YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA 12.3.2008 MATEMATIIKAN KOE PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä ($\star$) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $2x^2 = x + 1$.

b) Ratkaise yhtälö $\dfrac{x}{6} - \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{5}{12}$.

c) Olkoon $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ja $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$, missä t on reaaliluku. Sievennä lauseke $x^2 + y^2$.

2. **a)** Määritä suorien $2x + y = 8$, $3x + 2y = 5$ leikkauspiste.

b) Ratkaise yhtälö $5^{5x-5} = 125$.

c) Ratkaise yhtälö $|3x - 2| = 5$.

3. **a)** Määritä derivaatta ja integraalifunktio funktioille x^n, kun $n = -4,\ -1,\ 2$.

b) Laske funktion $f(x) = \dfrac{2 + \sin x}{2 + \cos x}$ derivaatta pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$.

4. Vuonna 2007 alennettiin parturimaksujen arvonlisäveroa 22 prosentista 8 prosenttiin. Jos alennus olisi siirtynyt täysimääräisenä parturimaksuihin, kuinka monta prosenttia ne olisivat alentuneet? Arvonlisävero ilmoitetaan prosentteina verottomasta hinnasta ja se on osa tuotteen tai palvelun hintaa.

5. CD-levyllä on viisi kappaletta, ja henkilö kuuntelee levyn päivittäin yhden viikon aikana siten, että hän asettaa soittimen toistamaan kappaleet satunnaisessa järjestyksessä. Millä todennäköisyydellä kappaleet tulevat ainakin kerran kuunnelluiksi siinä järjestyksessä, jossa ne ovat levyllä?

6. Määritä parametri t siten, että vektorit $\bar{a} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$ ja $\bar{b} = 3\bar{i} + t\bar{j}$ ovat yhdensuuntaiset. Millä parametrin arvolla vektorit ovat kohtisuorat?

7. **a)** Laske paraabelien $y = x^2 - 3$ ja $y = -x^2 + 2x + 1$ leikkauspisteiden koordinaatit. **b)** Laske sen rajoitetun alueen pinta-ala, joka jää paraabelien väliin.

8. Kolmion ABC pinta-ala on 6 cm^2. Sivun AB pituus on 5 cm ja sivun AC pituus 4 cm. Määritä kolmion suurin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

9. Määritä funktion $f(x) = x + \sqrt{9 - x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$, suurin ja pienin arvo. Piirrä funktion kuvaaja.

10. Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = e^x - a|x - 1|$ on kaikkialla kasvava?

11. **a)** Määritä lukujen 154 ja 126 suurin yhteinen tekijä. **b)** Ratkaise Diofantoksen yhtälö $154x + 126y = 56$.

KÄÄNNÄ!

12. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^2 - 2^x$ on nollakohta välillä $[-1, 1]$, ja laske sille neli-desimaalinen likiarvo. Ratkaisusta tulee ilmetä, millä tavoin tulokseen on päädytty.

13. Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituvia funktioita, joille pätee $f(x) \leq g(x)$ kaikilla x. Tutki, ovatko seuraavat väitteet oikeita vai vääriä joko osoittamalla väite oikeaksi tai esittämällä sille vastaesimerkki (so. funktiot f ja g, joille väite ei päde):

a) $f'(x) \leq g'(x)$ kaikilla x; **b)** $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^x g(t)\,dt$ kaikilla $x \geq 0$.

⋆14. Olkoon $f(x) = \cos x - \sin x$.

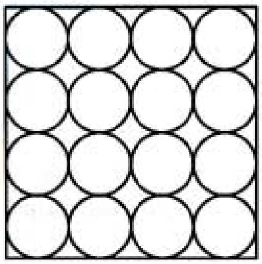
a) Laske funktion f nollakohdat välillä $[0, 2\pi]$. (2 p.)

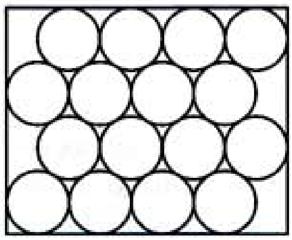
b) Millä muuttujan x arvoilla funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä $[0, 2\pi]$? (2 p.)

c) Laske $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. (2 p.)

d) Laske $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$. (3 p.)

⋆15. Viinipullon pohjan säde on r. Suorakulmaiseen laatikkoon pakataan n^2 viinipulloa rinnakkain n riviin, jolloin jokaisessa rivissä on n pulloa. Pakkaaminen tehdään jommallakummalla seuraavien kuvioiden esittämistä tavoista (kuvissa on $n = 4$):





a) Laske, mikä on laatikoiden täyttösuhde, so. viinipullojen pohjien yhteispinta-alan suhde tarvittavan laatikon pohjapinta-alaan kummassakin tapauksessa. Laske kummankin täyttösuhteen numeerinen arvo kahden desimaalin tarkkuudella, kun $n = 10$. (4 p.)

b) Miten täyttösuhteet käyttäytyvät, kun viinilaatikko tulee äärettömän suureksi, ts. $n \to \infty$? (5 p.)

