YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA | 19.9.2007 | MATEMATIIKAN KOE LYHYT OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Ratkaise yhtälö $7x^2 + 3x = 0$.
b) Ratkaise yhtälö $\frac{1}{4}x + 1 = \frac{1}{5}(2x + 2)$.
c) Sievennä lauseke $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$.

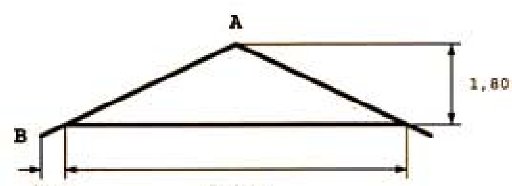
2. a) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 11 ja toisen kateetin pituus 5. Määritä kolmion terävät kulmat 0,01 asteen tarkkuudella.
b) Derivoi funktio $f(x) = 3x^{2007} - 15x^{12} + 2x - 12345$.
c) Mikä on aritmeettisen lukujonon $1, 4, \ldots$ kymmenes termi?

3. Suomen sähkönkulutus vuonna 2005 oli 84,9 TWh (terawattituntia). Tästä katettiin omalla ydinvoimalla 26,3 %, muilla kotimaisilla energialähteillä 53,7 % ja tuontisähköllä loput. Olkiluodon uusi ydinvoimala lisää sähköntuotantoa 14 TWh:lla vuonna 2009. Oletetaan, että sähkönkulutus on tällöin noussut vuoden 2005 tasosta 12 %, muita muutoksia kotimaisessa energiantuotannossa ei ole tapahtunut ja tuonnilla katetaan edelleen kotimaisen tuotannon ylittävä osuus. Mikä on tällöin kotimaisen ydinvoiman ja mikä tuontisähkön suhteellinen osuus kokonaiskulutuksesta?

4. Määritä suorien $y = 2x - 3$ ja $y = 3x - 2$ leikkauspiste P. Suora s kulkee pisteiden P ja $Q = (7, 7)$ kautta. Määritä suoran s yhtälö. Piirrä kuvio.

5. Henkilö osti 150 gramman erän maustettua teetä 3,30 eurolla ja halvempaa mustaa teetä, jonka hinta oli 5,50 €/kg. Kuinka monta grammaa mustaa teetä tulisi maustetee-erään lisätä, jotta sekoituksen kilohinta olisi puolet maustetun teen kilohinnasta?

6. Talon harja on 1,80 metriä korkeammalla kuin sivuseinien yläreunat. Räystään kohtisuora etäisyys seinästä on 54 cm. Päätyseinän pituus on 7,64 m. Talon harja on keskellä kattoa. Määritä lappeen pituus AB senttimetrin tarkkuudella.



7. Etelämantereen jääpeitteen sulaessa valuu vuodessa mereen 150 kuutiokilometriä vettä. Jos tämä vesimäärä leviäisi tasaisesti kaikkiin valtameriin, kuinka monta millimetriä valtamerien pinta nousisi? Maapallon ympärysmitta on 40 000 kilometriä, ja valtameret peittävät 70 % maapallon pinnasta.

8. Keltaista ja sinistä väripigmenttiä käytettiin kahden erisävyisen vihreän maalin sekoittamiseen. Maaliin A tarvittiin litraa kohden 80 g keltaista pigmenttiä ja 110 g sinistä pigmenttiä, maaliin B vastaavasti 120 g keltaista ja 90 g sinistä pigmenttiä. Kuinka monta litraa kumpaakin maalia valmistettiin, kun keltaista pigmenttiä käytettiin 3,2 kg ja sinistä 3,5 kg?

KÄÄNNÄ!

9. Vanhassa tarinassa šakkilaudan 64 ruudulle sijoitetaan vehnänjyviä: ensimmäiselle ruudulle yksi, toiselle kaksi, kolmannelle neljä jne. Seuraavalla ruudulla on aina edellisen ruudun määrä kaksinkertaisena. Kuinka monta ruutua voidaan täyttää Suomen vuotuisella 700 miljoonan kilogramman vehnäsadolla, jos oletetaan, että yksi vehnänjyvä painaa 25 mg?

10. Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y \geq x - 2, \\ 7x + 2y \geq 14, \\ 5x + 4y \leq 28. \end{cases}$$

Anna vastauksena kuvio, johon on merkitty ratkaisujoukko.

11. Golfsimulaattorissa pallon puttaaminen reikään onnistuu varmasti, jos pallo on enintään 80 cm:n päässä reiästä. Tästä alkaen todennäköisyys saada pallo reikään on kääntäen verrannollinen pallon ja reiän välisen etäisyyden neliöön. Millä todennäköisyydellä kymmenestä pallosta ainakin yksi menee reikään putattaessa kolmen metrin etäisyydeltä?

12. Rautalanka, jonka pituus on 120 cm, katkaistaan kahteen osaan. Toinen osa taivutetaan neliöksi, toinen ympyräksi. Miten lanka on katkaistava, jotta ympyrän ja neliön alojen summa olisi mahdollisimman pieni?

13. Funktio $f(x) = \sqrt{1+x}$ korvataan sitä lähellä olevalla polynomilla $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$. Laske, kuinka monta prosenttia polynomin derivaatta $p'(x)$ poikkeaa funktion $f(x)$ derivaatasta $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ pisteessä $x = 0{,}5$. Piirrä samaan kuvaan funktioiden $f(x)$ ja $p(x)$ kuvaajat välillä $[-1, 1]$.

14. Veljekset Matti ja Teppo ostavat yhdessä naapuriltaan Sepolta käytetyn leikkuupuimurin. He sopivat seuraavanlaisesta maksujärjestelystä: Matti maksaa heti 32 000 € ja tämän jälkeen neljä kertaa vuoden välein 900 €. Teppo maksaa heti 30 500 € ja tämän jälkeen kaksi kertaa 2 500 € vuoden välein. Mikä oli leikkuupuimurin nykyarvo, ja paljonko veljesten maksuosuudet poikkesivat toisistaan nykyarvoina laskettuina, kun laskentakorkokanta oli 1,95 %?

15. Ratkaise joko kohta **A** tai kohta **B***:

A) Lamppujen valmistaja ilmoitti, että 1 % lampuista kestää alle 8000 tuntia. Kun lamppuja ostettiin 50, havaittiin, että kaksi lamppua kesti alle 8000 tuntia. Laske, millä todennäköisyydellä 50 lampun joukossa on vähintään kaksi alle 8000 tuntia kestävää, kun valmistajan ilmoitus oletetaan paikkansapitäväksi. Testaa 5 %:n riskitasolla, voidaanko tapahtunutta pitää sattumana vai onko aihetta epäillä valmistajan ilmoituksen luotettavuutta.

B) Laske vektoreiden $\bar{a} = 2\bar{i} + \frac{3}{2}\bar{j}$ ja $\bar{b} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ pituudet ja suuntakulmat x-akseliin nähden. Laske myös vektoreiden summa $\bar{a} + \bar{b}$ ja erotus $\bar{a} - \bar{b}$.

---

* Tehtävät 15A ja 15B ovat keskenään vaihtoehtoisia. Tehtävä 15A on laadittu vanhojen, vuoden 1994 lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan, tehtävä 15B uusien, vuonna 2005 käyttöön otettujen lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan. Kumpaan tahansa tehtävään saa vastata.

Lyhyt matematiikka 19.9.2007, ratkaisut:

1. **a)** $7x^2+3x=0 \iff x(7x+3)=0 \iff x=0$ tai $7x+3=0$ eli $x=0$ tai $x=-\frac{3}{7}$.

b) $\frac{1}{4}x+1=\frac{1}{5}(2x+2) \iff \frac{1}{4}x+1=\frac{2}{5}x+\frac{2}{5} \iff \frac{3}{20}x=\frac{3}{5} \iff x=4$.

c) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2}{x^2-1}$.

