YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

19.9.2007

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä ($\star$) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. a) Ratkaise epäyhtälö $2 - 3x > 4x$.
b) Muodosta sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden $(4, -3)$ ja $(-2, 6)$ kautta.
c) Ratkaise L yhtälöstä $t = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

2. a) Olkoon $f(x) = \sin x \cos x$. Laske derivaatta $f'(0)$.
b) Laske integraali $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^3}\, dx$.
c) Määritä se funktion $e^x + 1$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(0, -2)$ kautta.

3. Kolmiossa ABC on $\overrightarrow{AB} = 2{,}2\,\bar{i} + 7{,}3\,\bar{j}$ ja $\overrightarrow{AC} = 5{,}9\,\bar{i} - 2{,}1\,\bar{j}$. **a)** Määritä kolmanteen sivuun liittyvä vektori $\overrightarrow{BC}$. **b)** Osoita, että BC on kolmion pisin sivu. **c)** Määritä kulman BAC suuruus pistetulon (skalaaritulon) avulla 0,1 asteen tarkkuudella.

4. Tuotteen hintaa korotettiin p prosenttia, jolloin menekki väheni. Tämän johdosta hinta päätettiin alentaa takaisin alkuperäiseksi. Kuinka monta prosenttia korotetusta hinnasta alennus oli?

5. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ niiden tangenttien yhtälöt, jotka kulkevat pisteen $(1, 3)$ kautta.

6. Viisi kilometriä pitkän rantaa pitkin kulkevan suoran tieosuuden alkupisteessä kulkija näkee majakan etuviistossa 65 asteen kulmassa tiehen nähden. Tieosuuden loppupisteessä hän näkee saman majakan takaviistossa 54 asteen kulmassa tiehen nähden. Kuinka etäällä majakka on tiestä? Mikä tien piste on lähinnä majakkaa?

7. Suoran kolmisivuisen pyramidin pohja on tasasivuinen kolmio. Pyramidin sivusärmän pituus on 60 cm. Miten on pohjasärmän pituus valittava, jotta pyramidin tilavuus olisi mahdollisimman suuri?

8. Henkilön työmatkalla on kolmet liikennevalot, jotka toimivat toisistaan riippumattomasti. Ne näyttävät henkilön kulkusuuntaan vihreätä valoa 30 %, 40 % ja 20 % ajasta. Laske todennäköisyys, että henkilö joutuu pysähtymään valoihin enintään kerran.

9. Olkoon

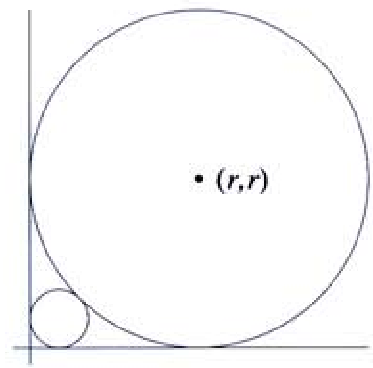
$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

Millä muuttujan x arvoilla funktio f on määritelty? Millä väleillä funktio on kasvava ja millä vähenevä? Mitä arvoja funktio ei saa?

KÄÄNNÄ!

10. Käyrä $y = |\sin 2x|$ ja suora $y = 1$ rajoittavat tasoalueen, kun $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$. Määritä sen pinta-ala.

11. Ympyrän keskipiste on (r, r) ja säde r. Asetetaan uusi ympyrä siten, että se sivuaa koordinaattiakseleita ja alkuperäisen ympyrän origonpuoleista neljänneskaarta (kuva). **a)** Määritä tämän ympyrän säde. **b)** Muodostetaan päättymätön jono ympyröitä siten, että ensimmäinen ympyrä vastaa arvoa $r = 1$ ja jonon seuraava ympyrä saadaan edellisestä aina edellä kuvatulla menettelyllä. Laske ympyröiden yhteenlaskettu pinta-ala. Anna tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.



12. Osoita, että funktiolla $f : [2, 5] \to [25, 52]$, $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x$ on käänteisfunktio $g = f^{-1}$. Laske käänteisfunktion arvo $g(45)$ ja sen derivaatan arvo $g'(45)$.

