**Pitkä matematiikka 20.3.2009, ratkaisut:**

**1.** **a)** $\dfrac{a^2}{3} - (\dfrac{-a}{3})^2 = \dfrac{a^2}{3} - \dfrac{a^2}{9} = \dfrac{2a^2}{9}$.

**b)** $(x-3)^2 > (x-1)(x+1) \iff x^2 - 6x + 9 > x^2 - 1 \iff 6x < 10$.
*Vastaus:* $x < \frac{5}{3}$.

**c)** Leikkauspiste toteuttaa yhtälöparin $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$ ja $3x - 2y + 3 = 0$ eli $4x + 6y = 12$ ja $9x - 6y = -9$. Laskemalla yhteen saadaan $x = \frac{3}{13}$, josta edelleen $y = 2(1 - \frac{1}{13}) = \frac{24}{13}$.
*Vastaus:* $(\frac{3}{13}, \frac{24}{13})$.

**2.** **a)** $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\, dx = \mathop{/}\limits_0^1 \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$.

**b)** $(e^x)^3 = e^{x^2} \iff e^{3x} = e^{x^2} \iff 3x = x^2 \iff x(x-3) = 0 \iff x = 0$ tai $x - 3 = 0$.
*Vastaus:* $x = 0$ tai $x = 3$.

**c)** $D(\frac{1}{2}\cos(2x)) = -2 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) = -\sin(2x)$.
*Vastaus:* Funktion $-\sin(2x)$.

**3.** **a)** Summavektori $\overline{a} + \overline{b} = (2+1)\overline{i} + (5-2)\overline{j} = 3\overline{i} + 3\overline{j}$. Edelleen $|3\overline{i} + 3\overline{j}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. Summavektorin suuntainen yksikkövektori on $\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{i} + \overline{j})$.

**b)** Olkoon neliön sivu $a$ ja ympyrän säde $r$. Neliön lävistäjä on ympyrän halkaisija, joten $4r^2 = 2x^2$. Tästä saadaan $r = \frac{1}{\sqrt{2}}a$. Neliön piiri on $4a$ ja ympyrän piiri $2\pi r = \pi\sqrt{2}\,a$. Kysytty prosenttiluku on $100 \cdot (\dfrac{\pi\sqrt{2}\,a}{4a} - 1) = 100 \cdot (\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4} - 1) \approx 11{,}07207$.

*Vastaus:* 11,1 %.

**4.** Jos $P(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 7$, on $P'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 36x = 12x(x^2 - 2x - 3)$. $P'(x) = 0$, kun $x = 0$ tai $x^2 - 2x - 3 = 0$. Jälkimmäinen toteutuu, kun $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$ eli kun $x = -1$ tai $x = 3$. Koska $P(0) = 7 \neq 0$, $P(-1) = 0$ ja $P(3) = -128 \neq 0$, yhteinen nollakohta on $x = -1$.
*Vastaus:* $x = -1$.

**5.** **a)** $\lg x + \lg(x+30) = 3 \iff \lg x(x+30) = \lg 10^3 \iff x(x+30) = 1000 \iff x^2 + 30x - 1000 = 0$. Tämän ratkaisu on $x = \dfrac{-30 \pm \sqrt{30^2 + 4 \cdot 1000}}{2} = \dfrac{-30 \pm 70}{2}$ eli $x = -50$ tai $x = 20$. Koska $\lg x$ on määritelty vain kun $x > 0$, vain $x = 20$ kelpaa alkuperäisen yhtälön ratkaisuksi.

*Vastaus:* $x = 20$.

**b)** Funktion $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ derivaatta $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x(x+1)}$. Arvoilla $x > 0$ on $f'(x) < 0$, joten $f(x)$ on monotonisesti vähenevä.

**6.** **a)** Tehtaan valmistamasta $100a$ lampusta on kone $A$ valmistanut $60a$, kone $B$ $30a$ ja kone $C$ $10a$. Viallisia lamppuja tulee koneelta $A$ $0{,}02 \cdot 60a = 1{,}2a$, koneelta $B$ $0{,}03 \cdot 30a = 0{,}9a$ ja koneelta $C$ $0{,}04 \cdot 10a = 0{,}4a$. Yhteensä viallisia lamppuja on $2{,}5a$. Todennäköisyys, että tehtaan valmistama lamppu on viallinen, on $\dfrac{2{,}5a}{100a} = 0{,}025$.

**b)** Umpimähkään valittu viallinen lamppu on koneen $C$ valmistama todennäköisyydellä $\dfrac{0{,}4a}{2{,}5a} = 0{,}16$.

*Vastaus:* **a)** 0,025, **b)** 0,16.