Vastaus: **a)** $x=0$ tai $x=-\frac{3}{7}$, **b)** $x=4$, **c)** $\dfrac{2}{x^2-1}$.

2. **a)** Jos annettua kateettia vastaava kulma on α, on $\sin\alpha=\frac{5}{11}$, josta $\alpha\approx 27{,}0357^\circ$. Toinen terävä kulma on $90^\circ-\alpha\approx 62{,}9643^\circ$.

b) Derivaatta on $f'(x)=2007\cdot 3x^{2006}-12\cdot 15x^{11}+2=6021x^{2006}-180x^{11}+2$.

c) Aritmeettinen lukujono on muotoa $a,\ a+d,\ a+2d,\ldots$. Nyt $a=1$ ja $a+d=4$, joten $d=4-1=3$. Kymmenes termi on $a+9d=1+9\cdot 3=28$.

Vastaus: **a)** $27{,}04^\circ$ ja $62{,}96^\circ$, **b)** $6021x^{2006}-180x^{11}+2$, **c)** 28.

3. Vuonna 2005 käytettiin omaa ydinsähköä $0{,}263\cdot 84{,}9=22{,}3287$ (TWh) ja muuta kotimaista sähköä $0{,}537\cdot 84{,}9=45{,}5913$ (TWh). Tuontisähköllä jouduttiin kattamaan $100-26{,}3-53{,}7=20{,}0$ prosenttia eli 16,98 TWh. Oletusten mukaan vuonna 2009 käytetään sähköä $1{,}12\cdot 84{,}9=95{,}088$ (TWh). Tästä on omaa ydinsähköä $22{,}3287+14=36{,}3287$ (TWh), muuta kotimaista sähköä 45,5913 TWh ja tuontisähköä $95{,}088-36{,}3287-45{,}5913=13{,}168$ (TWh). Kotimaisen ydinvoiman prosentuaalinen osuus on $100\cdot 36{,}3287/95{,}088\approx 38{,}21$ ja tuontisähkön prosentuaalinen osuus $100\cdot 13{,}168/95{,}088\approx 13{,}848$.

Vastaus: Ydinsähkön osuus on 38,2 % ja tuontisähkön 13,8 %.

4. Yhtälöstä $2x-3=3x-2$ saadaan leikkauspisteen x-koordinaatiksi $x=-1$. Vastaava y-koordinaatti on $y=2(-1)-3=-5$. Suoran s kulmakerroin on $\frac{7+5}{7+1}=\frac{3}{2}$, joten suoran yhtälö on $y-7=\frac{3}{2}(x-7)$ eli $3x-2y=7$.

Vastaus: $P=(-1,-5)$ ja suoran yhtälö on $3x-2y=7$.

5. Maustetun teen kilohinta on $3{,}30/0{,}150=22$ (euroa). Mustan teen määrälle x kg saadaan hinnoista yhtälö $3{,}30+5{,}50x=\frac{1}{2}\cdot 22(0{,}150+x)$ eli $5{,}50x=1{,}65$. Tämän ratkaisu on $x=0{,}3$.

Vastaus: 300 g.

6. Olkoon C suoraan harjan A alapuolella räystään alareunan tasossa ja olkoon AC:n pituus x m. Janan BC pituus on $7{,}64/2+0{,}54=4{,}36$ (m). Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan, että $\dfrac{x}{4{,}36}=\dfrac{1{,}80}{7{,}64/2}$. Tästä saadaan $x\approx 2{,}05445$. Lappeen pituus on nyt $AB=\sqrt{x^2+4{,}36^2}\approx 4{,}8198$ (m).

Vastaus: $AB\approx 4{,}82$ m.

7. Maapallon säde on $r = 40\,000/(2\pi) \approx 6366{,}1977$ (km) ja pinta-ala $4\pi r^2$. Merien pinta-ala $A = 0{,}7 \cdot 4\pi r^2 \approx 3{,}56507 \cdot 10^8$ km^2. Merien pinta nousisi $150/A \approx 4{,}207 \cdot 10^{-7}$ km $=$ 0,4207 mm.