13. Osoita, että luku $n^3 - n$ on jaollinen luvulla 6, kun n on luonnollinen luku.

⋆14. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \cos x$, on aidosti kasvava ja että se saa kaikki reaalilukuarvot. Päättele, että tällöin yhtälöllä $f(x) = 0$ on vain yksi ratkaisu, ja määritä se kolmen desimaalin tarkkuudella.

⋆15. Origokeskinen r-säteinen ympyrä leikkaa y-akselin pisteessä A ja $(1, 0)$-keskisen yksikkösäteisen ympyrän pisteessä B. Pisteet A ja B sijaitsevat samalla puolella x-akselia. Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora leikkaa x-akselin pisteessä P. Määritä sen pisteen koordinaatit, jota P lähestyy, kun $r \to 0$.

Pitkä matematiikka 19.9.2007, ratkaisut:

1. a) $2 - 3x > 4x \iff 7x < 2 \iff x < \frac{2}{7}$.

   b) Kulmakerroin on $\frac{6+3}{-2-4} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$. Suoran yhtälö on $y + 3 = -\frac{3}{2}(x-4) \iff 2y + 6 = -3x + 12 \iff 3x + 2y = 6$.

   c) Korottamalla neliöön saadaan $t^2 = \dfrac{1}{4\pi^2 LC}$, josta $L = \dfrac{1}{4\pi^2 Ct^2}$.

2. a) $f'(x) = \cos x D\sin x + \sin x D\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$, joten $f'(0) = \cos^2 0 - \sin^2 0 = 1$.

   b) $\int_1^3 \dfrac{1}{x^3}dx = -\bigg/_1^3 \dfrac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2}(\frac{1}{9} - 1) = \frac{4}{9}$.

   c) Integraalifunktio $F(x) = \int(e^x + 1)dx = e^x + x + C$. On oltava $F(0) = -2$ eli $e^0 + C = -2$, josta $C = -3$. Integraalifunktio on $e^x + x - 3$.

3. a) Vektori $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = (5{,}9 - 2{,}2)\overline{i} + (-2{,}1 - 7{,}3)\overline{j} = 3{,}7\overline{i} - 9{,}4\overline{j}$.

   b) Sivujen pituudet ovat $|\overline{AB}| = \sqrt{2{,}2^2 + 7{,}3^2} \approx 7{,}62430$, $|\overline{AC}| = \sqrt{5{,}9^2 + 2{,}1^2} \approx 6{,}26259$, $|\overline{BC}| = \sqrt{3{,}7^2 + 9{,}4^2} \approx 10{,}10198$. Tästä näkyy, että $|\overline{BC}| > |\overline{AB}| > |\overline{AC}|$.

   c) Kulmalle $\alpha = \angle BAC$ pätee $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} \approx -0{,}049216$, joten $\alpha \approx 92{,}8^\circ$.

4. Olkoon a alkuperäinen hinta. Korotettu hinta oli $(1 + p/100)a$. Jos x %:n alennus palauttaa alkuperäiseen hintaan, on $(1 - x/100)(1 + p/100)a = a$. Yhtälö sieventyy muotoon $x(1 + p/100) = p$, josta saadaan $x = \dfrac{p}{1 + p/100} = \dfrac{100p}{100 + p}$.

   Vastaus: Alennus oli $\dfrac{100p}{100+p}$ %.

5. Täydentämällä neliöksi saadaan ympyrän yhtälö muotoon $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Ympyrän keskipiste on siis $(-2, 1)$ ja säde 2. Piste $(1, 3)$ on ympyrän ulkopuolella. Siitä ympyrälle piirretyt tangentit ovat muotoa $y - 3 = k(x-1)$. Keskipisteen etäisyyden tangentista on oltava kaksi. Tästä saadaan kulmakertoimelle k ehto $\dfrac{|-2k - 1 - k + 3|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$, joka sievenee muotoon $5k^2 - 12k = 0$. Ratkaisut ovat $k = 0$ ja $k = \frac{12}{5}$. Vastaavat tangentit ovat $y = 3$ ja $12x - 5y + 3 = 0$.

   Vastaus: $y = 3$ ja $12x - 5y + 3 = 0$.

