

Lyhyt matematiikka 20.3.2009, ratkaisut:

1. a) Summa on $-x^2 + 2x + 2x^2 - 3x + 1 = x^2 - x + 1$. Tulo on $(-x^2 + 2x)(2x^2 - 3x + 1) = -2x^4 + (3 + 4)x^3 + (-1 - 6)x^2 + 2x = -2x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 2x$.
- b) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = x - 1 \iff 3x - 2x = 6(x - 1) \iff 5x = 6 \iff x = \frac{6}{5}$.
- c) Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan $2x = 3$ eli $x = \frac{3}{2}$. Edelleen, $y = 1 - x = -\frac{1}{2}$.
Vastaus: b) $x = \frac{6}{5}$, c) $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

2. a) Suoraan verrannollisuuden mukaan $\frac{y}{x}$ on vakio. Siis $\frac{y}{7} = \frac{5}{2}$, josta $y = \frac{35}{2}$.
- b) Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$ on nolla, kun $x = 0$ tai $x = 4$.
- c) Arvo on $\frac{2 \cdot \frac{5}{8} - 1}{\frac{5}{8} + 1} = \frac{2 \cdot 5 - 8}{5 + 8} = \frac{2}{13}$.

Vastaus: a) $y = \frac{35}{2}$, b) $x = 0$ tai $x = 4$, c) $\frac{2}{13}$.

3. a) Yhtälö on $y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 1)$ eli $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
- b) Polynomin nollakohdat ovat $\frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$ eli $x = -3$ tai $x = \frac{1}{2}$. Koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, se saa negatiivisia arvoja, kun $-3 < x < \frac{1}{2}$.
4. Tehtävään vastasi kaikkiaan 9300 kokeilasta. Eri pistemäärien prosenttiosuudet ja sektoridiagrammin keskuskulmat ovat seuraavat:

pisteitä	0	1	2	3	4	5	6
%-osuus	21,8	13,4	23,5	8,5	7,2	9,8	15,8
kulma	78°	48°	85°	31°	26°	35°	57°

5. Olkoon Alpon ajoaika kohtaamispisteeseen t tuntia. Koska Berit lähtee 15 min Alpon jälkeen, on hänen ajoaikansa $t - \frac{1}{4}$ tuntia. Koska matka = nopeus \times aika, saadaan yhtälö $120t + 105(t - \frac{1}{4}) = 170$ eli $225t = 170 + \frac{1}{4} \cdot 105$. Tästä ratkeaa $t = \frac{157}{180}$ tuntia eli $t = 52$ min 20 s. Alpo on siten kohtaamispaikassa kello 9.12.20. Alpon ajomatka kohtaamispisteeseen on $120 \cdot \frac{157}{180} = 104\frac{2}{3}$ (km).

Vastaus: Alpo ja Berit kohtaavat 104,7 km A:sta kello 9.12.

6. Pallon säteelle r pätee $2\pi r = 64,2$, joten $r = \frac{32,1}{\pi} \approx 10,2177$ (cm). Pallon tilavuus $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\frac{32,1}{\pi})^3 \approx 4468,421$ (cm³). Jos pallo on kokonaan kuparia, sen massa on $8,96V \approx 40037$ (g) eli 40,037 kg. Tämä on enemmän kuin pallon massa 37,9 kg.

Vastaus: Pallon sisällä on tyhjää tilaa.

7. Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vasten ja puolittavat toisensa. Jos pitemmän lävistäjän pituus on $2x$, on Pythagoraan mukaan $x^2 + 2^2 = 8^2$, josta $x = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$. Pitemmän lävistäjän pituus on $2x = 4\sqrt{15} \approx 15,4919$ (cm).

Vastaus: 15,5 cm.

8. Tarkastellaan x euron suuruista palkkatuloa ja 1500 euron opintorahaa. Jos $x \leq 700$, on puhdas ansiotulo korkeintaan 2200 euroa ja opintorahavähennys on 1500 euroa.

Jos $x > 700$, vähennys pienenee määrällä $0,5(1500 + x - 2200) = 0,5x - 350$ (euroa). Vähennykseksi tulee ohjeen mukaan pienempi luvuista $2200 - (0,5x - 350) = 2550 - 0,5x$ ja 1500. Koska $2550 - 0,5x < 1500$, kun $x > 2100$ (euroa), on vähennys 1500 euroa, kun $x \leq 2100$ ja $2550 - 0,5x$ sen jälkeen.

Vähennys ei voi olla negatiivinen, joten on oltava $2550 - 0,5x \geq 0$. Näin on, kun $x \leq 5100$ (euroa). Tätä 5100 euroa suuremmilla palkkatuloilla ei enää saa vähennystä.

Kysytty vähennyksen kuvaaja $y = f(x)$ on murtoviiva, missä

$$f(x) = \begin{cases} 1500, & \text{kun } 0 \leq x \leq 2100, \\ 2550 - 0,5x, & \text{kun } 2100 < x < 5100, \\ 0, & \text{kun } x \geq 5100. \end{cases}$$

9. Merkitään kolmion kärkiä $A = (-6, 1)$, $B = (0, 0)$ ja $C = (4, 9)$. Piirretään kolmion ABC ympäri suorakulmio, jonka kärjet ovat $D = (-6, 0)$, $E = (4, 0)$, C ja $F = (-6, 9)$.

a) Määritetään kolmion kulmat syntyneiden apukolmioiden kulmien avulla. Kulmalle $\alpha = \angle EBC$ pätee $\tan \alpha = \frac{9}{4}$, joten $\alpha \approx 66,0375^\circ$. Kulmalle $\beta = \angle ABD$ pätee $\tan \beta = \frac{1}{6}$, joten $\beta \approx 9,4623^\circ$. Näin ollen kolmion ABC kulma $\gamma_1 = \angle ABC = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 104,5002^\circ$.

