Lyhyt matematiikka 25.9.2009, ratkaisut:

1. **a)** $\dfrac{1-5x}{5} = \dfrac{3+4x}{2} \iff 2(1-5x) = 5(3+4x) \iff 30x = -13 \iff x = -\frac{13}{30}$.

b) $(5+x^2) - (4x^2+x) = -3x^2 - x + 5$.
Sen arvo, kun $x = -2$, on $-3(-2)^2 - (-2) + 5 = -5$.

c) Yhtälön $4x^2 - 8x + 3 = 0$ ratkaisu on $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8} = \dfrac{8 \pm 4}{8}$
eli $x = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{3}{2}$.

2. **a)** $\dfrac{2+5+6+a}{4} = 2 \iff 2+5+6+a = 8 \iff a = -5$.

b) $5a^2 - (2a)^2 = 5a^2 - 4a^2 = a^2$.

c) Ei päde. Esimerkiksi, kun $x = -1$, $|-x| = 1 \neq -1 = x$.

Vastaus: **a)** $a = -5$, **b)** a^2, **c)** ei päde.

3. **a)** Jos $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4$, on $f'(x) = x^2 - 4x$.

b) Näissä kohdissa $f'(x) = 0$ eli $x^2 - 4x = x(x-4) = 0$ eli $x = 0$ tai $x = 4$.

c) Funktio on vähenevä, kun $f'(x) \leq 0$. Koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, näin on b)-kohdan perusteella, kun $0 \leq x \leq 4$.

Vastaus: **a)** $x^2 - 4x$, **b)** $x = 0$, $x = 4$, **c)** $0 \leq x \leq 4$.

4. Ostosten arvonlisäveroton hinta $h = \dfrac{54{,}35}{1{,}17} \approx 46{,}4530$ (euroa). Jos arvonlisäveroprosentti olisi $17 - 9 = 8$, olisi ostosten hinta $1{,}08h = 50{,}17$ (euroa). Ostosten hinta alenisi $54{,}35 - 50{,}17 = 4{,}18$ (euroa). Prosentteina alennus olisi $100 \cdot \dfrac{4{,}18}{54{,}35} \approx 7{,}69$.

Vastaus: Hinta alenisi 4,18 euroa. Prosenteissa alennus olisi 7,7.

5. Sektorin ala $A = \frac{105}{360}\pi \cdot 14^2 \approx 179{,}5944$ (m^2). Kasteluveden tarve on $0{,}004A \approx 0{,}718377\ \mathrm{m}^3 = 718{,}377\ \mathrm{dm}^3$. Sadettajaa on käytettävä $\dfrac{718{,}377}{32} \approx 22{,}4493$ (min) eli 22 min 27 s.
Vastaus: 22 min 30 s.

6. Olkoon ensinmainittu autoilija A, toinen B ja olkoot ryhmittymismerkit C tienkohdan D yläpuolella. Jos $AD = x$, saadaan suorakulmaisesta kolmiosta ACD, että $\dfrac{5}{x} = \tan 15^\circ \implies x = \dfrac{5}{\tan 15^\circ} \approx 18{,}66$ (m). Vastaavasti, jos $BD = y$, saadaan $\dfrac{5}{y} = \tan 35^\circ \implies y = \dfrac{5}{\tan 35^\circ} \approx 7{,}14$ (m). Autoilijoiden etäisyys on $x - y \approx 11{,}52$ (m).
Vastaus: 11,5 m.

7. Olkoon kasvu p prosenttia ja $q = 1 + \dfrac{p}{100}$. Tällöin $492\,400\,q^{10} = 555\,474$, josta saadaan $q = \sqrt[10]{\dfrac{555\,474}{492\,400}} \approx 1{,}0121260$. Siis $p = 100(q-1) \approx 1{,}21260$. Vuonna 2015 olisi väkiluku $492\,400\,q^{25} \approx 665\,552$.

Vastaus: Väkiluvun nousu oli 1,2 % vuodessa. Vuonna 2015 väkiluku olisi 665 552.

8. Lasipallon tilavuus $V_p = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 \approx 4{,}18879$ (cm^3). Jos lasin pohjan säde on r cm, on $\pi r^2 \cdot 0{,}7 = 5V_p$. Siis $r = \sqrt{\dfrac{5V_p}{0{,}7\pi}} = \sqrt{\dfrac{20}{3 \cdot 0{,}7}} \approx 3{,}08607$. Lasin pohjan halkaisija on $2r \approx 6{,}1721$ (cm).

Vastaus: 6,2 cm.

9. Normitetussa normaalijakaumassa on $z = \dfrac{x - 165}{6}$ ja $z_0 = \dfrac{175 - 165}{6} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}667$.
Tyttö on korkeintaan 175 cm pitkä todennäköisyydellä $\Phi(z_0) \approx 0{,}9522$.
Kolmen tytön ryhmässä kaikki ovat alle 175 cm todennäköisyydellä $\Phi(z_0)^3 \approx 0{,}8633$.
Ryhmässä on ainakin yksi yli 175 cm todennäköisyydellä $1 - \Phi(z_0)^3 \approx 0{,}1367$.

Vastaus: Todennäköisyydet ovat 0,95, 0,86 ja 0,14.