6. Olkoon x majakan etäisyys tiestä ja y lähimmän pisteen etäisyys tien alkupisteestä. Tällöin $\dfrac{x}{y} = \tan 65^\circ$ ja $\dfrac{x}{5-y} = \tan 54^\circ$. Sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä saatu $x = y\tan 65^\circ$ toiseen yhtälöön saadaan $y\tan 65^\circ = (5-y)\tan 54^\circ$. Tästä ratkeaa y, $y = \dfrac{5\tan 54^\circ}{\tan 54^\circ + \tan 65^\circ} \approx 1{,}9546$ (km) ja edelleen $x \approx 4{,}1916$ km.

   Vastaus: Majakka on 4,192 km tiestä. Alkupäästä 1,955 km päässä oleva piste on lähinnä majakkaa.

7. Pohjan ala on $A = \frac{1}{4}\sqrt{3}x^2$, missä x on pohjasärmän pituus. Jos sivusärmän pituus on a, on pyramidin korkeus $h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}x^2}$. Pyramidin tilavuus $V(x) = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{a^2x^4 - \frac{1}{3}x^6}$. Riittää tarkastella juurrettavaa $f(x) = a^2x^4 - \frac{1}{3}x^6$. Derivaatta $f'(x) = 4a^2x^3 - 2x^5 = 2x^3(2a^2 - x^2)$ häviää, kun $x = 0$ tai $x = \pm a\sqrt{2}$. Koska $x > 0$ ja $f'(x) > 0$, kun $0 < x < a\sqrt{2}$ sekä $f'(x) < 0$, kun $x > a\sqrt{2}$, antaa $x = a\sqrt{2}$ f:n ja samalla V:n suurimman arvon. Arvolla $a = 60$ cm, on $x = 60\sqrt{2} \approx 84{,}853$ cm.

Vastaus: Sivusärmän pituudeksi on valittava $60\sqrt{2}$ cm $\approx 84{,}9$ cm.

8. Vihreän valon todennäköisyys on ensimmäisissä valoissa $p_1 = 0{,}3$, toisissa $p_2 = 0{,}4$ ja kolmansissa $p_3 = 0{,}2$. Todennäköisyys, että joutuu pysähtymään enintään kerran, on $p = p_1p_2p_3 + p_1p_2(1 - p_3) + p_1(1 - p_2)p_3 + (1 - p_1)p_2p_3 = 0{,}212$.

Vastaus: 21,2 %

9. Funktio on määritelty, kun $x > 0$ ja $\ln x \neq 0$ eli $x \neq 1$. Funktion derivaatta $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$. Kun $0 < x < 1$, on $\ln x < 0$ ja samalla $f'(x) < 0$. Kun $x > 1$, on $f'(x) < 0$, kun $\ln x < 1$ eli $1 < x < e$ ja $f'(x) > 0$, kun $\ln x > 1$ eli $x > e$. Siten funktio on vähenevä kun $0 < x < 1$ tai $1 < x < e$ ja kasvava, kun $x > e$.
Alueessa $x > 1$ funktio on jatkuva ja $f'(x) = 0$, kun $\ln x = 1$ eli $x = e$. Edellisen perusteella funktio saa tässä pienimmän arvonsa $f(e) = e$. Koska $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, saa funktio kaikki arvot väliltä $[e, \infty[$, kun $x > 1$. Alueessa $0 < x < 1$ funktio on myös jatkuva ja $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Lisäksi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Siten funktio saa kaikki arvot väliltä $]-\infty, 0]$, kun $0 < x < 1$. Näin ollen funktio ei saa arvoja väliltä $[0, e[$.

10. Aina $|\sin 2x| \leq 1$. Edelleen välillä $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ on $\sin 2x \geq 0$, kun $\frac{1}{4}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ ja $\sin 2x \leq 0$, kun $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$. Näin ollen tasoalueen pinta-ala on

$A = \int_{\pi/4}^{\pi/2}(1 - \sin 2x)dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/4}(1 + \sin 2x)dx =$

$$\Big/_{\pi/4}^{3\pi/4} x + \Big/_{\pi/4}^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\cos 2x - \Big/_{\pi/2}^{3\pi/4} \tfrac{1}{2}\cos 2x = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}(2\cos\pi - \cos\tfrac{1}{2}\pi - \cos\tfrac{3}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi - 1.$$

Vastaus: $\frac{1}{2}\pi - 1$.

