101

Todistus

Piste $(3,7)$ on käyrällä $y = x^2 - 2x + 4$, jos ja vain jos pisteen $(3,7)$ koordinaatit toteuttavat käyrän yhtälön.
Kun $x = 3$ ja $y = 7$, niin käyrän yhtälön

vasen puoli on 7 ja
oikea puoli on $3^2 - 2 \cdot 3 + 4 = 7$.

Siis piste $(3,7)$ on käyrällä. $\square$

102

Käyrä $4x^2 + 5y^2 = 3x - 2y + 31$

a)

Piste $(-1,2)$ on käyrällä, jos ja vain jos sen koordinaatit toteuttavat käyrän yhtälön.
Kun $x = -1$ ja $y = 2$, niin käyrän yhtälön

vasen puoli on $4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot 2^2 = 24$ ja
oikea puoli on $3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 31 = 24$.

Siis piste $(-1,2)$ on käyrällä.

b)

Piste $(3,0)$ on käyrällä, jos ja vain jos sen koordinaatit toteuttavat käyrän yhtälön.
Kun $x = 3$ ja $y = 0$, niin käyrän yhtälön

vasen puoli on $4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 0^2 = 36$ ja
oikea puoli on $3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 31 = 40 \neq 36$.

Siis piste $(3,0)$ ei ole käyrällä.

103

Käyrä $2x^2 - 3y - 7 = 0$

a)

Kun $x = 2$ ja $y = 0$, niin käyrän yhtälön

vasen puoli on $2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 0 - 7 = 1$ ja
oikea puoli on $0 \neq 1$.

Siis piste $(2,0)$ ei ole käyrällä.

b)

Jos $x = 0$, niin

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0^2 - 3y - 7 &= 0 \\ -3y &= 7 \\ y &= -\frac{7}{3} \\ y &= -2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Siis esimerkiksi $\left(0, -2\frac{1}{3}\right)$ on käyrän piste.

104

Kokeillaan esimerkiksi, onko piste $(x, y) = (1,1)$
paraabelilla $(y - x)^2 + 2y - 6x + 4 = 0$.

Saadaan

$$\begin{aligned} &(y - x)^2 + 2y - 6x + 4 \\ &= (1-1)^2 + 2 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \\ &= 0 + 2 - 6 + 4 = 0 \end{aligned}$$

Joka on sama kuin yhtälön oikea puoli.
Siis piste $(1,1)$ on paraabelilla.

Huomautus:
Paraabelilla on tietenkin äärettömän monta pistettä, jotka kelpaavat tässä ratkaisuksi. Piste $(1,1)$ valittiin siksi, että tällöin ensimmäinen paraabelin yhtälön vasemmalla puolella esiintyvä termi (toisen asteen termi) menee nollaksi.

105

Kun $(x, y) = (2, -1)$, niin yhtälön $2x^2 + 3y^3 = 5$ vasen puoli on

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^3 &= 2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot (-1)^3 \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 8 - 3 = 5 \end{aligned}$$

eli yhtä suuri kuin oikea puoli, joten piste on käyrällä.

Kun $(x, y) = (-1, -1)$, niin yhtälön $2x^2 + 3y^3 = 5$ vasen puoli on

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^3 &= 2 \cdot (-1)^2 + 3^2 \cdot (-1)^3 \\ &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 2 - 3 = -1 \neq 5, \end{aligned}$$

joten piste ei ole käyrällä.

Kun $(x, y) = (1, 1)$, niin yhtälön $2x^2 + 3y^3 = 5$ vasen puoli on

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^3 &= 2 \cdot 1^2 + 3^2 \cdot 1^3 \\ &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

eli yhtä suuri kuin oikea puoli, joten piste on käyrällä.

Vastaus Pisteet $(2, -1)$ ja $(1, 1)$ ovat käyrällä $2x^2 + 3y^3 = 5$ ja piste $(-1, -1)$ ei ole.

106

Todistus.

Piste $(2, 2)$ on ympyrällä $x^2 + y^2 = 4x$, jos ja vain jos pisteen koordinaatit toteuttavat ympyrän yhtälön. Vastaavasti piste $(2, 2)$ on suoralla $2x - y = 2$, jos ja vain jos pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön. Osoitetaan siis, että pisteen $(2, 2)$ koordinaatit toteuttavat sekä ympyrän että suoran yhtälön.

Kun $x = 2$ ja $y = 2$, niin ympyrän yhtälön

vasen puoli on $2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$ ja
oikea puoli on $4 \cdot 2 = 8$.

Siis piste $(2, 2)$ on ympyrän piste.

Kun $x = 2$ ja $y = 2$, niin suoran yhtälön

vasen puoli on $2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2$ ja
oikea puoli on 2.

Siis piste $(2, 2)$ on myös suoran piste. $\square$

107

Väite: Käyrät $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ ja $(x-3)(y-2)=6$ leikkaavat origossa.

Todistus:

On siis osoitettava, että origo on käyrien yhteinen piste.

Origo on käyrän $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ piste, sillä kun $(x,y)=(0,0)$ niin yhtälön vasen puoli on

$$(0-3)^2+(0-4)^2=9+16=25$$

eli yhtä suuri kuin oikea puoli.