Vastaus: 0,42 mm.

8. Valmistettakoon maalia A x litraa ja maalia B y litraa. Keltaiselle pigmentille pätee $80x + 120y = 3200$ ja siniselle $110x + 90y = 3500$. Sieventämällä saadaan yhtälöt $4x + 6y = 160$ ja $11x + 9y = 350$. Eliminoimalla y saadaan $x = 22$, josta edelleen $y = (160 - 4 \cdot 22)/6 = 12$.

Vastaus: Maalia A 22 l ja maalia B 12 l.

9. Jyviä kertyy n:lle ensimmäiselle ruudulle $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$. Tämä on geometrinen summa, jonka suuruus on $(1 - 2^n)/(1 - 2) = 2^n - 1$. Ruutujen määrälle n saadaan annetuista massoista ehto $0{,}025(2^n - 1) = 700 \cdot 10^9$ eli $2^n = 28 \cdot 10^{12} + 1 \approx 28 \cdot 10^{12}$. Ottamalla logaritmit saadaan $n \lg 2 \approx \lg 28 + 12$, josta $n \approx 44{,}67049$. Näin ollen 44 ruutua peittyy vaaditulla tavalla.

Vastaus: 44 ruutua.

10. Suora $y = x - 2$ kulkee pisteiden $(2,0)$ ja $(4,2)$ kautta. Koska origo toteuttaa epäyhtälön $y \geq x - 2$, ovat epäyhtälön toteuttavat pisteet suoran $y = x - 2$ yläpuolella. Suora $7x + 2y = 14$ kulkee pisteiden $(2,0)$ ja $(0,7)$ kautta. Koska origo ei toteuta epäyhtälöä $7x + 2y \geq 14$, ovat epäyhtälön toteuttavat pisteet suoran $7x + 2y = 14$ oikealla puolella. Suora $5x + 4y = 28$ kulkee pisteiden $(0,7)$ ja $(4,2)$ kautta. Koska origo toteuttaa epäyhtälön $5x + 4y \leq 28$, ovat epäyhtälön toteuttavat pisteet suoran $5x + 4y = 28$ vasemmalla puolella. Tästä seuraa, että kaikki kolme epäyhtälöä toteuttavat pisteet ovat kolmiossa, jonka kärjet ovat em. pisteissä $(2,0)$, $(4,2)$ ja $(0,7)$ reunajanat mukaanluettuina.

11. Todennäköisyys sille, että pallo menee reikään etäisyydeltä r cm ($r \geq 80$) on $P(r) = a/r^2$. Verrannollisuuskerroin a määräytyy ehdosta $P(80) = 1$ eli $a/80^2 = 1$, josta saadaan $a = 6400$. Todennäköisyys, että pallo menee reikään etäisyydeltä 300 cm, on $P(300) = 6400/90000 = 16/225$. Todennäköisyys, että yksikään kymmenestä pallosta ei mene reikään, on $(1 - P(300))^{10}$. Lopulta todennäköisyys sille, että kymmenestä pallosta ainakin yksi menee reikään, on edellisen komplementti eli on $1 - (1 - P(300))^{10} \approx 1 - 0{,}4782 = 0{,}5218$.

Vastaus: Todennäköisyydellä 0,522.

12. Olkoon ympyrän kehän pituus x (cm), jolloin neliön piiri on $120 - x$ (cm). Ympyrän säde on $\frac{1}{2\pi}x$ ja neliön sivu $30 - \frac{1}{4}x$. Ympyrän ja neliön alojen summa on $f(x) = \pi(\dfrac{x}{2\pi})^2 + (30 - \dfrac{x}{4})^2 = (\dfrac{1}{4\pi} + \dfrac{1}{16})x^2 - 15x + 900$. Sen derivaatta, $f'(x) = (\dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{1}{8})x - 15 = \dfrac{4+\pi}{8\pi}x - 15$, häviää, kun $x = x_0 = \dfrac{120\pi}{4+\pi} \approx 52{,}7881$. Tällöin $120 - x_0 \approx 67{,}2119$. Koska $f'(x) < 0$, kun $0 < x < x_0$ ja $f'(x) > 0$, kun $x_0 < x < 120$, antaa x_0 pienimmän arvon.

