**201**

a) **Tapa 1**
Itseisarvon määritelmän mukaan

$$|4x+8| = \begin{cases} 4x+8 & \text{, jos } 4x+8 \geq 0 \\ -(4x+8) & \text{, jos } 4x+8 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x+8 & \text{, jos } 4x \geq -8 \\ -4x-8 & \text{, jos } 4x < -8 \end{cases}$$

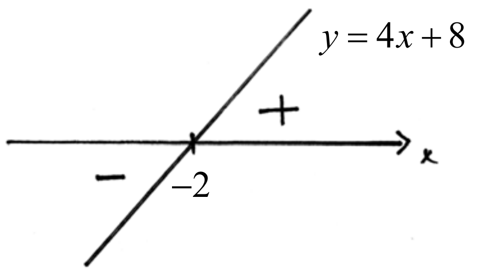
$$= \begin{cases} 4x+8 & \text{, jos } x \geq -2 \\ -4x-8 & \text{, jos } x < -2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -4x-8 & \text{, jos } x < -2 \\ 4x+8 & \text{, jos } x \geq -2 \end{cases}$$

**Tapa 2**
Tutkitaan lausekkeen $4x+8$ merkit.
Nollakohta:

$$4x+8=0$$
$$4x=-8$$
$$x=-2$$

Kuvaaja:




Kuvaajan avulla saadaan:

1) $4x+8<0$, jos $x<-2$.

Siis $|4x+8| = -(4x+8) = -4x-8$, jos $x<-2$.

2) $4x+8 \geq 0$, jos $x \geq -2$.

Siis $|4x+8| = 4x+8$, jos $x \geq -2$.

Näin ollen

$$|4x+8| = \begin{cases} -4x-8 & \text{, jos } x < -2 \\ 4x+8 & \text{, jos } x \geq -2 \end{cases}$$

b) **Tapa 1**
Itseisarvon määritelmän mukaan

$$|-2-3x| = \begin{cases} -2-3x & \text{, jos } -2-3x \geq 0 \\ -(-2-3x) & \text{, jos } -2-3x < 0 \end{cases}$$

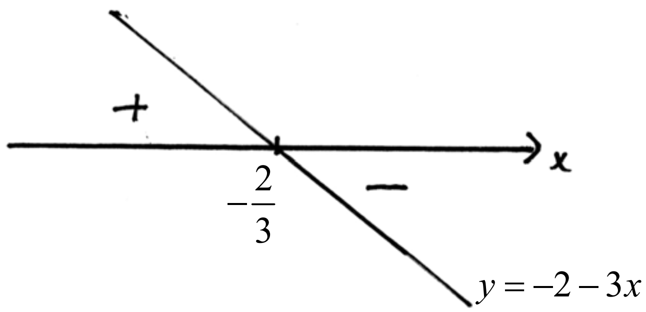
$$= \begin{cases} -2-3x & \text{, jos } -3x \geq 2 \\ 2+3x & \text{, jos } -3x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2-3x & \text{, jos } x \leq -\frac{2}{3} \\ 2+3x & \text{, jos } x > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

**Tapa 2**
Tutkitaan lausekkeen $-2-3x$ merkit.
Nollakohta:

$$-2-3x = 0$$
$$-3x = 2$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

Kuvaaja:




Kuvaajan avulla saadaan:

1) $-2-3x \geq 0$, jos $x \leq -\frac{2}{3}$.

Siis $|-2-3x| = -2-3x$, jos $x \leq -\frac{2}{3}$.

2) $-2-3x < 0$, jos $x > -\frac{2}{3}$.

Siis $|-2-3x| = -(-2-3x) = 2+3x$, jos $x > -\frac{2}{3}$.

Näin ollen

$$|-2-3x| = \begin{cases} -2-3x & \text{, jos } x \leq -\frac{2}{3} \\ 2+3x & \text{, jos } x > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

**202**

a) **Tapa 1**
Itseisarvon määritelmän mukaan

$$|5x+5|=\begin{cases}5x+5 & \text{, jos } 5x+5\geq 0\\ -(5x+5) & \text{, jos } 5x+5<0\end{cases}$$