Origo on käyrän $(x-3)(y-2)=6$ piste, sillä kun $(x,y)=(0,0)$ niin yhtälön vasen puoli on

$$(0-3)(0-2)=(-3)(-2)=6$$

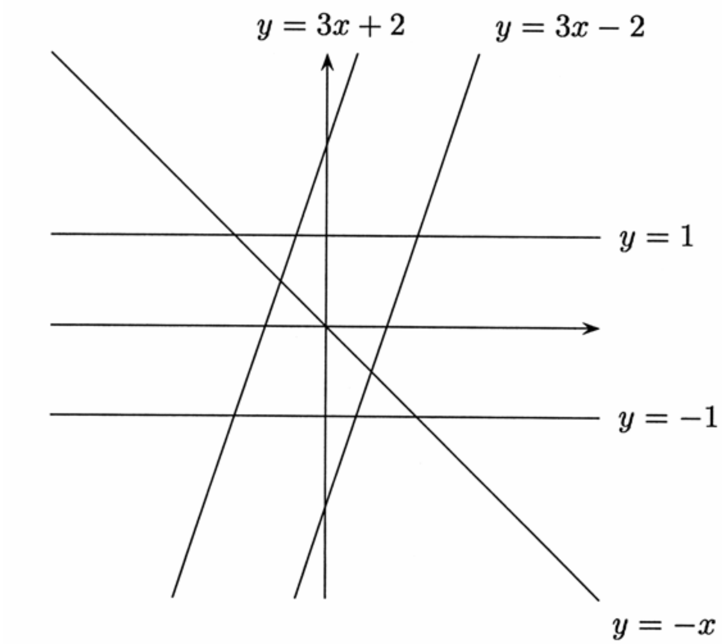
eli yhtä suuri kuin oikea puoli.

Siis käyrät $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ ja $(x-3)(y-2)=6$ leikkaavat origossa. □

108

Taulukoidaan ensin piirrettävien suorien yhtälöt.

c	c^2-1	$y=(c^2-1)x+c$
-2	$(-2)^2-1=4-1=3$	$y=3x-2$
-1	$(-1)^2-1=1-1=0$	$y=-1$
0	$0^2-1=0-1=-1$	$y=-x$
1	$1^2-1=1-1=0$	$y=1$
2	$2^2-1=4-1=3$	$y=3x+2$



109

Käyräparvi $cx + xy + c^2 = 4,\ \ c \in \mathbb{R}$

a)

Käyrän kuvaaja kulkee origon kautta, jos ja vain jos

$$c \cdot 0 + 0 \cdot 0 + c^2 = 4$$
$$c^2 = 4$$
$$c = \pm 2$$

Kun $c = 2$, niin käyrän yhtälö on

$2x + xy + 2^2 = 4$ eli $2x + xy = 0$

Kun $c = -2$, niin käyrän yhtälö on

$-2x + xy + (-2)^2 = 4$ eli $-2x + xy = 0$

b)

Käyrän kuvaaja kulkee pisteen $(4,2)$ kautta, jos ja vain jos

$$c \cdot 4 + 4 \cdot 2 + c^2 = 4$$
$$c^2 + 4c + 4 = 0$$
$$(c+2)^2 = 0$$
$$c + 2 = 0$$
$$c = -2$$

Kun $c = -2$, niin käyrän yhtälö on

$-2x + xy + (-2)^2 = 4$ eli $-2x + xy = 0$

Vastaus a) $2x + xy = 0$ ja $-2x + xy = 0$

b) $-2x + xy = 0$

110

Piste $(k, 2k+1)$ on paraabelilla $y = x^2 - 2$, jos ja vain jos piste toteuttaa suoran yhtälön. Siis

$$2k + 1 = k^2 - 2$$
$$k^2 - 2k - 3 = 0$$
$$k = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$k = 3 \text{ tai } k = -1$$

Kun $k = 3$, niin piste on $(3,7)$.

Kun $k = -1$, niin piste on $(-1,-1)$.

Vastaus $k = 3$, $(3,7)$

$k = -1$, $(-1,-1)$.

111

Käyrä $x^5y^5+c^2xy+cx^2-1=0$ leikkaa x-akselia, jos jokin muotoa $(x,0)$ oleva piste on käyrällä. Tämä toteutuu, kun

$$\begin{aligned} x^5\cdot 0^5+c^2x\cdot 0+cx^2-1&=0\\ cx^2-1&=0\\ cx^2&=1 \end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälöllä $cx^2=1$ on ratkaisuja, kun $c>0$.

Vastaus $x^5y^5+c^2xy+cx^2-1=0$ leikkaa x-akselia täsmälleen silloin, kun $c>0$.

112

a) Janan AB pituus on

$$\begin{aligned} \sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}&=\sqrt{4^2+3^2}\\ &=\sqrt{16+9}\\ &=\sqrt{25}=5 \end{aligned}$$

b) Koska pisteiden A ja B x-koordinaatit ovat samat, jana AB pituus on $|-3-7|=|-10|=10$.

c) Janan AB pituus on

$$\begin{aligned} \sqrt{(-6-9)^2+(4-(-4))^2}&=\sqrt{15^2+8^2}\\ &=\sqrt{225+64}\\ &=\sqrt{289}=17 \end{aligned}$$

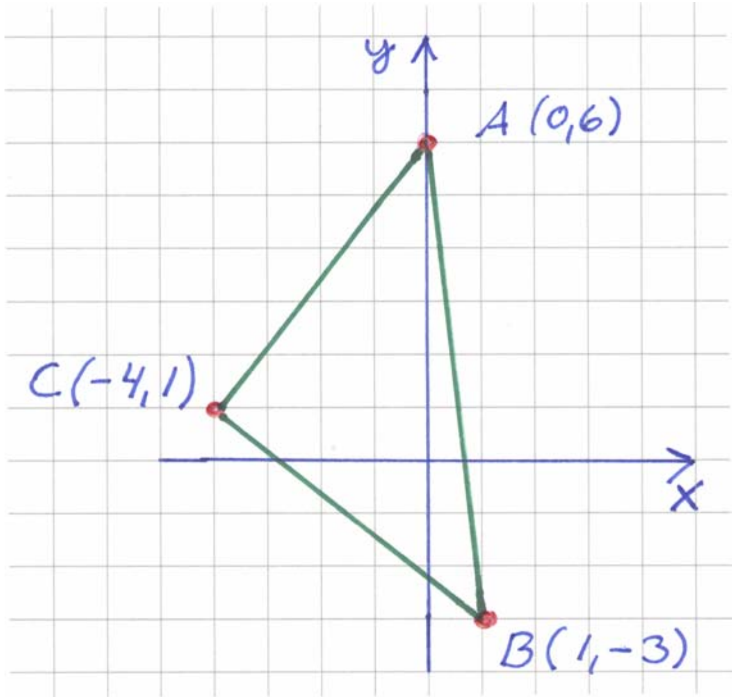
113

Pisteiden $(-1,1)$ ja (a,a) välinen etäisyys on

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-(-1))^2+(a-1)^2} &= \sqrt{(a+1)^2+(a-1)^2}\\ &= \sqrt{a^2+2a+1+a^2-2a+1}\\ &= \sqrt{2a^2+2}\end{aligned}$$

