Lyhyt matematiikka 17.9.2008, ratkaisut:

1. **a)** $4x^2 + 9 = -12x \iff 4x^2 + 12x + 9 = 0$. Tämän ratkaisu on
$x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{8} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{0}}{8} = -\dfrac{3}{2}$.

b) Kertomalla $(x-1)$:llä saadaan yhtälö muotoon $x^2 - x = x^2 + 3$ eli $-x = 3$. Sen ratkaisu on $x = -3$.

c) $\dfrac{5x + 3y}{3} + \dfrac{x - 6y}{2} = \dfrac{10x + 6y + 3x - 18y}{6} = \dfrac{13x - 12y}{6} = \frac{13}{6}x - 2y$.

2. **a)** Suoran yhtälö on $y - 0 = \dfrac{7-0}{1+2}(x+2)$ eli $y = \frac{7}{3}(x+2)$ eli $y = \frac{7}{3}x + \frac{14}{3}$.

b) Pallon säteelle r m pätee: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 1000 \iff r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1000}{4\pi}} \approx 6{,}20350$. Säde on siis 6,20 m.

c) $2^x = 1024 \iff 2^x = 2^{10} \iff x = 10$.

3. **a)** Neljän kirjaimen järjestysten määrä on 4! eli 24.

b) Kääntäen verrannollisuudessa $y = \dfrac{a}{x}$, missä a on verrannollisuuskerroin. Kun $x = 2$, on $y = 3$, joten $3 = a/2$. Tästä saadaan $a = 6$. Arvolla $x = 5$ on $y = \frac{6}{5}$.

Vastaus: **a)** 24:ään järjestykseen, **b)** $y = \frac{6}{5}$.

4. Olkoon käyttökustannukset a, jolloin polttoainekustannukset ovat $0{,}35a$ ja muut käyttökustannukset $0{,}65a$. Jos kysytty kallistuminen on x %, on oltava $(1+0{,}01x)0{,}35a + 0{,}65a = 1{,}1a$ eli $0{,}01 \cdot 0{,}35x = 0{,}1$. Tästä saadaan $x = \frac{10}{0{,}35} \approx 28{,}5714$.

Vastaus: 28,6 %.

5. Liisan reitin pituus on $0{,}8 + 0{,}4 + 1{,}5 = 2{,}7$ (km). Hän käytti aikaa 20 min 30 s, joten keskinopeus oli $\dfrac{2{,}7 \cdot 60}{20{,}5} \approx 7{,}902$ (km/h). Tarkastellaan sitten Piaa. Olkoon D piste, jossa hän eroaa Liisasta ja E piste, jossa hän kääntyy etelään. Pian reitin pituus on siis $AE + EC$. Kolmiosta ABD saadaan $AB = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}4^2} \approx 0{,}894427$. Näin ollen $AC = AB + BC \approx 2{,}394427$. Yhdenmuotoisista kolmioista ABD ja ACE saadaan $EC = \dfrac{AC \cdot BD}{AB} \approx 1{,}07082$. Edelleen $AE = \dfrac{AD \cdot EC}{BD} = 2EC \approx 2{,}14164$. Pian reitin pituus on $AE + EC \approx 3{,}21246$ (km). Hän käytti aikaa 20 min 30 s + 3 min 20 s $\approx 23{,}8333$ min. Pian keskinopeus oli $\dfrac{3{,}21246 \cdot 60}{23{,}8333} \approx 8{,}087$ (km/h).

Vastaus: Liisan reitin pituus oli 2,7 km ja keskinopeus 7,9 km/h. Pian reitin pituus oli 3,2 km ja keskinopeus 8,1 km/h.

6. Jos ensimmäistä seosta tarvitaan x g, on siinä $0{,}25x$ g nikkeliä. Jos toista seosta tarvitaan y g, on siinä $0{,}20y$ g nikkeliä. Lopullisessa seoksessa on oltava nikkeliä $0{,}22 \cdot 300 = 66$ (g) Koska $y = 300 - x$, saadaan yhtälö $0{,}25x + 0{,}20(300 - x) = 66$ eli $0{,}05x = 6$. Tämän ratkaisu on $x = 120$, jolloin $y = 300 - 120 = 180$.
Vastaus: Ensimmäistä seosta 120 g ja toista 180 g.