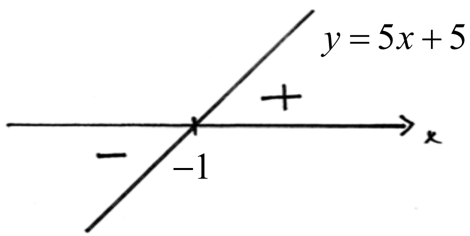
$$=\begin{cases}5x+5 & \text{, jos } 5x\geq -5\\ -5x-5 & \text{, jos } 5x<-5\end{cases}$$

$$=\begin{cases}5x+5 & \text{, jos } x\geq -1\\ -5x-5 & \text{, jos } x<-1\end{cases}$$

**Tapa 2**
Selvitetään lausekkeen $5x+5$ merkit laskemalla sen nollakohta ja hahmottelemalla sen kuvaaja.

Nollakohta:

$$5x+5=0$$
$$5x=-5$$
$$x=-1$$




Kuvaajan avulla saadaan

$$|5x+5|=\begin{cases}-(5x+5) & \text{, jos } x<-1\\ 5x+5 & \text{, jos } x\geq -1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-5x-5 & \text{, jos } x<-1\\ 5x+5 & \text{, jos } x\geq -1\end{cases}$$

b) **Tapa 1**
Itseisarvon määritelmän mukaan

$$x+|6-2x|=\begin{cases}x+(6-2x) & \text{, jos } 6-2x\geq 0\\ x+(-6+2x) & \text{, jos } 6-2x<0\end{cases}$$

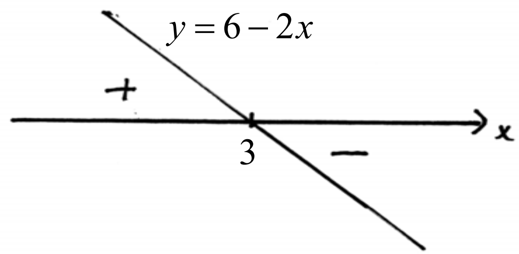
$$=\begin{cases}x+6-2x & \text{, jos } 6\geq 2x\\ x-6+2x & \text{, jos } 6<2x\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-x+6 & \text{, jos } x\leq 3\\ 3x-6 & \text{, jos } x>3\end{cases}$$

**Tapa 2**
Selvitetään lausekkeen $6-2x$ merkit laskemalla sen nollakohta ja hahmottelemalla sen kuvaaja.

Nollakohta:

$$6-2x=0$$
$$2x=6$$
$$x=3$$




Kuvaajan avulla saadaan

$$|6-2x|=\begin{cases}6-2x & \text{, jos } x\leq 3\\ -6+2x & \text{, jos } x>3\end{cases}$$

Näin ollen

$$x+|6-2x|=\begin{cases}x+6-2x & \text{, jos } x\leq 3\\ x-6+2x & \text{, jos } x>3\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-x+6 & \text{, jos } x\leq 3\\ 3x-6 & \text{, jos } x>3\end{cases}$$

**203**

a) **Tapa 1**
Itseisarvon määritelmän mukaan

$$2x - x|2-x| = \begin{cases} 2x - x(2-x) & \text{, jos } 2-x \geq 0 \\ 2x - x(-2+x) & \text{, jos } 2-x < 0 \end{cases}$$

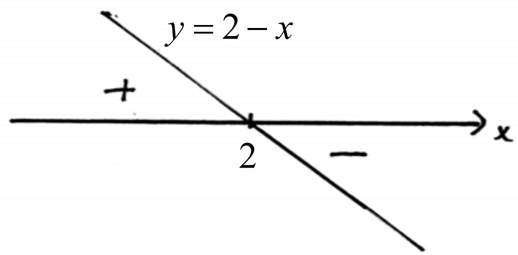
$$= \begin{cases} 2x - 2x + x^2 & \text{, jos } x \leq 2 \\ 2x + 2x - x^2 & \text{, jos } 5x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{, jos } x \leq 2 \\ -x^2 + 4x & \text{, jos } x > 2 \end{cases}$$

**Tapa 2**
Selvitetään lausekkeen $2-x$ merkit laskemalla sen nollakohta ja hahmottelemalla sen kuvaaja.

Nollakohta:

$$2 - x = 0$$
$$x = 2$$




Kuvaajan avulla saadaan

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{, jos } x \leq 2 \\ -2+x & \text{, jos } x > 2 \end{cases}$$

Näin ollen

$$2x - x|2-x| = \begin{cases} 2x - x(2-x) & \text{, jos } x \leq 2 \\ 2x - x(-2+x) & \text{, jos } x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x - 2x + x^2 & \text{, jos } x \leq 2 \\ 2x + 2x - x^2 & \text{, jos } x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{, jos } x \leq 2 \\ -x^2 + 4x & \text{, jos } x > 2 \end{cases}$$

b)

$|x^2 + 3| = x^2 + 3$, koska $x^2 + 3 > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Vastaus a) $2x - x|2-x| = \begin{cases} x^2 & \text{, jos } x \leq 2 \\ -x^2 + 4x & \text{, jos } x > 2 \end{cases}$

b) $|x^2 + 3| = x^2 + 3$

**204**

a)

Selvitetään lausekkeen $3x^2 - 2x - 1$ merkit laskemalla sen nollakohdat ja hahmottelemalla sen kuvaaja.

