YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA

29.09.2006

MATEMATIIKAN KOE
LYHYT OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. Ratkaise yhtälöt **a)** $x + 2(4 + x) = -1$, **b)** $\dfrac{5 + x^2}{x} = \dfrac{5x - 13}{3}$.

2. Olkoon annettuna kaksi pistettä: $A = (2, 6)$ ja $B = (1, -1)$. Määritä **a)** pisteiden A ja B määrittämän suoran yhtälö, **b)** janan AB pituus, **c)** janan AB keskipisteen koordinaatit.

3. Kuinka paljon 2-prosenttista desinfektioliuosta tarvitaan, jotta siitä laimennettuna saadaan 500 ml 0,35-prosenttista desinfektioliuosta?

4. Abiturientilla on kaksi herätyskelloa. Uudempi toimii oikein 98 %:n todennäköisyydellä ja vanhempi 85 %:n todennäköisyydellä. Matematiikan kokeen aattona abiturientti asettaa molemmat kellot soimaan seuraavana aamuna. Millä todennäköisyydellä kelloista soi oikeaan aikaan **a)** molemmat, **b)** vain toinen, **c)** ei kumpikaan?

5. Omakotitalon räystäskouruja puhdistettaessa käytettiin tikkaita, joiden pituutta voidaan säätää. Kun tikkaat oli asetettu viiden metrin pituisiksi ja sijoitettu pystysuoraa seinää vasten siten, että tikkaiden alapää osui maahan 150 cm:n etäisyydelle seinästä, jäi tikkaiden yläpää tasan metrin liian alas. Kuinka paljon tikkaita tuli pidentää, kun niiden alapään paikkaa ei haluttu muuttaa? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

6. Talon lämmityskustannukset pakkasella ovat suoraan verrannolliset sisä- ja ulkolämpötilojen väliseen erotukseen. Ulkolämpötilan ollessa $-2{,}0$ °C ja sisälämpötilan 22,0 °C sisälämpötila pudotetaan 21,0 °C:seen. Kuinka monella prosentilla talon lämmityskustannukset tällöin pienenevät?

7. Lauralta kului koulumatkaan 15 minuuttia. Tavallisesti hän saapui kouluun kellon soidessa. Eräänä aamuna hän lähti kotoa 6 minuuttia tavallista myöhempään, ja vaikka hän kulki nopeammin, hän myöhästyi. Koulun kellon soidessa hänellä oli vielä 5 % matkasta jäljellä. Kuinka monta prosenttia tavallista nopeammin hän oli tällöin kulkenut?

8. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 12,4 cm ja toinen terävä kulma 64,5°. Kolmio pyörähtää pitemmän kateettinsa ympäri. Laske syntyneen kartion tilavuus ja vaipan ala.

9. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}$ välillä $[-1, 4]$. **a)** Määritä funktion suurin ja pienin arvo annetulla välillä ja piirrä funktion kuvaaja. **b)** Määritä käyrän $y = f(x)$ tangentin kulmakertoimen suurin ja pienin arvo annetulla välillä.

10. Toisen asteen polynomin $y = ax^2 + bx + c$ kuvaaja kulkee pisteiden $(0, 0)$, $(1, 2)$ ja $(4, 3)$ kautta. Määritä kertoimet a, b ja c ja piirrä polynomin kuvaaja. Määritä polynomin derivaatta kohdassa $x = 2$.

KÄÄNNÄ!

8. Kolmion toinen terävä kulma on $90^\circ - 64{,}5^\circ = 25{,}5^\circ$ eli on pienempi kuin $64{,}5^\circ$. Näin ollen kolmio pyörähtää kulmaa $64{,}5^\circ$ vastaavan kateetin ympäri. Syntyneen kartion korkeus h on pitemmän kateetin pituus ja säde r lyhyemmän kateetin pituus. Kartion sivujana on kolmion hypotenuusa. Näin ollen $h = 12{,}4 \sin 64{,}5^\circ \approx 11{,}1921$ cm ja $r = 12{,}4 \cos 64{,}5^\circ \approx 5{,}3383$ cm. Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \approx 334{,}0032\ \mathrm{cm}^3$ ja vaipan ala $A = \pi r s \approx 207{,}9589\ \mathrm{cm}^2$.