114

Olkoon $A=(0,6)$, $B=(1,-3)$ ja $C=(-4,1)$.



Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

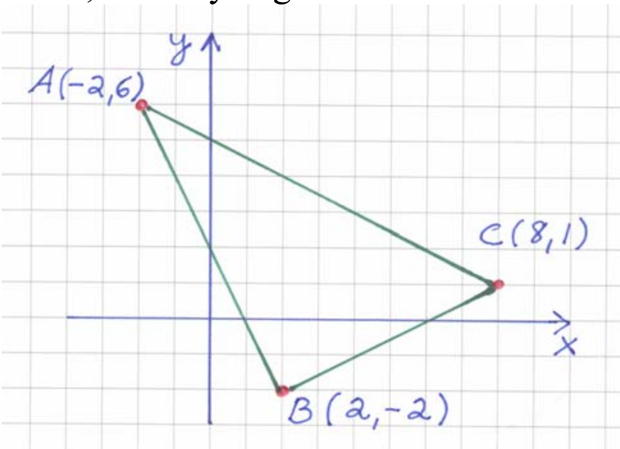
$$AB=\sqrt{(1-0)^2+(-3-6)^2}=\sqrt{1^2+(-9)^2}=\sqrt{82}$$
$$AC=\sqrt{(-4-0)^2+(1-6)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$$
$$BC=\sqrt{(-4-1)^2+[1-(-3)]^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2}=\sqrt{41}$$

Koska $AC=BC$, niin kolmio on tasakylkinen.

Vastaus On

115

Kolmio on suorakulmainen täsmälleen silloin, kun Pythagoraan lause on voimassa. Lasketaan kolmion sivujen pituudet ja tutkitaan, onko Pythagoraan lause voimassa.



$$AB=\sqrt{[2-(-2)]^2+(-2-6)^2}=\sqrt{4^2+(-8)^2}=\sqrt{80}$$

$$AC=\sqrt{[8-(-2)]^2+(1-6)^2}=\sqrt{10^2+(-5)^2}=\sqrt{125}$$

$$BC=\sqrt{(8-2)^2+[1-(-2)]^2}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}$$

Pisin sivu on AC, joten merkitään $a=\sqrt{80}$, $b=\sqrt{45}$ ja $c=\sqrt{125}$. Tällöin

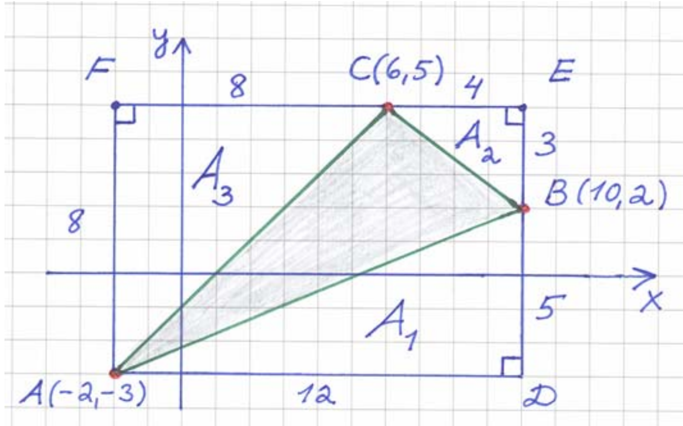
$$a^2+b^2=\left(\sqrt{80}\right)^2+\left(\sqrt{45}\right)^2=80+45=125$$

$$c^2=\left(\sqrt{125}\right)^2=125$$

Siis Pythagoraan lause $a^2+b^2=c^2$ on voimassa, joten kolmio on suorakulmainen.

116

$A=(-2,-3)$, $B=(10,2)$ ja $C=(6,5)$



a)

$$AB=\sqrt{[10-(-2)]^2+[2-(-3)]^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$$

$$AC=\sqrt{[6-(-2)]^2+[5-(-3)]^2}=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{8^2\cdot 2}=8\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(6-10)^2+(5-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$$

Piiri $p=13+8\sqrt{2}+5=18+8\sqrt{2}=29{,}3137...\approx 29{,}3$

b)

$$\begin{aligned}A&=A_{ADEF}-A_1-A_2-A_3\\&=12\cdot 8-\frac{5\cdot 12}{2}-\frac{3\cdot 4}{2}-\frac{8\cdot 8}{2}\\&=96-30-6-32\\&=28\end{aligned}$$

Vastaus a) $18+8\sqrt{2}\approx 29{,}3$ b) 28

117

Väite: Pisteiden $A=(x_1,y_1)$ ja $B=(x_2,y_2)$ etäisyydelle pätee kaava $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ myös silloin, kun $y_1=y_2$ eli kun jana *AB* on vaakasuorassa.

Todistus:

Kun jana *AB* on vaakasuorassa, niin pisteiden *A* ja *B* välinen etäisyys on $|x_2-x_1|$.