Nollakohdat:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

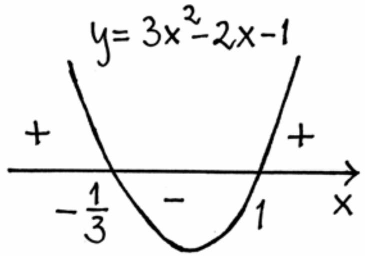
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ tai } x = 1$$

Kuvaaja:

Koska termin $3x^2$ kerroin on positiivinen, kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.




Kuvaajan avulla saadaan

$$|3x^2 - 2x - 1| = \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 & \text{, jos } x \le -\frac{1}{3} \text{ tai } x \ge 1 \\ -3x^2 + 2x + 1 & \text{, jos } -\frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

b)

Selvitetään lausekkeen $-x^2 + x + 6$ merkit.

Nollakohdat:

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

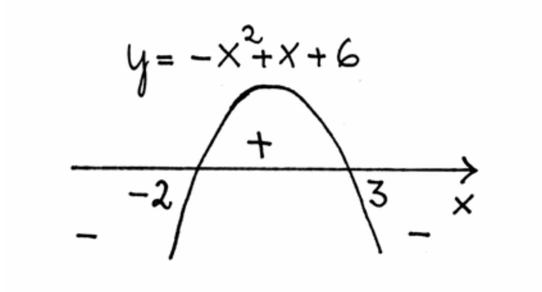
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

$$x = -2 \text{ tai } x = 3$$

Kuvaaja:

Koska termin $-x^2$ kerroin on negatiivinen, kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Kuvaajan avulla saadaan

$$x^2 - |-x^2 + x + 6| = \begin{cases} x^2 - (x^2 - x - 6) & \text{, jos } x < -2 \text{ tai } x > 3 \\ x^2 - (-x^2 + x + 6) & \text{, jos } -2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - x^2 + x + 6 & \text{, jos } x < -2 \text{ tai } x > 3 \\ x^2 + x^2 - x - 6 & \text{, jos } -2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 6 & \text{, jos } x < -2 \text{ tai } x > 3 \\ 2x^2 - x - 6 & \text{, jos } -2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Vastaus

a) $$|3x^2 - 2x - 1| = \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 & \text{, jos } x \le -\frac{1}{3} \text{ tai } x \ge 1 \\ -3x^2 + 2x + 1 & \text{, jos } -\frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

b) $$x^2 - |-x^2 + x + 6| = \begin{cases} x + 6 & \text{, jos } x < -2 \text{ tai } x > 3 \\ 2x^2 - x - 6 & \text{, jos } -2 \le x \le 3 \end{cases}$$

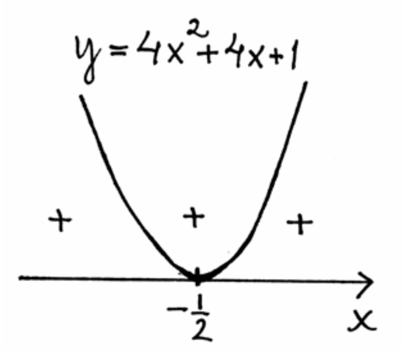
**205**

a)

Selvitetään lausekkeen $4x^2 + 4x + 1$ merkit.
Nollakohdat:

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 0$$
$$(2x + 1)^2 = 0$$
$$2x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{2} \quad (\text{kaksoisjuuri})$$

Kuvaaja:
Ylöspäin aukeava paraabeli.