Vastaus: Kartion tilavuus on $334{,}0\ \mathrm{cm}^3$ ja vaipan ala $208{,}0\ \mathrm{cm}^2$.

9. **a)** Funktion $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}$ derivaatta on $f'(x) = 3x^2 - 9x = 3x(x-3)$. Derivaatta on nolla, kun $x = 0$ tai $x = 3$. Koska $f(-1) = 0, f(0) = \frac{11}{2}, f(3) = -8$ ja $f(4) = -\frac{5}{2}$, on funktion suurin arvo $f(0)$ ja pienin $f(3)$.

b) Tangentin kulmakerroin $k(x) = f'(x) = 3x^2 - 9x$. Sen derivaatta on $k'(x) = 6x - 9$. Derivaatta on nolla, kun $x = \frac{3}{2}$. Koska $k(-1) = 12, k(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{4}$ ja $k(4) = 12$, on kulmakertoimen suurin arvo $k(-1) = k(4)$ ja pienin $k(\frac{3}{2})$.

Vastaus: **a)** Suurin arvo on $f(0) = \frac{11}{2}$ ja pienin $f(3) = -8$. **b)** Suurin arvo on $f'(-1) = f'(4) = 12$ ja pienin $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{4}$.

10. Koska polynomin kuvaaja kulkee origon kautta, on $0 = y(0) = c$. Koska kuvaaja kulkee pisteiden $(1,2)$ ja $(4,3)$ kautta, saadaan kertoimille a ja b yhtälöt $a + b = 2$ ja $16a + 4b = 3$. Näistä saadaan $12a = -5$ eli $a = -\frac{5}{12}$ ja $b = 2 - a = \frac{29}{12}$. Polynomi on siis $y = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{29}{12}x$. Polynomin derivaatta on $y' = -\frac{10}{12}x + \frac{29}{12}$. Derivaatan arvo kohdassa $x = 2$ on $y'(2) = -\frac{10}{12} \cdot 2 + \frac{29}{12} = \frac{3}{4}$.

Vastaus: $y = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{29}{12}x$ ja $y'(2) = \frac{3}{4}$.

11. **a)** Erilaisia istumajärjestyksiä on $30! \approx 2{,}65 \cdot 10^{32}$.

b) Kolme tyhjää pulpettia voidaan valita $\binom{30}{3} = 4060$ eri tavalla. Istumajärjestyksiä tässä luokassa on $\frac{1}{6} \cdot 30! \approx 4{,}42 \cdot 10^{31}$.

c) Tietokoneelta kuluu istumajärjestyksiin $\dfrac{30!}{10^{12} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365{,}25} \approx 8{,}4 \cdot 10^{12}$ vuotta.

Vastaus: **a)** $2{,}65 \cdot 10^{32}$ järjestystä, **b)** 4060 tavalla, $4{,}42 \cdot 10^{31}$ järjestystä, **c)** $8{,}4 \cdot 10^{12}$ vuotta.

12. Olkoon $q = 1 - \frac{0{,}043}{100} = 0{,}99957$. Jos ainetta on aluksi a, on sitä vuoden päästä qa, kahden vuoden q^2a ja n vuoden päästä $q^n a$. Jos n on puoliintumisaika, on $q^n a = 0{,}5a$ eli $q^n = 0{,}5$. Tästä saadaan $n \log q = \log 0{,}5$, joten $n = \dfrac{\log 0{,}5}{q} \approx 1611{,}62$.

Vastaus: 1610 vuotta.

13. Jos tuotteen hinta oli alunperin h, oli se p % korotuksen jälkeen $(1 + \frac{p}{100})h$. Tuotteen hinta oli $2p$ % suuruisen alennuksen jälkeen $(1 - \frac{2p}{100})(1 + \frac{p}{100})h$. Tästä saadaan p:lle yhtälö $(1 - \frac{2p}{100})(1 + \frac{p}{100})h = (1 - \frac{5{,}5}{100})h$. Sievennyksen jälkeen yhtälö saadaan muotoon $\frac{2}{100}p^2 + p - 5{,}5 = 0$ eli $p^2 + 50p - 275 = 0$. Tämän ratkaisu on $p = \dfrac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 4 \cdot 275}}{2} = \dfrac{-50 \pm 60}{2}$ eli $p = -55$ tai $p = 5$. Ratkaisuista vain jälkimmäinen toteuttaa tehtävän ehdot.