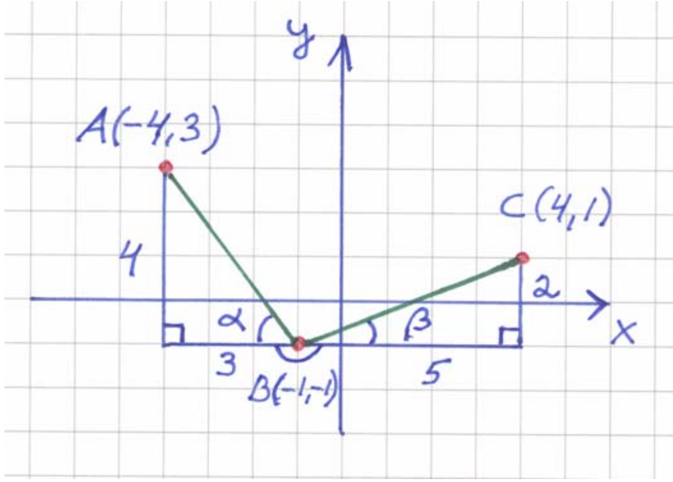
Toisaalta kaava antaa tuloksen

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} && \big|\, y_1=y_2\\
&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+0^2}\\
&=\sqrt{(x_2-x_1)^2} && \big|\, \sqrt{a^2}=|a|\\
&=|x_2-x_1|
\end{aligned}$$

Näin väite on todistettu. □

118

Kulma α saadaan yhtälöstä



$$\tan\alpha=\frac{4}{3}$$
$$\alpha=53{,}130...^\circ$$

Vastaavasti

$$\tan\beta=\frac{2}{5}$$
$$\beta=21{,}801...^\circ$$

Tällöin *kupera* kulma

$$\sphericalangle ABC=\alpha+180^\circ+\beta=254{,}93...^\circ\approx 255^\circ$$

Vastaus $\quad 255^\circ$

119

Pisteiden $(x,3)$ ja $(2,-1)$ etäisyys on

$$d = \underbrace{\sqrt{(x-2)^2 + [3-(-1)]^2}}_{\geq 0} \qquad \Big| \, x \in \mathbb{R}$$
$$= \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 4^2}$$
$$= \sqrt{x^2 - 4x + 20}$$

Koska etäisyyden pitää olla 5, niin juurrettavan $x^2 - 4x + 20$ on oltava 25.

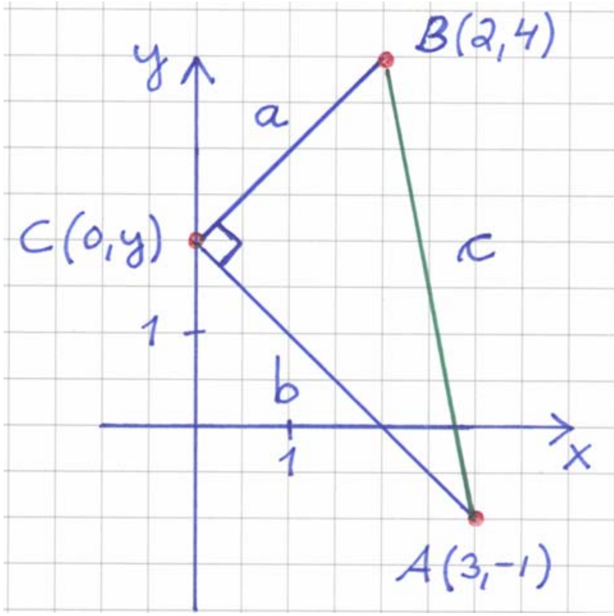
Siis

$$x^2 - 4x + 20 = 25$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$
$$x = 5 \text{ tai } x = -1$$

Vastaus $\quad x = 5$ tai $x = -1$

120

Olkoon $A = (3, -1)$, $B = (2,4)$ ja kysytty y-akselin piste $C = (0, y)$.



Jana AB näkyy pisteestä C suorassa kulmassa, jos ja vain jos kolmio ABC on suorakulmainen ja jana AB sen hypotenuusa. Kateettien pituudet ovat

$$a = BC = \sqrt{(0-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{4 + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{y^2 - 8y + 20}$$
$$b = AC = \sqrt{(0-3)^2 + [y-(-1)]^2} = \sqrt{9 + (y+1)^2} = \sqrt{y^2 + 2y + 10}$$

Hypotenuusan pituus on

$$c = AB = \sqrt{(2-3)^2 + [4-(-1)]^2} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

Saadaan yhtälö

$$a^2+b^2=c^2$$

$$\left(\sqrt{y^2-8y+20}\right)^2+\left(\sqrt{y^2+2y+10}\right)^2=\left(\sqrt{26}\right)^2$$

$$y^2-8y+20+y^2+2y+10=26$$

$$2y^2-6y+4=0 \qquad |:2$$

$$y^2-3y+2=0$$

$$y=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

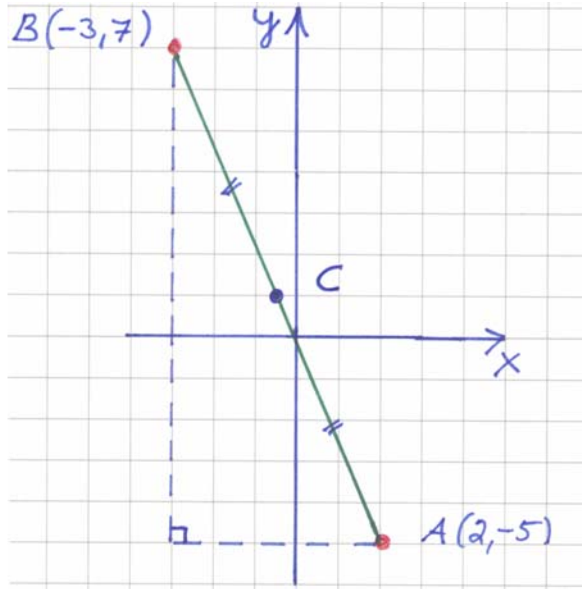
$$y=\frac{3\pm1}{2}$$

$$y=2 \ \text{ tai } \ y=1$$

Siis y-akselin pisteet ovat $(0,2)$ ja $(0,1)$.