Pitkä matematiikka 12.3.2008, ratkaisut:

1. a) $2x^2 = x+1 \iff 2x^2 - x - 1 = 0$. Ratkaisu on $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$. Siis $x = 1$ tai $x = -\frac{1}{2}$.

b) $\dfrac{x}{6} - \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{5}{12} \iff 2x - 4(x-2) = 5 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$.

c) $x^2 + y^2 = \dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1+t^4+2t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1.$

2. a) On ratkaistava yhtälöpari $2x + y = 8$, $3x + 2y = 5$. Kertomalla ensimmäinen kahdella ja vähentämällä toisesta saadaan $x = 11$, jolloin $y = 8 - 2x = -14$.

b) $5^{5x-5} = 125 \iff 5^{5x-5} = 5^3 \iff 5x - 5 = 3 \iff x = \frac{8}{5}$.

c) $|3x-2| = 5 \iff 3x - 2 = \pm 5$ eli $x = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$ tai $x = \frac{2-5}{3} = -1$.

3. a) $Dx^{-4} = -4x^{-5}$, $Dx^{-1} = -x^{-2}$, $Dx^2 = 2x$.

$\int x^{-4}dx = -\frac{1}{3}x^{-3} + C$, $\int x^{-1}dx = \ln|x| + C$, $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

b) $f'(x) = \dfrac{(2+\cos x)\cos x + (2+\sin x)\sin x}{(2+\cos x)^2} = \dfrac{2(\sin x + \cos x) + 1}{(2+\cos x)^2}$.

$f'(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{2(1+0)+1}{(2+0)^2} = \dfrac{3}{4}$.

4. Jos alkuperäinen maksu oli a ja veroton hinta h, on $1{,}22h = a$. Siis $h = \frac{1}{1{,}22}a$. Jos arvonlisävero on 8 %, parturimaksuksi tulee $1{,}08h = \frac{1{,}08}{1{,}22}a$. Parturimaksun alennus on prosenteissa $100 \cdot \dfrac{a - \frac{1{,}08}{1{,}22}a}{a} = 100(1 - \frac{1{,}08}{1{,}22}) \approx 11{,}4754$.

Vastaus: 11,5 %.

5. Kappaleet voidaan järjestää $5! = 120$ eri järjestykseen. Väärän järjestyksen todennäköisyys on $\frac{119}{120}$. Todennäköisyys sille, että joka kerta on väärä järjestys on $(\frac{119}{120})^7$. Oikea järjestys tulee ainakin kerran todennäköisyydellä $1 - (\frac{119}{120})^7 \approx 0{,}056895$.

Vastaus: 5,69 % todennäköisyydellä.

6. Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset, jos on olemassa luku u siten, että $\bar{b} = u\bar{a}$ eli jos $u(5\bar{i} - 2\bar{j}) = 3\bar{i} + t\bar{j}$ eli jos $5u = 3$ ja $t = -2u$. On oltava $u = \frac{3}{5}$ ja $t = -2 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6}{5}$. Vektorit ovat kohtisuorat, jos $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ eli jos $15 - 2t = 0$. Näin on, kun $t = \frac{15}{2}$.

Vastaus: Yhdensuuntaiset, kun $t = -\frac{6}{5}$ ja kohtisuorat, kun $t = \frac{15}{2}$.

7. a) Leikkauspisteiden x-koordinaatit saadaan yhtälöstä $x^2 - 3 = -x^2 + 2x + 1$ eli $x^2 - x - 2 = 0$. Sen ratkaisut ovat $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ eli $x = 2$ ja $x = -1$. Vastaavat y-koordinaattien arvot ovat $y = 2^2 - 3 = 1$ ja $y = (-1)^2 - 3 = -2$. Leikkauspisteet ovat $(2, 1)$ ja $(-1, -2)$.

b) Väliin jäävän alueen ala on $\int_{-1}^{2}(-x^2 + 2x + 1 - x^2 + 3)dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2 + 2x + 4)dx$
$= \Big/_{-1}^{2} -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x = -\frac{2}{3} \cdot 8 + 4 + 8 - (\frac{2}{3} + 1 - 4) = 9.$

Vastaus: Leikkauspisteet ovat $(2, 1)$ ja $(-1, -2)$. Pinta-ala on 9.