Vastaus: Ympyrän osuus langasta on 52,8 cm ja neliön 67,2 cm.

13. Polynomin $p(x)$ derivaatta on $p'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2$. Nyt $p'(0{,}5) = 0{,}421875$ ja $f'(0{,}5) = \dfrac{1}{2\sqrt{1{,}5}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \approx 0{,}408248$. Näiden derivaatta-arvojen prosentuaalinen ero on $100 \cdot \dfrac{p'(0{,}5) - f'(0{,}5)}{f'(0{,}5)} \approx 3{,}3378$.

Vastaus: 3,34 %

14. Tulevan maksun K nykyarvo saadaan kaavasta $K = q^{-t}K$, missä $q = 1 + p/100$ on korkotekijä, p korkokanta ja t aika korkojaksoina. Tämän mukaan Matin maksuosuuden nykyarvo on $K_M = 32\,000 + (q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + q^{-4})900$ euroa ja Tepon $K_T = 30\,500 + (q^{-1} + q^{-2})2500$ euroa. Kun korkokanta $p = 1{,}95$ %, on $q = 1{,}0195$. Tällöin $K_M = 35\,431{,}12$ euroa ja $K_T = 35\,357{,}46$ euroa. Puimurin nykyarvo on $K_M + K_T = 70\,788{,}58$ euroa ja maksuosuuksien ero $K_M - K_T = 73{,}66$ euroa

Vastaus: Nykyarvo on 70 788,58 euroa ja maksuosuuksien ero 73,66 euroa.

15. **A)** Valmistajan mukaan todennäköisyys sille, että lamppu ei kestä 8000 tuntia, on $P = 0{,}01$, jolloin lamppu kestää 8000 tuntia todennäköisyydellä $Q = 0{,}99$. Todennäköisyys, että 50 lampun joukossa on korkeintaan yksi lamppu, joka ei kestä 8000 tuntia, on $p = Q^{50} + \binom{50}{1}Q^{49}P \approx 0{,}910565$. Todennäköisyys, että joukossa on vähintaan kaksi lamppua, jotka eivät kestä 8000 tuntia, on $q = 1 - p \approx 0{,}089435$ eli $q \approx 8{,}9$ %. Koska $8{,}95 > 5$, ei 5 % riskitasolla ole syytä epäillä valmistajan ilmoituksen luotettavuutta.

15. **B)** Vektorin $\bar{a} = 2\bar{i} + \frac{3}{2}\bar{j}$ pituus on $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$. Vastaavasti vektorin $\bar{b} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ pituus on $|\bar{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Jos vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ asetetaan alkamaan origosta, on vektorin $\bar{a}$ päätepiste $(2, \frac{3}{2})$ ja vektorin $\bar{b}$ päätepiste $(3, 4)$. Näin ollen vektorin $\bar{a}$ suuntakulmalle α x-akseliin nähden pätee $\tan\alpha = \frac{3}{2}/2 = \frac{3}{4}$, josta $\alpha \approx 36{,}870°$. Vastaavasti vektorin $\bar{b}$ suuntakulmalle β x-akseliin nähden pätee $\tan\alpha = \frac{4}{3}$, josta $\beta \approx 53{,}130°$. Lopulta $\bar{a} + \bar{b} = (2+3)\bar{i} + (\frac{3}{2} + 4)\bar{j} = 5\bar{i} + \frac{11}{2}\bar{j}$ ja $\bar{a} - \bar{b} = (2-3)\bar{i} + (\frac{3}{2} - 4)\bar{j} = -\bar{i} - \frac{5}{2}\bar{j}$.