YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA

17.9.2008

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä ($\star$) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

**1.** a) Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{2} - \frac{x}{3} > \frac{3}{4}$.

b) Sievennä lauseke $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1+x}{x^2}$.

c) Suora kulkee pisteen $(6, 8)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran $3x - 5y = 11$ kanssa. Muodosta suoran yhtälö.

**2.** a) Derivoi funktio $\frac{1-2x^2}{1+x^2}$.

b) Määritä kaikki funktiot, joiden derivaatta on $e^{3x} - x$.

c) Mille kokonaisluvulle $n$ pätee $5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n = 5^{25}$?

**3.** a) Laske $\int_0^{\pi} (1 + \sin x)\, dx$.

b) Ratkaise yhtälö $4x^3 - 5x^2 = 2x - 3x^3$.

**4.** Metsäpalstan harvennushakkuusta myytiin tukkipuita. Palstan puut olivat keskimäärin 14 m korkeita ja tyvestä halkaisijaltaan 35 cm. Latvaosa katkaistiin siten, että tukin latvanpuoleisen pään halkaisijaksi tuli 10 cm. Määritä tukin keskimääräinen pituus, kun kasvavaa puuta voidaan pitää suorana ympyräpohjaisena kartiona. Kuinka monta puuta palstalta kaadettiin, kun tukkipuuta saatiin kaikkiaan 200 $\text{m}^3$?

**5.** Kahdella kolmiolla on sama pinta-ala. Toisen kolmion sivujen pituudet ovat 5, 5 ja 4. Toisessa kolmiossa on kaksi sivua, joiden pituus on 5. Miten pitkä on kolmas sivu, kun kolmiot eivät ole yhteneviä?

**6.** Suorakulmion kärkipisteet ovat origossa, positiivisella $x$-akselilla, $y$-akselilla ja paraabelilla $y = x^2$. Missä suhteessa paraabeli jakaa suorakulmion pinta-alan?

**7.** Ratkaise yhtälön $\sqrt{2-x} = x + 2$ reaalijuuret.

**8.** Laatikossa on kaksi valkoista ja kolme mustaa palloa. Laatikosta otetaan umpimähkään kaksi palloa. Olkoon satunnaismuuttuja $X$ nostossa saatujen mustien pallojen lukumäärä. Laske todennäköisyydet $P(X = k)$, $k = 0,\ 1,\ 2$. Määritä odotusarvo $\mathrm{E}(X)$.

**9.** Ympyrälevystä, jonka säde on $r$, leikataan pois sektori, ja jäljelle jäänyt osa taivutetaan suoran ympyräkartion vaipaksi. Määritä pois leikatun sektorin keskuskulma asteen tarkkuudella, kun kartion tilavuus on mahdollisimman suuri.

**10.** Osoita, että jokaisella reaaliluvulla $x$ pätee $(1 - x)^8 \geq 1 - 8x$.

KÄÄNNÄ!

**11.** Vektorit $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$ $(\neq \bar{0})$ ja $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$ toteuttavat ehdon $\bar{a} \cdot \bar{a} = 2\bar{a} \cdot \bar{b}$. Osoita, että kolmio $OAB$ on tasakylkinen.

**12.** Määritä vakio $a$ siten, että funktiolla

$$f(x) = \frac{3x^3 - x^2 - 12x + a}{x + 2}, \quad x \neq -2,$$

on raja-arvo kohdassa $x = -2$. Mikä tämä raja-arvo on?

**13.** Funktion $f$ keskeisdifferenssillä pisteessä $x$ tarkoitetaan lauseketta

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Laske keskeisdifferenssi, kun $f(x) = x^3$. Osoita, että jokaiselle derivoituvalle funktiolle $f$ pätee

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

**⋆14.** Määrittele, mitä tarkoitetaan reaaliluvun $x$ itseisarvolla (1 p.).
Todista, että seuraavat epäyhtälöt ovat voimassa kaikille reaaliluvuille $x$ ja $y$:

a) $x \leq |x|$ (1 p.),
b) $x + y \leq |x| + |y|$ (2 p.),
c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (2 p.),
d) $\big||x| - |y|\big| \leq |x| + |y|$ (3 p.).

**⋆15.** Suoran $s_1$ yhtälö on $x - 2y = 0$ ja suoran $s_2$ yhtälö $2x - y = 0$. Suoralla $s_1$ olevan pisteen $A = (6, 3)$ kohtisuora projektio suoralla $s_2$ on $A_1$. Pisteen $A_1$ kohtisuora projektio suoralla $s_1$ on $A_2$, tämän projektio suoralla $s_2$ on $A_3$ jne. Määritä päättymättömän murtoviivan $AA_1A_2A_3\dots$ pituus.