**7.** Tangentin yhtälö on $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$. Tangentin ja $x$-akselin leikkauspisteessä $y = 0$ ja $x$-koordinaatille pätee $-x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \iff x = \frac{1}{2}x_0$. Tangentin ja suoran $x = 1$ $y$-koordinaatille pätee $y - x_0^2 = 2x_0(1 - x_0) \iff y = 2x_0 - x_0^2$. Kolmio on suorakulmainen ja sen kärjet ovat pisteissä $(\frac{1}{2}z, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2z - z^2)$, missä $z = x_0 \in ]0, 1]$. Kolmion ala on $f(z) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}z)(2z - z^2) = \frac{1}{4}(z^3 - 4z^2 + 4z)$. Derivaatta $f'(z) = \frac{1}{4}(3z^2 - 8z + 4)$ häviää, kun $z = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \dfrac{8 \pm 4}{6}$ eli, kun $z = \frac{2}{3}$ tai $z = 2$. Näistä vain $\frac{2}{3}$ on tarkasteluvälillä $]0, 1]$. Koska $f'(z) > 0$, kun $0 < z < \frac{2}{3}$ ja $f'(z) < 0$,kun $\frac{2}{3} < z \leq 1$ saadaan kolmion alan suurin arvo, kun $x_0 = z = \frac{2}{3}$.

*Vastaus:* $x_0 = \frac{2}{3}$.

**8.** Sijoitetaan pisteiden $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$ ja $C = (1, 2, 3)$ koordinaatit halutunmuotoiseen tason yhtälöön $ax + by + cz + d = 0$. Kertoimille $a$, $b$, $c$, $d$ saadaan yhtälöt

$$3a + d = 0,\ 4b + d = 0 \text{ ja } a + 2b + 3c + d = 0.$$

Sijoittamalla ensimmäisistä yhtälöistä saadut $a = -\frac{1}{3}d$ ja $b = -\frac{1}{4}d$ kolmanteen yhtälöön saadaan $-\frac{1}{3}d - \frac{1}{2}d + 3c + d = 0$. Tästä ratkeaa $c = -\frac{1}{18}d$. Tason yhtälöksi tulee $d(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{18}z + 1) = 0$ eli $12x + 9y + 2z - 36 = 0$.

*Vastaus:* $12x + 9y + 2z - 36 = 0$.

**9.** Yhteisten pisteiden $x$-koordinaatit saadaan yhtälöstä $\sin(\frac{2\pi}{3} - x) = \sin x$. Yhtälöllä voi olla kaksi ratkaisujoukkoa. Toinen on $\frac{2\pi}{3} - x = x + 2n\pi$, josta saadaan $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$. Toinen mahdollisuus on $\frac{2\pi}{3} - x = \pi - x + 2n\pi$. Tämä ei kuitenkaan toteudu millään arvolla $x$. Koska $\sin(\frac{\pi}{3} + n\pi) = (-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2}$, niin käyrien yhteiset pisteet ovat $(\frac{\pi}{3} + n\pi,\ (-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Kysytty pinta-ala ei riipu siitä, mitkä kaksi peräkkäistä leikkauspistettä valitaan, joten valitaan pisteet arvoilla $n = 0$ ja $n = 1$. Ala on $\int_{\pi/3}^{4\pi/3}(\sin x - \sin(\frac{2\pi}{3} - x))dx =$

$$\Big/_{\pi/3}^{4\pi/3} -\cos x - \cos(\tfrac{2\pi}{3} - x) = -\cos\tfrac{4\pi}{3} - \cos\tfrac{2\pi}{3} + \cos\tfrac{\pi}{3} + \cos\tfrac{\pi}{3} = 2.$$

*Vastaus:* Pisteet $(\frac{\pi}{3} + n\pi,\ (-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2})$, pinta-ala 2.

**10.** Pyörähdyskappaleen tilavuus $V(a) = \pi\int_0^a e^{-2x}\,dx = \pi \Big/_0^a -\frac{1}{2}e^{-2x} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a})$. Raja-arvo $V_\infty = \lim_{a\to\infty} V(a) = \frac{\pi}{2}(1 - \lim_{a\to\infty} e^{-2a}) = \frac{\pi}{2}$. Lopulta, $V_a = 0{,}99V_\infty$, kun $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a}) = 0{,}99 \cdot \frac{\pi}{2}$ eli kun $e^{-2a} = 0{,}01$ eli kun $-2a = \ln 0{,}01 = -2\ln 10$, josta $a = \ln 10 \approx 2{,}3026$.

*Vastaus:* $V(a) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a})$, $V_\infty = \frac{\pi}{2}$ ja $a = 2{,}3$.

**11.** Jakolaskulla nähdään, että $f(n) = \dfrac{9n^2+117n+34}{3n+5} = 3n+34-\dfrac{136}{3n+5}$. $f(n)$ on kokonaisluku niillä kokonaislukuarvoilla $n>0$, joilla $3n+5$ on luvun 136 tekijä. Luku $136 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 17$. Koska $n>0$, on $3n+5 \geq 8$. Mahdolliset luvun $3n+5$ arvot ovat siten 8, 17, $2\cdot 17 = 34$, $4\cdot 17 = 68$ ja $8\cdot 17 = 136$. Edelleen $3n+5 = 8 \iff n = 1$, $3n+5 = 17 \iff n = 4$, $3n+5 = 34 \iff n = \frac{29}{3} \notin \mathrm{N}$, $3n+5 = 68 \iff n = 21$, $3n+5 = 136 \iff n = \frac{131}{3} \notin \mathrm{N}$.