8. Kolmion pinta-ala $a = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\alpha$, missä $\alpha = \angle(AB, AC)$. Siis $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \sin\alpha = 6$, josta $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Joko $\alpha \approx 36{,}870^\circ$ tai $\alpha \approx 180^\circ - 36{,}870^\circ = 143{,}130^\circ$. Jälkimmäisessä tapauksessa α on kolmion suurin kulma. Edellisessä tapauksessa on tarkistettava vielä kolmion muut kulmat. Tällöin $\cos\alpha = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$. Kolmion kolmannen sivun pituus saadaan kosinilauseesta: $BC^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 9$, joten $BC = 3$. Koska $3^2 + 4^2 = 5^2$, on tämä kolmio suorakulmainen, jolloin sen suurin kulma on 90°.

Vastaus: Kolmion suurin kulma on joko $90{,}0^\circ$ tai $143{,}1^\circ$.

9. Funktio $f(x) = x + \sqrt{9 - x^2}$ on määritelty, kun $-3 \le x \le 3$. Derivaatta on $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\sqrt{9-x^2} - x}{\sqrt{9-x^2}}$. Derivaatta häviää, kun $\sqrt{9-x^2} = x$ eli kun $x \ge 0$ ja $x^2 = 9 - x^2$ eli kun $x = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12$. Koska $-3 < \frac{3}{\sqrt{2}} < 3$, suurin ja pienin arvo löytyvät joukosta $f(-3) = -3$, $f(\frac{3}{\sqrt{2}}) = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$, $f(3) = 3$. Derivaatan merkistä nähdään, että funktio on kasvava, kun $-3 \le x \le \frac{3}{\sqrt{2}}$ ja vähenevä, kun $\frac{3}{\sqrt{2}} \le x \le 3$.

Vastaus: Pienin arvo on -3 ja suurin arvo $3\sqrt{2}$.

10. Funktio $f(x) = e^x - a|x-1|$ on jatkuva kaikkialla. Alueessa $x > 1$ on $f(x) = e^x - a(x-1)$ ja $f'(x) = e^x - a$. Nyt $f'(x) \ge 0$, kun $e^x \ge a$. Alueessa $x > 1$ on $e^x > e$ ja $\lim_{x\to 1} e^x = e$. Siten $f'(x) \ge 0$ eli f on kasvava alueessa $x > 1$, kun $a \le e$.

Alueessa $x < 1$ on $f(x) = e^x + a(x-1)$ ja $f'(x) = e^x + a$. Nyt $f'(x) \ge 0$, kun $e^x \ge -a$. Alueessa $x < 1$ on $e^x > 0$ ja $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Siten $f'(x) \ge 0$ eli f on kasvava alueessa $x < 1$, kun $-a \le 0$ eli $a \ge 0$.

Jatkuva funktio, joka on kasvava alueessa $x < 1$ ja alueessa $x > 1$ on kasvava koko $\mathbb{R}$:ssä. Näin ollen $f(x)$ on kasvava kaikkialla, kun $0 \le a \le e$.

11. **a)** Eukleiden algoritmi antaa: $154 = 126 + 28$, $126 = 4 \cdot 28 + 14$, $28 = 2 \cdot 14$. Näin ollen syt(156,126)=14.

b) Koska syt(156,126)=14 ja $56 = 4 \cdot 14$, Diofantoksen yhtälöllä on ratkaisu. Eukleiden algoritmi antaa: $14 = 126 - 4 \cdot 28 = 126 - 4 \cdot (154 - 126) = -4 \cdot 154 + 5 \cdot 126$, joten $56 = 4 \cdot 14 = -16 \cdot 154 + 20 \cdot 126$. Diofantoksen yhtälön eräs ratkaisu on siten $x_0 = -16$, $y_0 = 20$. Yhtälön yleinen ratkaisu on $(x, y) = (-16 + n \cdot \frac{126}{14},\ 20 - n \cdot \frac{154}{14})$ $= (-16 + 9n,\ 20 - 11n)$, $n \in Z$ eli $(2 + 9n,\ -2 - 11n)$, $n \in Z$.

12. Funktio $f(x) = x^2 - 2^x$ on jatkuva välillä $[-1, 1]$, $f(-1) = \frac{1}{2} > 0$ ja $f(0) = -1 < 0$, joten f:llä on nollakohta välillä $[-1, 0] \in [-1, 1]$. Haetaan sille likiarvo Newtonin menetelmällä $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, missä $f(x) = x^2 - 2^x$ ja $f'(x) = 2x - 2^x \ln 2$. Alkuarvolla $x_0 = -0{,}5$ saadaan $x_1 \approx -0{,}806757$, $x_2 \approx -0{,}767354$, $x_3 \approx -0{,}766665$, $x_4 \approx -0{,}766665$. Nelidesimaalinen likiarvo on siten $-0{,}7667$.