Vastaus: $p = 5$.

14. Olkoon $p = 1{,}5$ ja $q = 1 + \frac{1{,}5}{100} = 1{,}015$. Joka toinen kuukausi tapahtuva 7 euron talletus tuottaa vuodessa korkoa $\frac{7p}{100} \cdot \frac{1}{12}(12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2) = \frac{7p \cdot 42}{1200} = 0{,}37$ euroa. Vuoden jälkeen tilillä on rahaa $a = 6 \cdot 7 + 0{,}37 = 42{,}37$ euroa. Kahden vuoden jälkeen tilillä on rahaa $a + qa$ euroa, kolmen vuoden jälkeen $a + qa + q^2a$ euroa ja lopulta 40 vuoden jälkeen $a + qa + q^2a + ... + q^{39}a$ euroa. Kyseessä on geometrinen sarja, jonka summa on $a\frac{1 - q^{40}}{1 - q} = 2299{,}33$ euroa.

Vastaus: 2299,33 euroa.

15. **a)** Nopeuden keskiarvon 95 % luottamusväli on $[\overline{x} - 1{,}96\frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 1{,}96\frac{s}{\sqrt{n}}]$. Sijoittamalla siihen $n = 4190$, $\overline{x} = 97{,}75$ ja $s = 10{,}70$ saadaan väliksi $[97{,}4260; 98{,}0740]$.

b) Nopeudet v noudattavat jakaumaa $N(97{,}75; 10{,}70)$, missä yksikkönä on km/h. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan $N(0, 1)$ muunnoksella $z = \frac{v - 97{,}75}{10{,}70}$, $z_0 = \frac{90 - 97{,}75}{10{,}70} \approx -0{,}72430$. Todennäköisyys ylittää 90 km/h on $\Phi(-z_0) \approx \Phi(0{,}7243) \approx 0{,}7655$. Näin ollen voidaan arvioida, että seuraavista tuhannesta ajoneuvosta 766 ylittää nopeuden 90 km/h.

Vastaus: **a)** $[97{,}426; 98{,}074]$. **b)** Noin 766.

Lyhyt matematiikka 29.9.2006, ratkaisut:

1. a) $x + 2(4 + x) = -1 \Longleftrightarrow 3x = -9 \Longleftrightarrow x = -3$.

   b) Kertomalla $3x$:llä ja sieventämällä saadaan yhtälö muotoon $2x^2 - 13x - 15 = 0$. Sen ratkaisu on $x = \dfrac{13 \pm \sqrt{13^2 + 4 \cdot 2 \cdot 15}}{2} = \dfrac{13 \pm 17}{2}$ eli $x = \frac{15}{2}$ tai $x = -1$.

   Vastaus: a) Ratkaisu on $x = -3$. b) Ratkaisut ovat $x = \frac{15}{2}$ ja $x = -1$.

2. a) Suoran kulmakerroin on $\dfrac{6+1}{2-1} = 7$. Suoran yhtälö on $y+1 = 7(x-1)$ eli $y = 7x-8$.

   b) Janan AB pituus on $\sqrt{(6+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

   c) Keskipiste on $(\dfrac{2+1}{2}, \dfrac{6-1}{2}) = (\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2})$.

   Vastaus: a) $y = 7x - 8$, b) $5\sqrt{2}$, c) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

3. Jos 0,35-prosenttista liuosta on 500 ml, on siinä desinfektioainetta $0{,}0035 \cdot 500 = 1{,}75$ ml. Jos tarvittava määrä 2-prosenttista liuosta on x ml, on $0{,}02x = 1{,}75$, josta ratkeaa $x = 87{,}5$.

   Vastaus: 87,5 ml.

4. a) Molemmat toimivat todennäköisyydellä $0{,}98 \cdot 0{,}85 = 0{,}833$.

   b) Vain toinen toimii todennäköisyydellä $0{,}98 \cdot (1 - 0{,}85) + 0{,}85 \cdot (1 - 0{,}98) = 0{,}164$.

   c) Kumpikaan ei toimi todennäköisyydellä $(1 - 0{,}98)(1 - 0{,}85) = 0{,}003$

   Vastaus: a) 0,833, b) 0,164, c) 0,003.