121

Olkoon $A=(2,-5)$ ja $B=(-3,7)$.



Janan AB pituus on

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
$$=\sqrt{(-3-2)^2+[7-(-5)]^2}$$
$$=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

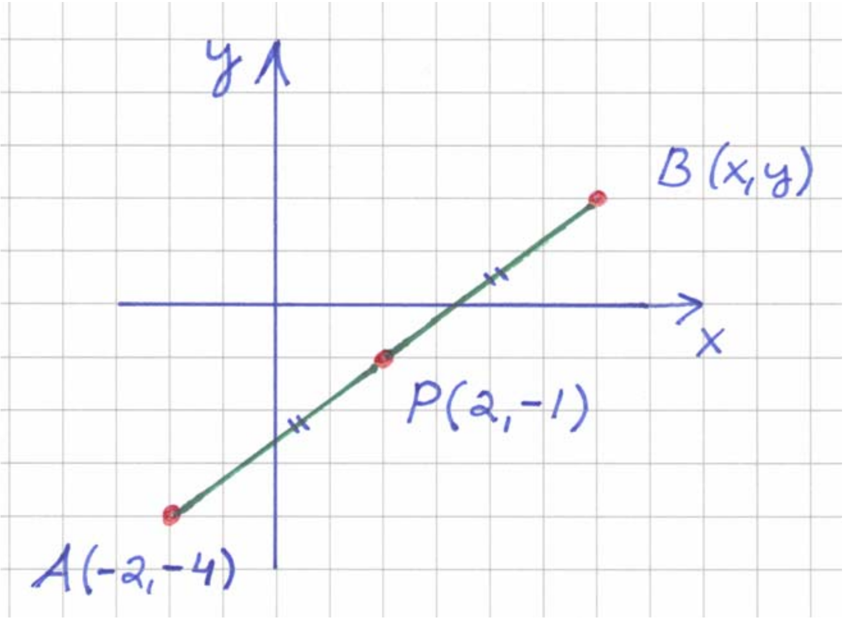
Janan AB keskipiste C on

$$C=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{2+(-3)}{2},\frac{-5+7}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},1\right)$$

Vastaus $\quad 13,\ \left(-\frac{1}{2},1\right)$

122

Olkoon $A=(-2,-4)$ ja $P=(2,-1)$ ja kysytty piste $B=(x,y)$.



Tällöin

$$\begin{cases} \dfrac{-2+x}{2}=2 & \Big| \cdot 2 \\ \dfrac{-4+y}{2}=-1 & \Big| \cdot 2 \end{cases}$$

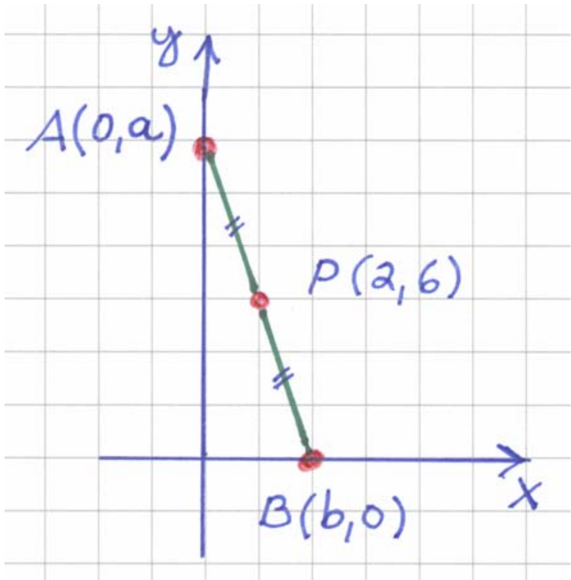
$$\begin{cases} -2+x=4 \\ -4+y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

Vastaus $(6,2)$

123

Olkoon $A=(0,a)$ ja $B=(b,0)$.



Koska janan keskipiste on $P=(2,6)$, saadaan

$$\frac{0+b}{2}=2 \quad \text{ja} \quad \frac{a+0}{2}=6$$

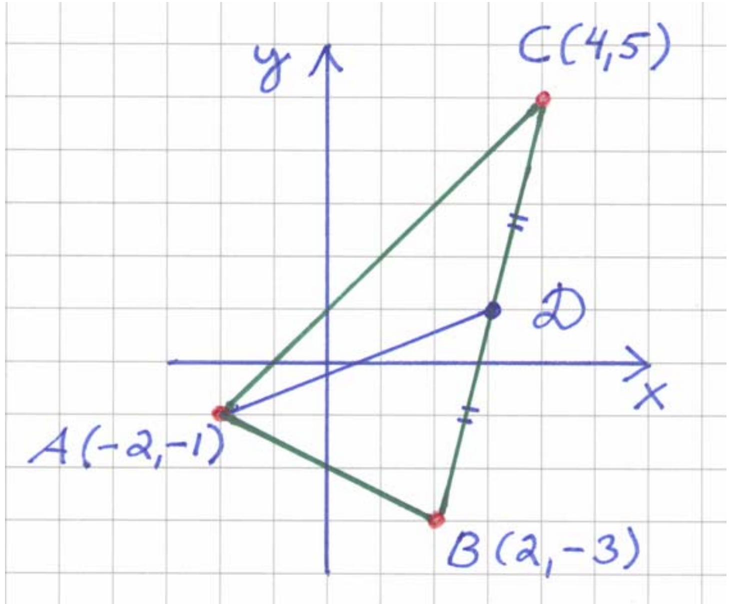
$$b=4 \quad \text{ja} \quad a=12$$

Siis $A=(0,12)$ ja $B=(4,0)$.