7. Olkoon A pyramidin huippu, B pohjan keskipiste ja C sekä D vierekkäiset pohjaneliön kärkipisteet. Jos E on särmän CD keskipiste, on $BE = 6$. Suorakulmaisesta kolmiosta ABE saadaan $AE = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Sivutahkon ACD ala on $\frac{1}{2}AE \cdot CD = 60$. Suorakulmaisessa kolmiossa BCE on $BC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$. Sivusärmän ja pohjatahkon väliselle kulmalle $\alpha = \angle ACB$ saadaan tästä yhtälö $\tan\alpha = \frac{8}{6\sqrt{2}}$, josta ratkeaa $\alpha \approx 43{,}3139^{\circ}$.

Vastaus: Sivutahkon ala on 60. Sivusärmä muodostaa pohjatahkon kanssa $43{,}31^{\circ}$ kulman.

8. Suora $y = -3x + 2$ leikkaa x-akselin pisteessä $x = \frac{2}{3}$. Jos tämä on kolmen mittaisen janan päätepiste, toinen päätepiste on joko $x = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}$ tai $x = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$. Toinen suora $y = ax + 6$ kulkee pisteen $(\frac{11}{3}, 0)$ kautta, kun $0 = \frac{11}{3}a + 6$ eli kun $a = -\frac{18}{11}$. Vastaavasti $y = ax + 6$ kulkee pisteen $(-\frac{7}{3}, 0)$ kautta, kun $0 = -\frac{7}{3}a + 6$ eli kun $a = \frac{18}{7}$.

Vastaus: Arvolla $a = -\frac{18}{11}$ ja arvolla $a = \frac{18}{7}$.

9. Olkoon A linkkitornin huippu, B Tallinnan paikka, josta A juuri näkyy. Jana AB sivuaa maapallon pintaa pisteessä C. Jos O on maapallon keskipiste, on CO kolmion AOB korkeusjana. Kolmion kulmalle $\alpha = \angle AOB$ saadaan arvo $\alpha = \dfrac{85}{40000} \cdot 360^{\circ} = 0{,}765^{\circ}$. Maapallon säde on $r = \dfrac{40000}{2\pi} \approx 6366{,}1977$ (km). Suorakulmaisesta kolmiosta AOC saadaan yhtälö kulmalle $\beta = \angle AOC$, $\cos\beta = \dfrac{r}{r + 0{,}146}$, josta saadaan $\beta \approx 0{,}388034^{\circ}$. Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota BOC. Siinä kulma $\gamma = \angle BOC = \alpha - \beta \approx 0{,}376966^{\circ}$. Jos pisteen B korkeus merenpinnasta on x km, saadaan sille yhtälö $\cos\gamma = \dfrac{r}{r + x}$. Tästä saadaan $x = r(\dfrac{1}{\cos\gamma} - 1) \approx 0{,}13779$.

Vastaus: 138 m korkeudelta.

10. Kukin jonon termi saadaan edellisestä kertomalla se luvulla $q = 1{,}05$. Näin ollen jonon toinen termi on $2q$, kolmas $2q^2$ ja neljäs $2q^3$. Kyseessä on geometrinen jono, jonka n:s termi on $2q^{n-1}$. Jonon jokainen termi on edellistä suurempi. Tutkitaan milloin $2q^{n-1} < 10^9$ eli $q^{n-1} < 0{,}5 \cdot 10^9$. Ottamalla puolittain logaritmi saadaan ehto $n < 1 + \dfrac{\lg(0{,}5 \cdot 10^9)}{\lg q} = 1 + \dfrac{9 + \lg 0{,}5}{\lg 1{,}05} \approx 411{,}536$. Siis 411 termiä jää alle annetun rajan. Näiden termien summa on $S = 2 \cdot \dfrac{1 - q^{411}}{1 - q} \approx 2{,}04579 \cdot 10^{10}$.

Vastaus: n:s termi on $2 \cdot 1{,}05^{n-1}$, 411 termiä alittaa 1000 miljoonaa ja näiden termien summa on $2{,}046 \cdot 10^{10}$.