13. **a)** Väite on väärä. Valitaan $f(x) = -x^2$ ja $g(x) = 0$, jolloin $f'(x) = -2x$ ja $g'(x) = 0$. Nyt $f(x) \le g(x)$ kaikilla x. Kun $x < 0$, on $f'(x) = -2x > 0 = g'(x)$.

b) Väite on oikea. Jos $f(x) \le g(x)$ aina, on $g(x) - f(x) \ge 0$ aina. Tällöin on myös $\int_0^x (g(t) - f(t))dt \ge 0$ kaikilla $x \ge 0$ eli $\int_0^x g(t)dt - \int_0^x f(t)dt \ge 0$ kaikilla $x \ge 0$ eli väite.

***14.** **a)** Nollakohdat saadaan yhtälöstä $\sin x = \cos x \iff \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \iff x = \frac{\pi}{2} - x + 2n\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + n\pi$. Välille $[0, 2\pi]$ osuvat ratkaisut $x = \frac{\pi}{4}$ ja $x = \frac{5\pi}{4}$.

b) Funktion $f(x) = \cos x - \sin x$ derivaatta on $f'(x) = -\sin x - \cos x$. Koska $-\cos x = \cos(\pi - x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$, $f'(x) = 0$, kun $\sin x = \sin(x - \frac{\pi}{2}) \iff x = \pi - x + \frac{\pi}{2} + 2n\pi \iff x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$. Välille $[0, 2\pi]$ osuvat ratkaisut $x = \frac{3\pi}{4}$ ja $x = \frac{7\pi}{4}$. Nyt $f(\frac{3\pi}{4}) = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \approx -1{,}41$ ja $f(\frac{7\pi}{4}) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$. Lisäksi $f(0) = 1 = f(2\pi)$. Tästä nähdään, että funktio saa suurimman arvonsa, kun $x = \frac{7\pi}{4}$ ja pienimmän arvonsa, kun $x = \frac{3\pi}{4}$.

c) $\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi}(\cos x - \sin x)dx = \Big/_{0}^{2\pi} \sin x + \cos x = 1 - 1 = 0.$

d) $\int_0^{2\pi} |f(x)|dx = \int_0^{\pi/4}(\cos x - \sin x)dx - \int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\cos x - \sin x)dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi}(\cos x - \sin x)dx$

$= \Big/_{0}^{\pi/4} (\sin x + \cos x) - \Big/_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x + \cos x) + \Big/_{5\pi/4}^{2\pi} (\sin x + \cos x) =$

$2(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4}) = 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 4\sqrt{2}.$

***15.** **a)** 1) Vasemmanpuoleisen kuvan tapaus. Laatikon pohja on neliö, jonka sivun pituus on $2nr$. Pohjan ala on $a_L = 4n^2r^2$. Pullojen pohjien alojen summa on $a_P = n^2\pi r^2$. Täyttösuhde $S_n = \frac{a_P}{a_L} = \frac{n^2\pi r^2}{4n^2r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$. Tulos on sama kaikilla arvoilla n.

2) Oikeanpuoleisen kuvan tapaus. Laatikon pohjan pitemmän sivun pituus $p = (2n+1)r$. Lyhyemmän sivun pituuden määrittämiseksi tarkastellaan ensin kuvan tapauksessa ympyräpyramidia, joka muodostuu neljästä pohjaympyrästä ja niiden päällä olevista kuudesta ympyrästä. Kun pyramidin kärkinä olevien ympyröiden keskipisteet yhdistetään saadaan tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on $(4-1)\cdot 2r$ ja korkeus $(4-1)r\sqrt{3}$. Tämän perusteella laatikon lyhyemmän sivun pituus arvolla $n = 4$ on $((4-1)\sqrt{3}+2)r$. Samalla päättelyllä nähdään, että lyhyemmän sivun pituus arvolla n on $q = ((n-1)\sqrt{3}+2)r$.

Laatikon pohjan ala $a_L = pq = (2n+1)((n-1)\sqrt{3}+2)r^2$. Täyttösuhde on nyt $T_n = \frac{a_P}{a_L} = \frac{n^2\pi}{(2n+1)((n-1)\sqrt{3}+2)}$. Arvolla $n = 10$ on $T_{10} = \frac{100\pi}{21(9\sqrt{3}+2)} \approx 0{,}85$.

b) Vasemmanpuoleisen laatikon täyttösuhde ei riipu arvosta n, joten se on n:n kasvaessa rajatta edelleen $\frac{\pi}{4}$. Oikeanpuoleisen laatikon tapauksessa on raja-arvo $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{3} + (4-\sqrt{3})/n + (2-\sqrt{3})/n^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}91.$