Vastaus $(0,12)$, $(4,0)$

124

$A=(-2,-1),\ B=(2,-3)$ ja $C=(4,5)$



a)

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{[2-(-2)]^2+[-3-(-1)]^2}$$
$$=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$$

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{[4-(-2)]^2+[5-(-1)]^2}$$
$$=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(4-2)^2+[5-(-3)]^2}$$
$$=\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{68}=\sqrt{4\cdot 17}=2\sqrt{17}$$

b)
Janan BC keskipiste on

$$D=\left(\frac{x_B+x_C}{2},\ \frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{-3+5}{2}\right)=(3,1)$$

Mediaanin AD pituus on

$$AD=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2} \qquad \left|\begin{array}{l}A=(-2,-1)\\ D=(3,1)\end{array}\right.$$
$$=\sqrt{[3-(-2)]^2+[1-(-1)]^2}$$
$$=\sqrt{5^2+2^2}$$
$$=\sqrt{29}$$

Vastaus

a) $AB=2\sqrt{5}\approx 4{,}5$

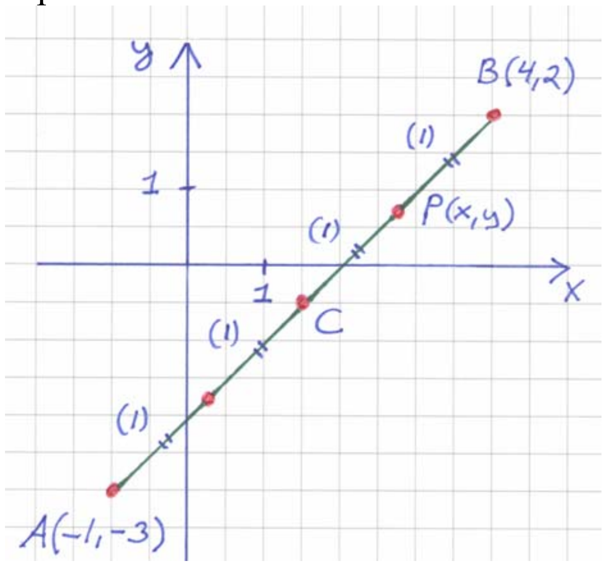
$AC=6\sqrt{2}\approx 8{,}5$

$BC=2\sqrt{17}\approx 8{,}2$

b) $\sqrt{29}\approx 5{,}4$

125

Olkoon janan AB keskipiste C. Tällöin piste P on janan CB keskipiste.



Janan AB keskipiste on

$$C=\left(\frac{-1+4}{2},\ \frac{-3+2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Janan CB keskipiste on

$$P=\left(\frac{{}^{2)}\frac{3}{2}+4}{2},\ \frac{{}^{2)}-\frac{1}{2}+2}{2}\right)=\left(\frac{3+8}{4},\frac{-1+4}{4}\right)=\left(\frac{11}{4},\frac{3}{4}\right)=\left(2\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$$

Vastaus $\quad P=\left(2\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

126

Janan päätepisteet ovat $A=(x_1,y_1)$ ja $B=(x_2,y_2)$. On osoitettava, että janan AB keskipiste on $P=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ myös silloin, kun jana AB ei ole nouseva.

a) $x_1<x_2$ ja $y_1>y_2$, joten jana AB on laskeva. Peilataan jana AB y-akselin suhteen, jolloin saadaan janan AB kanssa yhtä pitkä nouseva jana $B'A'$, jonka keskipiste on P'. Tämän janan pääte-pisteet ovat

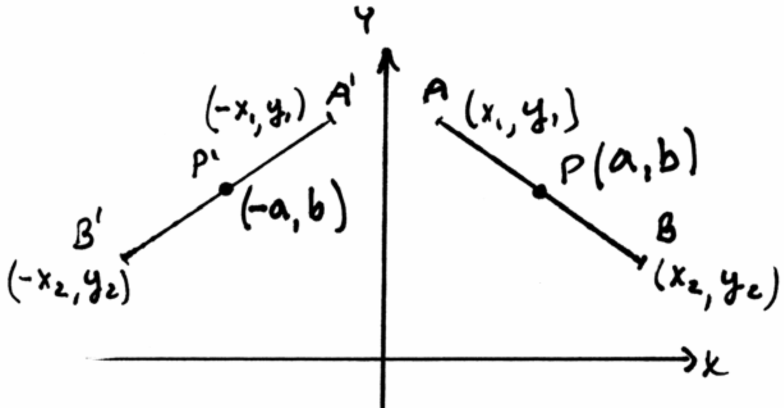
$A'=(-x_1,y_1)$ ja $B'=(-x_2,y_2)$, $-x_1>-x_2$ ja $y_1>y_2$

Janan $B'A'$ keskipiste on

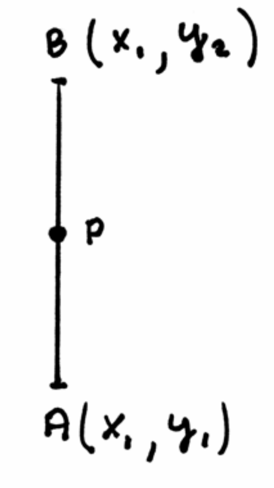
$$P'=\left(\frac{-x_1+(-x_2)}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(-\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Janan AB keskipiste saadaan tästä peilaamalla y-akselin suhteen, jolloin nähdään, että

$$P=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



b) $x_1 = x_2$, joten jana AB on pystysuora.