5. Olkoon tikkaiden alapää kohdassa A ja yläpää seinällä kohdassa B ja olkoon C seinän kohta, joka on samalla tasolla kuin A. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC on $AB = 5$ m ja $AC = 1{,}5$ m. Jos $BC = y$ m, on $y^2 = 5^2 - 1{,}5^2$, josta $y = \sqrt{22{,}75} \approx 4{,}7697$. Jos tikkaiden uusi pituus on x m, on $x^2 = 1{,}5^2 + (1 + \sqrt{22{,}75})^2 = 26 + 2\sqrt{22{,}75}$, josta $x \approx 5{,}9615$. Tarvittava pidennys on $5 - x \approx 0{,}9615$ m.

   Vastaus: 96 cm.

6. Sisälämpötilan 22° ja ulkolämpötilan −2° erotus on 24°. Kun sisälämpötila pudotetaan 21 asteeseen tulee erotukseksi ulkolämpötilaan 23°. Jos lämmityskustannukset ovat aluksi a ja lopuksi b, on $\dfrac{b}{a} = \dfrac{23}{24} = (1 - \dfrac{1}{24}) \approx (1 - \dfrac{4{,}167}{100})$. Näin ollen lämmityskustannukset ovat pienentyneet 4,167 prosenttia.

   Vastaus: 4,2 %.

7. Jos kouluun oli matkaa s km, oli Lauran tavallinen nopeus koulumatkalla $v = \dfrac{s}{15} \dfrac{\text{km}}{\text{min}}$. Kyseisenä kertana Laura kulki 95 % matkasta ajassa 15-6 = 9 min. Tällöin hänen nopeutensa oli ollut $v_2 = \dfrac{0{,}95s}{9} \dfrac{\text{km}}{\text{min}}$. Nopeuksien suhde on $\dfrac{v_2}{v} = \dfrac{0{,}95s}{9} \cdot \dfrac{15}{s} = \dfrac{4{,}75}{3} \approx 1{,}5833$. Näin ollen Lauran nopeus oli tällä kertaa ollut 58,33 % tavallista suurempi.

   Vastaus: 58 %.

11. **a)** Kuinka monta erilaista istumajärjestystä voidaan muodostaa luokassa, jossa on 30 oppilasta ja 30 pulpettia? **b)** Kuinka monella tavalla kolme tyhjää pulpettia voidaan valita luokassa, jossa on 27 oppilasta ja 30 pulpettia? Kuinka monta erilaista istumajärjestystä on tässä luokassa? **c)** Kuinka monta vuotta tietokoneelta kuluisi, jos se kävisi läpi a-kohdan erilaiset istumajärjestykset käsitellen biljoona (10^{12}) istumajärjestystä sekunnissa? Yksi vuosi on keskimäärin 365,25 vuorokautta.

12. Radioaktiivisen aineen määrän havaittiin vuodessa vähentyneen 0,043 %. Määritä aineen puoliintumisaika.

13. Tuotteen hintaa nostettiin p %. Huonon menekin vuoksi näin saatua hintaa laskettiin myöhemmin $2p$ %, jolloin hinta oli 5,5 % halvempi kuin ennen korotusta. Muodosta yhtälö luvun p määrittämiseksi ja ratkaise p.

14. Henkilö osallistuu jatkuvasti lottoarvontaan täyttämällä Internetissä yhden lottorivin kymmeneksi viikoksi joka toisen kuukauden alussa. Laske, kuinka paljon henkilölle kertyisi rahaa pankkitilille, jos hän loton sijasta 40 vuoden ajan, alkaen tammikuun 1. päivästä, tallettaisi joka toisen kuukauden alussa 7 euroa tilille, joka kasvaa korkoa 1,5 % vuodessa. Lähdeveroa ei oteta huomioon.

15. Automaattisessa nopeusseurannassa saatiin vuorokauden aikana tietoja mittauskohdan ohittaneista kaikkiaan 4 190 ajoneuvosta. Nopeuksien otoskeskiarvo oli 97,75 km/h ja otoskeskihajonta 10,70 km/h; nopeudet jakautuivat likimain normaalisti. **a)** Määritä nopeuden keskiarvon (odotusarvon) 95 % luottamusväli. **b)** Arvioi, kuinka moni seuraavista mittauskohdan ohittavista 1 000 ajoneuvosta ylittää nopeuden 90 km/h.