Kuvaajan avulla todetaan, että $4x^2 + 4x + 1 \ge 0$ kaikilla $x$:n arvoilla.
Siis

$$(x-1)|4x^2 + 4x + 1| = (x-1)(4x^2 + 4x + 1)$$
$$= 4x^3 + 4x^2 + x - 4x^2 - 4x - 1$$
$$= 4x^3 - 3x - 1$$

b) Selvitetään lausekkeen $-4x^2+2x-1$ merkit.
Nollakohdat:

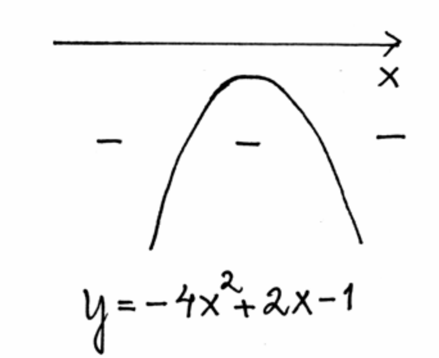
$$-4x^2+2x-1=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-4)\cdot(-1)}}{2\cdot(-4)}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{-8}\notin\mathbb{R}$$

ei nollakohtia

Kuvaaja:
Alaspäin aukeava paraabeli.




Kuvaajan avulla todetaan, että $-4x^2+2x-1<0$ kaikilla $x$:n arvoilla.
Siis

$$|-4x^2+2x-1|=4x^2-2x+1$$

Vastaus a) $(x-1)|4x^2+4x+1|=4x^3-3x-1$
b) $|-4x^2+2x-1|=4x^2-2x+1$

**206**

a) Tutkitaan erikseen kummankin itseisarvon merkit alueessa $x\leq-3$.

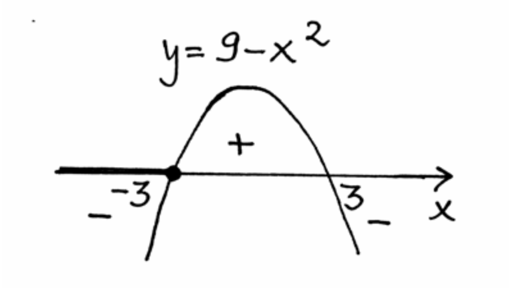
1) Nollakohdat:

$$9-x^2=0$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm3$$

Kuvaaja:




Kuvaajan avulla todetaan, että alueessa $x\leq-3$ pätee $9-x^2\leq0$.
Siis

$$|9-x^2|=-9+x^2=x^2-9$$

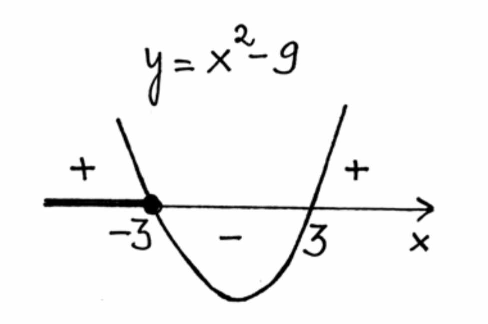
2) Nollakohdat:

$$x^2-9=0$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm3$$

Kuvaaja:




Kuvaajan avulla todetaan, että alueessa $x \le -3$ pätee $x^2 - 9 \ge 0$.
Siis

$$|x^2 - 9| = x^2 - 9$$

Näin ollen

$$3|9 - x^2| - 2|x^2 - 9| = 3(x^2 - 9) - 2(x^2 - 9) = x^2 - 9, \text{ kun } x \le -3.$$

b) **Tapa 1**

$$\frac{|-x^2 + 4x + 5|}{|x^2 - 5x|}, \text{ kun } x > 5$$

Esitetään ensin osoittaja ja nimittäjä ilman itseisarvomerkkejä alueessa $x > 5$.

Osoittaja
Nollakohdat:

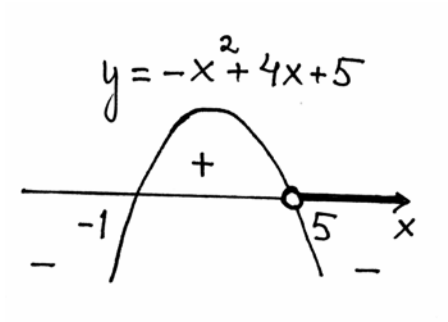
$$-x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm 6}{-2}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = 5$$

Kuvaaja:



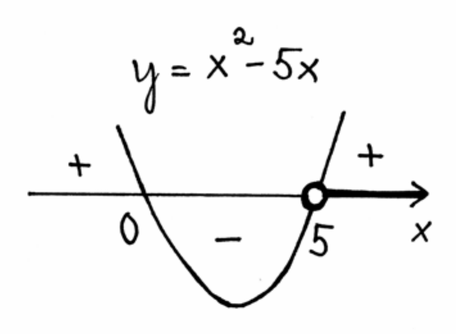

Alueessa $x > 5$ on $-x^2 + 4x + 5 < 0$, joten

$$|-x^2 + 4x + 5| = x^2 - 4x - 5.$$

Nimittäjä
Nollakohdat:

$$x^2-5x=0$$
$$x(x-5)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=5$$

Kuvaaja:




Alueessa $x>5$ on $x^2-5x>0$, joten

$$|x^2-5x|=x^2-5x.$$

Siis

$$\frac{|-x^2+4x+5|}{|x^2-5x|}$$

$$=\frac{x^2-4x-5}{x^2-5x}$$

$$\left| \begin{array}{l} ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \\ x^2-4x-5=1\cdot(x+1)(x-5) \\ x^2-5x=x(x-5) \end{array} \right.$$

$$=\frac{(x+1)(x-5)}{x(x-5)}$$

$$\left| x(x-5)\neq 0, \text{ koska } x>5 \right.$$

$$=\frac{x+1}{x}$$

**Tapa 2**
Tarkastellaan lauseketta alueessa $x>5$.

$$\frac{|-x^2+4x+5|}{|x^2-5x|} \qquad \left| \frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right| \right.$$

$$=\left|\frac{-x^2+4x+5}{x^2-5x}\right|$$

Osoittaja:

$$-x^2+4x+5=0$$
$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot 5}}{2\cdot(-1)}$$
$$x=\frac{-4\pm 6}{-2}$$
$$x=-1 \text{ tai } x=5$$

Tulomuoto

$$-x^2+4x+5=-(x+1)(x-5)$$

Nimittäjä:

$$x^2-5x=0$$
$$x(x-5)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=5$$

Tulomuoto

$$x^2-5x=x(x-5)$$

Siis

$$\left|\frac{-x^2+4x+5}{x^2-5x}\right|$$

$$=\left|\frac{-(x+1)\cancel{(x-5)}}{x\cancel{(x-5)}}\right| \qquad \Big| \; x(x-5)\neq 0, \text{ koska } x>5$$

$$=\left|\frac{-(x+1)}{x}\right| \qquad \Big| \; |-a|=|a|$$

$$=\left|\frac{x+1}{x}\right|$$

| Koska $x>5$, niin
| $x+1>0$ ja $x>0$
| eli $\frac{x+1}{x}>0$

$$=\frac{x+1}{x}$$

Vastaus a) $x^2-9$ b) $\frac{x+1}{x}$

**207**

a)

Tutkitaan lausekkeen $6x^2+x-1$ merkit alueessa $-1 \le x \le 1$.

Nollakohdat:

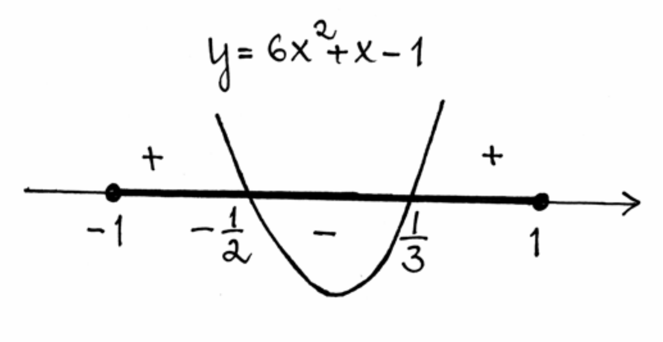
$$6x^2+x-1=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 6\cdot(-1)}}{2\cdot 6}$$

$$x=\frac{-1\pm 5}{12}$$

$$x=-\frac{1}{2} \text{ tai } x=\frac{1}{3}$$

Kuvaaja:




Kun $-1 \le x \le -\frac{1}{2}$ tai $\frac{1}{3} \le x \le 1$, niin $6x^2+x-1 \ge 0$.

Tällöin $|6x^2+x-1| = 6x^2+x-1$.

Kun $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$, niin $6x^2+x-1<0$

Tällöin $|6x^2+x-1| = -6x^2-x+1$.