11. **a)** Pisteiden $O = (0, 0)$ ja $A = (r, r)$ välisen janan pituus on $r\sqrt{2}$. Jos uuden ympyrän keskipiste on pisteessä $B = (x, x)$, on janan OB pituus $x\sqrt{2}$. Tästä tulee OA:n pituudelle lauseke $OA = r + x + x\sqrt{2}$. On saatu yhtälö $x(\sqrt{2} + 1) + r = r\sqrt{2}$, josta ratkeaa uuden ympyrän säteeksi $x = r\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = r(\sqrt{2} - 1)^2$.

b) Merkitään $q = (\sqrt{2} - 1)^2$, jolloin a)-kohdan $x = rq$. Kolmannen ympyrän säde on a)-kohdan mukaan $qx = rq^2$. Vastaavasti neljännen ympyrän säde on rq^3 ja yleisesti n:nen ympyrän säde rq^{n-1}. Ympyröiden pinta-alojen muodostama jono πr^2, πr^2q^2, πr^2q^4, ,... on geometrinen jono, jossa suhdeluku on q^2. Koska $0 < q^2 < 1$, on alojen summa suppeneva geometrinen summa $S = \pi r^2\dfrac{1}{1 - q^2}$. Arvolla $r = 1$ saadaan sievennysten jälkeen $S = \pi\dfrac{1}{1 - (\sqrt{2} - 1)^4} = \frac{1}{8}\pi(3\sqrt{2} + 4) \approx 3{,}236878$.

Vastaus: **a)** $r(\sqrt{2} - 1)^2$, **b)** $\frac{1}{8}\pi(3\sqrt{2} + 4) \approx 3{,}237$.

12. Funktion derivaatta $f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$ häviää, kun $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$ eli kun $x = 2$ tai $x = 5$. Koska f':n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, on $f'(x) < 0$, kun $2 < x < 5$. Näin ollen f on aidosti vähenevä välillä $[2,5]$, joten sillä on käänteisfunktio $g = f^{-1}$. Koska $f(2) = 52$ ja $f(5) = 25$ on $g : [25, 52] \to [2,5]$. Koska $f(3) = 45$, on $g(45) = 3$. Lopulta $g'(45) = \dfrac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{12}$.

13. $n^3 - n = n(n^2-1) = (n+1)n(n-1)$. Näin ollen $n^3 - n$ on aina kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo. Kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta on aina yksi jaollinen kolmella ja ainakin yksi jaollinen kahdella. Niiden tulo on siis aina jaollinen luvulla $2 \cdot 3 = 6$, mikä piti todistaa.

***14.** Funktion derivaatta $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ kaikilla arvoilla x ja saa arvon 0 vain erillisissä pisteissä $x = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$. Näin ollen f on aidosti kasvava.

Funktio f on jatkuva. Koska aina $x - 1 \leq f(x)$, on $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ja koska aina $f(x) \leq x + 1$, on $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Näin ollen $f(x)$ saa kaikki reaalilukuarvot. Koska f on aidosti kasvava, saa se jokaisen reaalilukuarvon vain yhden kerran.

Koska $f(0) = -\cos 0 = -1 < 0$ ja $f(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi > 0$, on f:n ainoa nollakohta välillä $]0, \frac{1}{2}\pi[$. Newtonin algoritmi funktiolle f on $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$. Alkuarvolla $x_0 = 0{,}785398$ ($\approx \frac{1}{4}\pi$) saadaan $x_2 = 0{,}739085 = x_3$. Näin ollen nollakohta on kolmen desimaalin tarkkudella 0,739.

***15.** Pisteen A koordinaatit ovat $(0, r)$. Origokeskisen ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = r^2$ ja $(1,0)$-keskisen ympyrän yhtälö $(x-1)^2 + y^2 = 1$ eli $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan B:n x-koordinaatiksi $x = \frac{1}{2}r^2$. B:n y-koordinaatti $y = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2}$. Siis $B = (\frac{1}{2}r^2, r\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2})$. Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran yhtälö on $y - r = kx$, missä kulmakerroin $k = \dfrac{r - r\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2}}{-\frac{1}{2}r^2} = \dfrac{2}{r}(\sqrt{1 - \dfrac{1}{4}r^2} - 1)$. P:n y-koordinaatti on 0, joten x-koordinaatti $x_P = -\dfrac{r}{k} = -\dfrac{r^2}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2} - 1} = 2(\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2} + 1)$. Tällä on raja-arvo $\lim_{r\to 0} x_P = 2(\sqrt{1} + 1) = 4$.