Janan AB keskipiste on tällöin

$$P = \left(x_1, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{2x_1}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_1}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \qquad \Big| x_1 = x_2$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

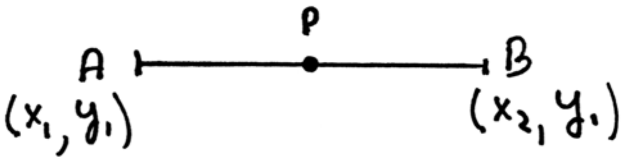
c) $y_1 = y_2$, joten jana AB on vaakasuora.

Janan AB keskipiste on tällöin

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_1 \right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{2y_1}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_1}{2} \right) \qquad \Big| y_1 = y_2$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



Siis janan keskipiste on aina $P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ □

127

Oletus: Janan *AB* päätepisteet ovat paraabelilla $y = x^2$.

Väite: Janan AB keskipiste ei ole tällä paraabelilla.

Todistus:
Merkitään $A = (a, c)$ ja $B = (b, d)$, missä *A* ja *B* ovat eri pisteitä.
Koska *P* on paraabelilla $y = x^2$, niin $c = a^2$.
Vastaavasti koska *Q* on paraabelilla $y = x^2$, niin $d = b^2$.
Siis $A = (a, a^2)$ ja $B = (b, b^2)$, missä $a \neq b$, sillä *A* ja *B* ovat janan päätepisteitä.

Janan *AB* keskipiste on

$$P = (x, y) = \left(\frac{a + b}{2}, \frac{a^2 + b^2}{2} \right)$$

Tutkitaan, onko *P* paraabelilla $y = x^2$. Yhtälön vasen puoli on

$$y = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

ja oikea puoli

$$x^2 = \left(\frac{a + b}{2} \right)^2$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

Tutkitaan, voivatko nämä olla yhtä suuret. Saadaan yhtälö

$$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

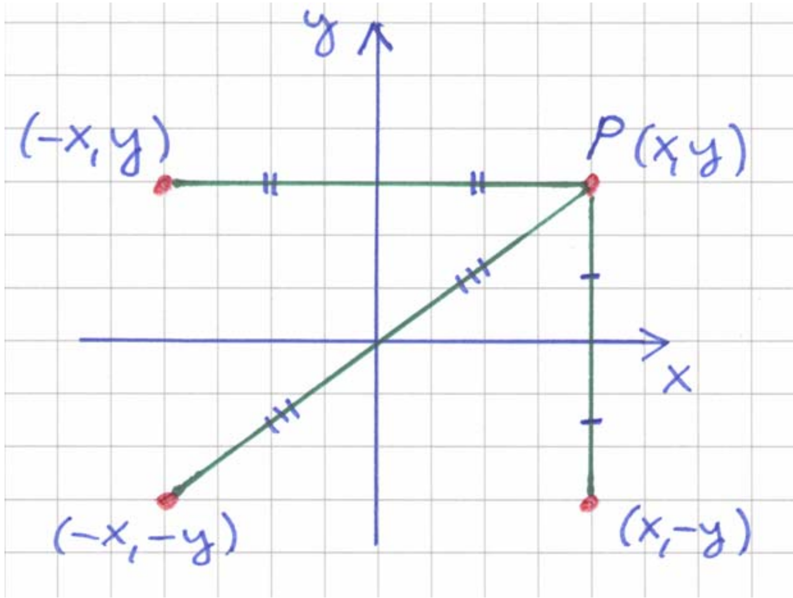
$$\Leftrightarrow \quad 2a^2+2b^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad a=b$$

mikä ei pitänyt paikkaansa. Siis keskipiste P ei ole paraabelilla $y=x^2$. □



128

– Kun piste peilataan x-akselin suhteen, niin pisteen x-koordinaatti säilyy ja y-koordinaatti muuttuu vastaluvukseen. Pisteen (x,y) peilikuva x-akselin suhteen on piste $(x,-y)$.

– Kun piste peilataan y-akselin suhteen, niin pisteen y-koordinaatti säilyy ja x-koordinaatti muuttuu vastaluvukseen. Pisteen (x,y) peilikuva y-akselin suhteen on piste $(-x,y)$.

– Kun piste peilataan origon suhteen, niin pisteen x- ja y-koordinaatit muuttuvat vastaluvuikseen. Pisteen (x,y) peilikuva origon suhteen on piste $(-x,-y)$.

a) Pisteen $(1,2)$ peilikuva on

x-akselin suhteen	$(1,-2)$
y-akselin suhteen	$(-1,2)$
origon suhteen	$(-1,-2)$

b) Pisteen $(-1,0)$ peilikuva on

x-akselin suhteen	$(-1,0)$
y-akselin suhteen	$(1,0)$
origon suhteen	$(1,0)$

c) Pisteen $(0,0)$ peilikuva on

x-akselin suhteen	$(0,0)$
y-akselin suhteen	$(0,0)$
origon suhteen	$(0,0)$

d) Pisteen (a,b) peilikuva on

* x-akselin suhteen $(a,-b)$ ja
näiden pisteiden etäisyys on
$$\sqrt{(a-a)^2+[b-(-b)]^2}=\sqrt{4b^2}=2|b|$$

* y-akselin suhteen $(-a,b)$ ja
näiden pisteiden etäisyys on
$$\sqrt{[a-(-a)]^2+(b-b)^2}=\sqrt{4a^2}=2|a|$$

* origon suhteen $(-a,-b)$ ja
näiden pisteiden etäisyys on
$$\sqrt{[a-(-a)]^2+[b-(-b)]^2}=\sqrt{4a^2+4b^2}$$
$$=\sqrt{4(a^2+b^2)}$$
$$=2\sqrt{a^2+b^2}$$

129

Oletus: Olkoon $P'Q'$ janan PQ peilikuva x-akselin suhteen.

Väite: Janat PQ ja $P'Q'$ ovat saman pituisia.