10. Olkoon julkisivun suuntaisen terassin sivun pituus x m, $0 \le x \le 8$, ja sitä vastaan kohtisuoran sivun pituus y m. Koska $x + 2y = 20$, on $y = 10 - \frac{1}{2}x$. Terassin pinta-ala $a(x) = x(10 - \frac{1}{2}x) = 10x - \frac{1}{2}x^2$. Sen derivaatta $a'(x) = 10 - x = 0$, kun $x = 10$. Derivaatan nollakohta ei kuulu tarkasteluvälille $0 \le x \le 8$. Koska $a(0) = 0$ ja $a(8) = 8(10-4) = 48$, saadaan arvoilla $x = 8$, $y = 10 - 4 = 6$ pinta-alan suurin arvo 48.

Vastaus: Suurin mahdollinen pinta-ala on 48 m^2. Sivut ovat tällöin 8 m ja 6 m.

11. Uusia asiakkaita tulee ensimmäisellä viikolla 2, toisella 2^2, kolmannella 2^3, neljännellä 2^4 ja viidennellä 2^5. Viidessä viikossa on saatu $2+4+8+16+32 = 62$ uutta asiakasta. Yleisesti uusia asiakkaita on saatu n viikossa $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$. Uusia asiakkaita on yli 10 000, kun $2^{n+1} - 2 > 10\,000$ eli, kun $(n+1)\log 2 > \log 10\,002$. Siis $n > \dfrac{\log 10\,002}{\log 2} - 1 \approx 12{,}29$.

Vastaus: Viidessä viikossa 62 uutta asiakasta. Yli 10 000 uuden asiakkaan määrään päästään 13 viikossa.

12. Suorien $x + y = 8$ ja $y = 3$ leikkauspisteessä A on $y = 3$ ja $x = 8 - 3 = 5$.
Suorien $x + 3y = 18$ ja $y = 3$ leikkauspisteessä B on $y = 3$ ja $x = 18 - 9 = 9$.
Suorien $x + y = 8$ ja $x + 3y = 18$ leikkauspisteessä C on $y = 5$ ja $x = 8 - 5 = 3$.
Kolmion kärkipisteet ovat siis $A = (5,3)$, $B = (9,3)$ ja $C = (3,5)$.
Kolmion kanta on AB ja korkeus pisteen C etäisyys suorasta $y = 3$. Kolmion ala on siten $\frac{1}{2}(9-5)(5-3) = 4$.
Tarkastellaan kolmion pistettä (5,4). Koska $5 + 4 > 8$, $5 + 3 \cdot 4 = 17 < 18$ ja $4 > 3$, epäyhtälöt $x + y \ge 8$, $x + 3y \le 18$ ja $y \ge 3$ määrittelevät kolmion.

Vastaus: Ala on 4. Epäyhtälöt ovat $x + y \ge 8$, $x + 3y \le 18$ ja $y \ge 3$.

13. Koordinaatistoon sijoitettuna lähtöpiste on origo ja putoamispiste (100,0). Lentoradan yhtälö on muotoa $y = y(x) = ax^2 + bx + c$. Koska $y(0) = 0$, on $c = 0$ eli $y = ax^2 + bx$. Koska $0 = y(100) = 100(100a + b)$, on $b = -100a$ eli $y(x) = a(x^2 - 100x)$ ja $y'(x) = a(2x - 100)$. Lähtösuuntaehdosta $y'(0) = \tan 70^\circ$ saadaan, että $a = -\dfrac{\tan 70^\circ}{100}$. Derivaatta $y'(x) = 0$, kun $x = 50$, joten paraabelin huippu on tässä kohdassa. Koska paraabeli aukeaa alaspäin, saavutetaan huipun kohdassa suurin korkeus. Se on $y(50) = -\dfrac{\tan 70^\circ}{100}(50^2 - 100 \cdot 50) = 25 \tan 70^\circ \approx 68{,}686935$.

Vastaus: Raketti kävi 68,7 metrin korkeudessa.

14. Koska $\cos 30^\circ = \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kun $3\alpha = \pm 30^\circ + n360^\circ$ eli kun $\alpha = \pm 10^\circ + n120^\circ$, $n \in \mathbf{Z}$. Arvoilla $n = 1, 2, 3$ saadaan α:n suuruudeksi 110°, 130°, 230°, 250°, 350°, 370°. Näistä 3., 4. ja 5. arvo kuuluvat kyseiselle välille.

Vastaus: $\alpha = \pm 10^\circ + n120^\circ$, $n \in \mathbf{Z}$. Välillä $[180^\circ, 360^\circ]$ ovat ratkaisut 230°, 250° ja 350°.

15. Nyt asuntolaina $K = 81600$ (euroa), korkoprosentti $p = 4{,}2$ ja kertalyhennys $L = 4800$ (euroa). Ensimmäisen vuoden lopussa korko on $\frac{p}{100}K$ ja lainaa jäljellä $K - L$. Toisen vuoden lopussa korko on $\frac{p}{100}(K-L) = 3225{,}60$ (euroa) ja lainaa jäljellä $K-2L$. Lainan takaisinmaksu kestää $\dfrac{K}{L} = \dfrac{81600}{4800} = 17$ vuotta. Tänä aikana maksetun koron määrä on $k = \frac{p}{100}(K + (K - L) + (K - 2L) + ... + (K - 16L)) = \frac{p}{100} \cdot 17(K - 8L) = 30\,844{,}80$ (euroa).

Vastaus: Toisen vuoden lopussa korko on 3225,60 euroa. Takaisinmaksu kestää 17 vuotta. Mauri maksaa kaikkiaan 30 844,80 euroa korkoa.