11. **a)** Todennäköisyys sille, että siemen itää, on 0,6 ja sille, ettei idä 0,4. Todennäköisyys sille, että kolmesta siemenestä mikään ei idä on $0{,}4^3 = 0{,}064$. Todennäköisyys sille, että kolmesta ainakin yksi itää on $1 - 0{,}4^3 = 0{,}936$.

b) Todennäköisyys sille, että yhdessä ruukussa ainakin yksi siemen itää, on 0,936. Todennäköisyys sille, että jokaisessa viidessä ruukussa ainakin yksi siemen itää, on $0{,}936^5 \approx 0{,}718$.

12. Funktion $-x^3 + 13{,}5x^2 - 41x + 50$ derivaatta $f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$. Derivaatta häviää, kun $x = \dfrac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 12 \cdot 41}}{-6} = \dfrac{27 \pm \sqrt{237}}{6}$ eli arvoilla $x_1 \approx 7{,}06580$ ja $x_2 \approx 1{,}93420$. Nyt $f(0) = 50$, $f(x_2) \approx 13{,}967$, $f(x_1) \approx 81{,}533$ ja $f(10) = -10$. Tämän perusteella suurin arvo on $f(x_1)$. Funktio kasvaa nopeimmin kohdassa, missä derivaatalla on suurin arvo. Toinen derivaatta on $f''(x) = -6x + 27$. Se häviää, kun $x = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$. Koska $f'(0) = -41$, $f'(\frac{9}{2}) = 19{,}75$ ja $f'(10) = -71$, on $f'(\frac{9}{2})$ derivaatan suurin arvo.

Vastaus: Funktiolla on suurin arvo 81,533 pisteessä $x \approx 7{,}066$. Funktio kasvaa nopeimmin pisteessä $x = \frac{9}{2}$.

13. On määrättävä millä arvolla k funktio $f(k) = (k - 1{,}2)^2 + (2k - 3{,}1)^2 + (4k - 5{,}5)^2$ saa pienimmän arvon. Funktion sievennetty lauseke on $f(k) = 21k^2 - 58{,}8k + 41{,}30$. Funktion derivaatta on $f'(k) = 42k - 58{,}8$. Derivaatta häviää, kun $x = \frac{58{,}8}{42} = 1{,}4$. Koska funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, saa se pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa.

Vastaus: Arvolla $k = 1{,}4$.

14. Kun korkokanta on 2,2 % ja lähdevero 28 %, tulee lähdeverotetuksi korkokannaksi $q = 1 + 0{,}01 \cdot 0{,}72 \cdot 2{,}2 = 1{,}01584$. On määrättävä viitenä vuotena suoritetun 2500 euron maksun nykyarvo . Se on $2500(q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + q^{-4} + q^{-5}) \approx 11\,927{,}28$ (euroa).

Vastaus: Kertasumman tulee olla vähintään 11 927,28 euroa.

15. **A)** Valmiusajan pituuden 95 % luottamusväli on $[\overline{x} - 1{,}96 \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + 1{,}96 \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}]$. Tehtävän tapauksessa $\overline{x} = 253$ h, $s = 12$ h ja $n = 50$. Näillä arvoilla tulee luottamusväliksi tunneissa $[253 - 3{,}326;\ 253 + 3{,}326] = [249{,}674;\ 256{,}326]$. Jotta luottamusvälin pituus olisi kaksi tuntia, on oltava $2 \cdot 1{,}96 \cdot \dfrac{12}{\sqrt{n}} = 2$ eli $\sqrt{n} = 1{,}96 \cdot 12$. Siis $n = 553{,}1904$.

Vastaus: Luottamusväli on $[249{,}7; 256{,}3]$ tuntia. Sen pituus on kaksi tuntia, kun mitataan 553 akkua.

B) Funktio $f(t) = A \sin bt$ on jaksollinen. Jos joku alin asema saavutetaan arvolla t, saavutetaan seuraava arvolla $t + 3{,}2$. Koska sinin jakso on 2π, saadaan kertoimelle b ehto $b(t + 3{,}2) - bt = 2\pi$. Tästä saadaan $b = \frac{2\pi}{3{,}2} \approx 1{,}9634954$.

Vastaus: $b \approx 1{,}96350$.