Todistus:
Merkitään $P=(x_1,x_2)$ ja $Q=(x_2,y_2)$.
Tällöin janan PQ pituus on

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Pisteiden P ja Q peilikuvat ovat $P'=(x_1,-y_1)$ ja $Q'=(x_2,-y_2)$,
joten janan $P'Q'$ pituus on

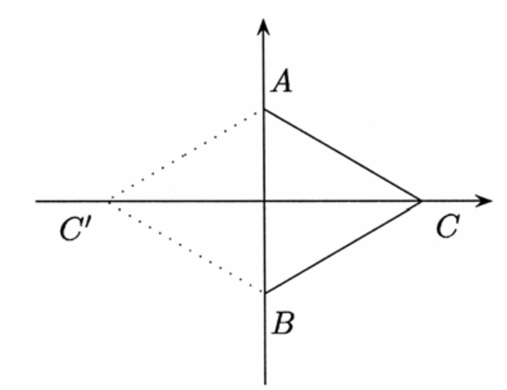
$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(-y_2-(-y_1))^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(-y_2+y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(-(y_2-y_1))^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Siis PQ ja $P'Q'$ ovat yhtä pitkiä. $\square$

130

Tarkastellaan tasasivuista kolmiota, jonka kärjet ovat pisteissä

$$A=(0,1),\ \ B=(0,-1)\ \text{ ja }\ C=(\sqrt{3},0)$$



Kun kolmio peilataan x-akselin suhteen, niin

kärki A peilautuu pisteeksi $(0,-1)$ eli kärjeksi B,
kärki B peilautuu pisteeksi $(0,-(-1)=(0,1))$ eli kärjeksi A ja
kärki C pysyy paikallaan.

Siis kolmio peilautuu itselleen eli on x-akselin suhteen symmetrinen.

Sen sijaan y-akselin suhteen peilattaessa kärki C peilautuu pisteeksi $(-\sqrt{3},0)$, joka ei ole lainkaan tämän tasasivuisen kolmion piste. Siis tämä tasasivuinen kolmio ei ole y-akselin suhteen symmetrinen.

131

Suora $y=3x+1$ kulkee pisteiden $A=(0,1)$ ja $B=(1,\ 3\cdot 1+1)=(1,\ 4)$ kautta.

a) Kun peilataan x-akselin suhteen, niin piste A peilautuu pisteeksi $A'=(0,-1)$ ja B peilautuu pisteeksi $B'=(1,-4)$.
Suora $y=3x+1$ peilautuu siis suoraksi, jonka kulmakerroin on

$$\frac{-4-(-1)}{1-0}=-3$$

ja ratkaistun muodon vakiotermi on -1 eli suoraksi $y=-3x-1$.

b) Kun peilataan y-akselin suhteen, niin piste A pysyy paikoillaan ja B peilautuu pisteeksi $B''=(-1,4)$.
Suora $y=3x+1$ peilautuu siis suoraksi, jonka kulmakerroin on

$$\frac{4-1}{-1-1}=-3$$

ja ratkaistun muodon vakiotermi 1 eli suoraksi $y=-3x+1$.

132

a) Sijoittamalla saadaan

$$\left((-5)^2+(-1)^2+25\right)^2-100\cdot(-5)^2$$
$$=(25+1+25)^2-100\cdot 25$$
$$=51^2-2500=101$$

$$\left(0^2+0^2+25\right)^2-100\cdot 0^2$$
$$=25^2-0=25^2$$

ja

$$\left(4^2+3^2+25\right)^2-100\cdot 4^2$$
$$=(16+9+25)^2-1600$$
$$=50^2-1600=900=30^2$$

joten piste $(0,0)$ on parametria $c=25$ ja piste $(4,3)$ parametria $c=30$ vastaavalla käyrällä. Sen sijaan $\sqrt{101}\approx 10{,}05\neq 10$, joten piste $(-5,-1)$ ei ole millään käyristä.

b)

$$\left(6^2+(-1-\pi)^2+25\right)^2-100\cdot 6^2$$
$$=\left(61+1+2\pi+\pi^2\right)^2-100\cdot 36$$
$$=\pi^4+4\pi^3+128\pi^2+248\pi+244\approx 2507$$

joten $\sqrt{\pi^4+4\pi^3+128\pi^2+248\pi+244}\approx 50{,}07$ ja piste $(6,-1-\pi)$ ei ole millään käyristä.

c) Kuvaaja on yksiosainen, kunhan sillä on jokin y-akselin piste $(0,y)$. Sijoittamalla piste kuvaajan yhtälöön todetaan, että

$$\left(0^2+y^2+25\right)^2-100\cdot 0^2=c^2,$$

josta saadaan

$$c^2=\left(y^2+25\right)^2\geq 25^2.$$

Parametrin arvolla $c=10$ on $c^2=100<25^2$, joten ehto ei toteudu ja kuvaaja koostuu kahdesta käyrästä.

d) **Väite:** Yhtälön $\left(x^2+y^2+25\right)^2-100x^2=c^2$ kuvaajat ovat x- ja y-akselien suhteen symmetrisiä, kun $c=10,\ 25,\ 30,\ 50$.

Todistus: Olkoon c jokin luvuista 10, 25, 30 ja 50, sekä olkoon (x_0,y_0) kuvaajan piste. Tällöin

$$\left({x_0}^2+{y_0}^2+25\right)^2-100{x_0}^2=c^2.$$

Koska ${x_0}^2=(-x_0)^2$ ja ${y_0}^2=(-y_0)^2$, pätee myös

$$\left((-x_0)^2+{y_0}^2+25\right)^2-100(-x_0)^2=c^2$$

ja

$$\left({x_0}^2+(-y_0)^2+25\right)^2-100{x_0}^2=c^2,$$

joten pisteet $(-x_0,y_0)$ ja $(x_0,-y_0)$ ovat myös kuvaajan pisteitä. Siis kuvaajat ovat x- ja y-akselien suhteen symmetrisiä. □