Kulmalle $\delta = \angle ACF$ pätee $\tan \delta = \frac{8}{10}$, joten $\delta \approx 38,6598^\circ$. Näin ollen kolmion ABC kulma $\gamma_2 = \angle ACB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) - \delta = \alpha - \delta \approx 27,3777^\circ$.

Kolmion kolmas kulma $\gamma_3 = \angle BAC = 180^\circ - \gamma_1 - \gamma_2 \approx 48,1221^\circ$.

b) Suorakulmion $DECF$ ala on $9 \cdot 10 = 90$. Apukolmion BEC ala on $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18$. Apukolmion ADB ala on $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 = 3$. Apukolmion ACF ala on $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40$. Kolmion ABC ala on siten $90 - 18 - 3 - 40 = 29$.

Vastaus: a) Kolmion kulmat ovat $104,5^\circ$, $27,4^\circ$ ja $48,1^\circ$. b) Kolmion pinta-ala on 29.

10. Suorakulmion kolmas kärki on $(x, 4x - x^2)$ ja neljäs $(0, 4x - x^2)$. Suorakulmion ala $f(x) = x(4x - x^2) = 4x^2 - x^3$. Alan derivaatta $f'(x) = 8x - 3x^2 = x(8 - 3x)$. Derivaatta häviää, kun $x = 0$ tai $x = \frac{8}{3}$. Alan suurin arvo on joko derivaatan nollakohdassa tai määrittelyvälin $[0, 4]$ päätepisteissä. Koska $f(0) = f(4) = 0$ ja $f(\frac{8}{3}) = \frac{256}{27} \approx 9,48$, antaa derivaatan nollakohta suurimman arvon.

Vastaus: Alan lauseke on $4x^2 - x^3$ ja sen suurin arvo on $\frac{256}{27}$.

11. Olkoon ryhmässä n henkilöä. Todennäköisyys sille, ettei ryhmässä ole yhtään vasenkätistä, on $0,9^n$. Todennäköisyys sille, että ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen, on $1 - 0,9^n$. Tästä saadaan ehto $1 - 0,9^n = 0,8$ eli $0,9^n = 0,2$. Edelleen, $n \log 0,9 = \log 0,2$, josta $n = \frac{\log 0,2}{\log 0,9} \approx 15,2755$.

Vastaus: Vähintään 16 henkilöä.

12. Epäyhtälöiden määrittelemä alue on nelikulmio, jonka kärkipisteet ovat origo O , suorien $y = 0$ ja $5x + 3y = 30$ leikkauspiste $A = (6, 0)$, suorien $2x + 3y = 24$ ja $5x + 3y = 30$ leikkauspiste $B = (2, \frac{20}{3})$ sekä suorien $x = 0$ ja $2x + 3y = 24$ leikkauspiste $C = (0, 8)$. Esimerkiksi nelikulmion sisäpiste $(1, 1)$ toteuttaa kaikki epäyhtälöt.

On löydettävä suurin arvo t , jolla suoralla $x + y = t$ ja nelikulmiolla on yhteisiä pisteitä. Mahdollisia pisteitä ovat nelikulmion kärkipisteet. Origossa $t = 0 + 0 = 0$, A :ssa $t = 6 + 0 = 6$, B :ssä $t = 2 + \frac{20}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$ ja C :ssä $t = 0 + 8 = 8$. Näistä suurin t :n arvo on $\frac{26}{3}$.

Vastaus: Kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(2, \frac{20}{3})$ ja $(0, 8)$. Suurin arvo on $\frac{26}{3}$.

13. Aritmeettisesta summasta saadaan termien lukumäärälle n yhtälö $n \frac{1 + 61}{2} = 961$. Tästä ratkeaa $n = 31$. Jos jonon toinen termi on $1 + d$, saadaan d :lle jonon määritelmästä yhtälö $61 = 1 + (31 - 1)d$. Tämän ratkaisu on $d = 2$. Jonon toinen termi on siis 3.

Vastaus: 3.

14. a) Talletuksen lähdeverotettu korko on $0,71 \cdot 1,50 = 1,065$, joten lähdeverotettu korkokotijä on $q = 1,01065$. Kymmenen vuoden kuluttua rahaa on tilillä $q^{10} \cdot 1000 \approx 1111,7517$ (euroa).

b) Jos talletus a kaksinkertaistuu n vuodessa, on $q^n a = 2a$ eli $q^n = 2$. Tästä saadaan $n = \frac{\log 2}{\log q} \approx 65,4302$.

Vastaus: a) 1111,75 euroa, b) 66 vuoden kuluttua.

15. a) $\vec{b} - \vec{a} = (2 + 2)\vec{i} + (-1 + 5)\vec{j} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$.

b) Vektorin \vec{a} päätepiste on $(-2, -5)$, vektorin \vec{b} on $(2, -1)$ ja vektorin $\vec{b} - \vec{a}$ on $(4, 4)$.

c) Vektorin \vec{a} pituus $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$ ja vektorin \vec{b} pituus $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. Vektoreiden pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) = 1$.

Välisen kulman α kosini $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{29}\sqrt{5}} \approx 0,083045$. Tästä saadaan $\alpha \approx 85,23636^\circ \approx 85,24^\circ$.