfrac{1{,}0175^5 - 1}{0{,}0175} \approx 3688{,}094$ (euroa). Jälkimmäisen kysymyksen vastaus saadaan yhtälöstä $S_n = 700 \cdot 1{,}0175 \cdot \dfrac{1{,}0175^n - 1}{0{,}0175} = 12\,000$ eli $1{,}0175^n = \dfrac{120}{7} \cdot \dfrac{0{,}0175}{1{,}0175} + 1$. Ottamalla logaritmit saadaan $n \approx \dfrac{\ln 1{,}294840}{\ln 1{,}0175} \approx 14{,}89$. Vuosia kuluu siis 15, jolloin ollaan vuoden 2020 lopussa.

Vastaus: Vuoden 2010 lopussa rahaa on 3688,09 euroa ja vuoden 2020 lopussa rahaa on vähintään 12 000 euroa.

12. Jos lieriön pohjan säde on r ja kuution särmä x, on lieriössä olevan vesimäärän tilavuus $f(x) = \pi r^2 x - x^3$. Tämän derivaatta $f'(x) = \pi r^2 - 3x^2$. Derivaatta häviää, kun $3x^2 = \pi r^2$ eli ($x > 0$) kun $x = r\sqrt{\frac{\pi}{3}}$. Koska $f'(x) > 0$, kun $0 < x < r\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ ja $f'(x) < 0$,kun $x > r\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, antaa derivaatan nollakohta funktion suurimman arvon. Arvolla $r = 1{,}75$ m on $r\sqrt{\frac{\pi}{3}} \approx 1{,}791$ m.

Vastaus: Veden syvyys on 1,8 m.

13. Funktio $f(x) = x^3 - 2x$ on kuutioparaabeli, joka leikkaa x-akselia, kun $x = 0$ tai $x = \pm\sqrt{2}$. Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 2 = 0$, kun $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, joten $f(x)$:llä on lokaali maksimi $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1{,}09$ pisteessä $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ja lokaali minimi $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -1{,}09$ pisteessä $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Funktio $g(x) = -x + 3$ on laskeva suora, joka kulkee pisteiden $(0,3)$ ja $(3,0)$ kautta. Erityisesti $f(\sqrt{2}) < g(\sqrt{2})$, $f(3) > g(3)$ ja $f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) < g(-\sqrt{\frac{2}{3}})$. Yhtälöllä $f(x) = g(x)$ eli $h(x) = 0$, missä $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x - 3$, on funktioiden kulun perusteella tasan yksi juuri x_0, $\sqrt{2} < x_0 < 3$. Haarukoimalla saadaan $h(1{,}6) \approx -0{,}50 < 0$ ja $h(1{,}7) \approx 0{,}21 > 0$ sekä $h(1{,}65) \approx -0{,}16 < 0$. Tämän perusteella $1{,}65 < x_0 < 1{,}7$, joten yhden desimaalin tarkkuudella juuri $x_0 = 1{,}7$.

14. Ennen 1.1.2005 oli lähdeverotettu korko $p_1 = 0{,}71 \cdot 1{,}5 = 1{,}065$ ja korkotekijä $q_1 = 1+0{,}01p_1 = 1{,}01065$. 1.1.2005 jälkeen oli lähdeverotettu korko $p_2 = 0{,}72 \cdot 1{,}5 = 1{,}08$ ja korkotekijä $q_2 = 1+0{,}01p_2 = 1{,}0108$. Liisan 1000 euron talletus oli korkoineen 1.1.2005 $1000q_1^3$ ja kaksi vuotta myöhemmin eli viisi vuotta talletuksen alusta $1000q_2^2q_1^3 \approx 1054{,}709$ euroa. Talletuksen reaaliarvon muutoskerroin on $\dfrac{1548}{1632}q_2^2q_1^3 \approx 1{,}000423$, joten reaaliarvo on kasvanut 0,0423 %.

Vastaus: Talletus on korkoineen 1054,71 euroa. Sen reaaliarvo on kasvanut 0,0423 %.

15. **A)** Todennäköisyys, että lukion opiskelija opiskelee espanjaa on $p = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$. Todennäköisyys, että ryhmästä n opiskelee espanjaa on $P_n = \binom{32}{n}p^n(1-p)^{32-n}$.
Todennäköisyys, että ryhmästä 12 opiskelee espanjaa on $P_{12} \approx 0{,}01066$.
Todennäköisyys, että ryhmästä korkeintaan kolme opiskelee espanjaa on vastaavasti $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \approx 0{,}09309$.

Approksimoidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla. Nyt $n = 32$ ja $p = \frac{1}{5}$, joten keskiarvo $\mu = np = 6{,}4$ ja keskihajonta $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 2{,}2627$. Normaalijakauma on siis $N(6{,}4; 2{,}2627)$. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan $N(0,1)$ muunnoksella $z = \dfrac{x - 6{,}4}{2{,}2627}$, $z_0 = \dfrac{12{,}5 - 6{,}4}{2{,}2627} \approx 2{,}70$. Kysytty todennäköisyys on $1 - \Phi(z_0) = 0{,}0035$ eli 0,35 %.

15. **B)** Suunnikkaan paikkavektorit ovat $\overline{OA} = -3\bar{i} + 7\bar{j}$, $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = (-3+3)\bar{i} + (7+2)\bar{j} = 9\bar{j}$, $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{AD} = \bar{i} + (9+5)\bar{j} = \bar{i} + 14\bar{j}$, $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = (-3+1)\bar{i} + (7+5)\bar{j} = -2\bar{i} + 12\bar{j}$.
Lävistäjävektori $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = 4\bar{i} + 7\bar{j}$ ja $|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$. Lävistäjävektori $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ ja $|\overline{DB}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Lävistäjävektorien väliselle kulmalle α saadaan $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{DB}}{|\overline{AC}||\overline{BD}|} = \dfrac{8 - 21}{\sqrt{65}\sqrt{13}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx -0{,}447214$.
Tästä saadaan $\alpha \approx 116{,}6°$.