*Vastaus:* Arvoilla $n = 1$, 4 ja 21.

**12.** Olkoon $f(x) = x^3 - x - 2$, jolloin $x^3 = x+2 \iff f(x) = 0$. Kun $x \geq 1$, on $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$, joten $f(x)$ on aidosti kasvava välillä $[1, \infty[$. Siis sillä voi olla korkeintaan yksi nollakohta tällä välillä. Koska $f$ on jatkuva, $f(1) = -2 < 0$ ja $f(2) = 4 > 0$, on $f$:llä tasan yksi nollakohta, joka on välillä $]1,2[$.

Newtonin algoritmi funktiolle $f$ on $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - x_n - 2}{3x_n^2 - 1}$. Alkuarvolla $x_0 = 1{,}5$ saadaan $x_1 \approx 1{,}521739$, $x_2 \approx 1{,}521380$, $x_3 \approx 1{,}521380$.
*Vastaus:* Juuri on 1,52.

**13.** Osasumma $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_i$ suppenee, jos on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} S_n$. Jos $a_i > 0$ kaikilla $i = 1, 2, 3, ...$, niin jokainen osasumma $S_n \geq a_1 > 0$. Tällöin ei voi olla $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$, mikä on välttämätön ehto sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ suppenemiselle.

***14.** Leikataan pyramidia kohtisuoralla tasolla, joka kulkee huipun kautta sekä 30 ja 135 asteen kulmassa olevien sivutahkojen keskeltä. Olkoon leikkauskuviossa $A$ 30 asteen kulman kärki, $B$ 135 asteen kulman kärki, $C$ pyramidin huippu ja $h = CD$ pyramidin korkeus. Kolmio $BCD$ on suorakulmainen ja sen $B$:ssä oleva kulma on 45°, joten myös $C$:ssä oleva kulma on 45°. Näin ollen $BD = CD = h$. Kolmio $ACD$ on myös suorakulmainen ja $A$:ssä oleva kulma on 30°, joten $C$:ssä oleva kulma on 60°.

**a)** Koska kolmiossa $ACD$ on $CD = h$, on $AD = h\sqrt{3}$. Toisaalta $AD = a + h$. Tästä saadaan $a + h = h\sqrt{3}$, josta ratkeaa korkeus $h = \frac{1}{\sqrt{3}-1}a = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)a$.

**b)** Pyramidin tilavuus $V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)a = \frac{1}{6}(\sqrt{3}+1)a^3$.

**c)** Tarkastellaan sitten pisteiden $C$ ja $D$ kautta kulkevaa tasoa, joka on kohtisuorassa janaa $AD$ vastaan. Jos kahdesta muusta sivutahkosta toisen jatke leikaa tason pitkin janaa $EC$, on kulma $\alpha = \angle CED$ kysytty sivutahkon kulma pohjan kanssa. Konstruktion mukaan $DE = \frac{1}{2}a$, joten $\tan\alpha = \dfrac{h}{a/2} = 2\cdot\dfrac{h}{a} = \sqrt{3}+1$. Siis $\alpha \approx 69{,}8961°$.

*Vastaus:* **a)** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)a$, **b)** $\frac{1}{6}(\sqrt{3}+1)a^3$, **c)** 70°.

***15.** **a)** Kun $0 \leq x \leq 1$, niin väliarvolauseen mukaan $f(x) - f(0) = f'(z)(x-0)$, missä $0 \leq z \leq 1$. Koska $f'(z) \geq 2$, on $f(x) = f(0) + f'(z)x \geq f(0) + 2x$, mikä piti osoittaa.

**b)** $1 = \int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 (f(0)+2x)dx = \Big/_{0}^{1} f(0)x + x^2 = f(0) + 1$. Siis $1 \geq f(0) + 1$ eli $f(0) \leq 0$, mikä piti osoittaa.

**c)** Koska $f'(x) \geq 2 > 0$, kaikilla $x \in [0,1]$ on $f$ aidosti kasvava. Näin ollen $f$:llä on korkeintaan yksi nollakohta välillä. Koska $\int_0^1 f(x)\,dx = 1 > 0$, on olemassa $x_0 \in ]0,1]$, jolle $f(x_0) > 0$. Koska $f$ on jatkuva ja $f(0) \leq 0$, on olemassa piste $x_1 \in [0, x_0[ \subset [0,1]$, jolle $f(x_1) = 0$. On osoitettu, että funktiolla $f$ on tasan yksi nollakohta välillä $[0,1]$.