Siis

$$|6x^2+x-1| = \begin{cases} 6x^2+x-1 & \text{, kun } -1 \le x \le -\frac{1}{2} \\ -6x^2-x+1 & \text{, kun } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3} \\ 6x^2+x-1 & \text{, kun } \frac{1}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 6x^2+x-1 & \text{, kun } -1 \le x \le -\frac{1}{2} \text{ tai } \frac{1}{3} \le x \le 1 \\ -6x^2-x+1 & \text{, kun } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

b)

Esitetään osoittaja ilman itseisarvomerkkejä alueessa $1 < x < 1\frac{1}{2}$.

Nollakohdat:

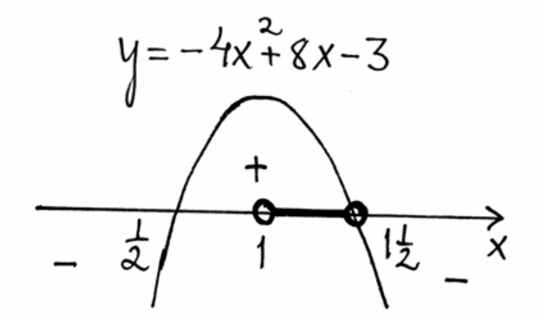
$$-4x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-4)}$$

$$x = \frac{-8 \pm 4}{-8}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = 1\frac{1}{2}$$

Kuvaaja:




Kun $1 < x < 1\frac{1}{2}$, niin $-4x^2 + 8x - 3 > 0$.

Tällöin $\left|-4x^2 + 8x - 3\right| = -4x^2 + 8x - 3$.

Siis

$$\frac{\left|-4x^2 + 8x - 3\right|}{3 - 2x} \qquad \left|\, 1 < x < 1\frac{1}{2}\right.$$

$$= \frac{-4x^2 + 8x - 3}{3 - 2x} \qquad \left|\, \begin{array}{l}\text{tulomuoto} \\ a(x - x_1)(x - x_2)\end{array}\right.$$

$$= \frac{-4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{3 - 2x}$$

$$= \frac{-2 \cdot 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{3 - 2x}$$

$$= \frac{-(2x - 1)(2x - 3)}{-(2x - 3)}$$

$$= 2x - 1$$

Vastaus a) $\begin{cases} 6x^2 + x - 1 & \text{, kun } -1 \le x \le -\frac{1}{2} \text{ tai } \frac{1}{3} \le x \le 1 \\ -6x^2 - x + 1 & \text{, kun } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3} \end{cases}$

b) $2x - 1$

**208**

Lauseke $\dfrac{3x^2+x+2}{-3x^2+x-2}$ on määritelty, jos $-3x^2+x-2 \neq 0$.

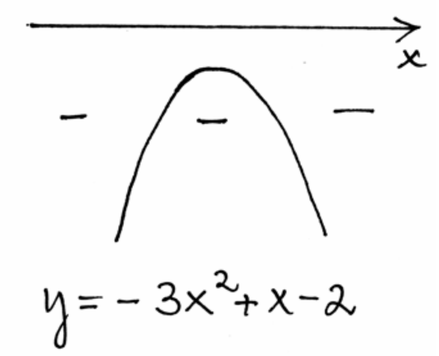
Nollakohdat:

$$-3x^2+x-2=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-3)\cdot(-2)}}{2\cdot(-3)}$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{-6}\notin\mathbb{R}$$

ei nollakohtia

Siis lauseke on määritelty kaikilla $x\in\mathbb{R}$.

Kuvaaja:




Siis
$$\left|-3x^2+x-2\right|=3x^2-x+2$$

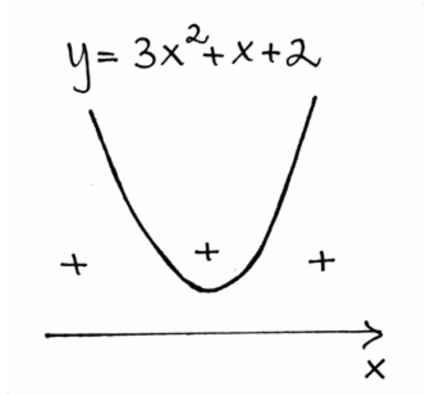
Osoittaja

Nollakohdat:

$$3x^2+x+2=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{6}\notin\mathbb{R}$$

ei nollakohtia

Kuvaaja:




Siis
$$\left|3x^2+x+2\right|=3x^2+x+2$$

Näin ollen

$$\left|\frac{3x^2+x+2}{-3x^2+x-2}\right|-1$$

$$=\frac{|3x^2+x+2|}{|-3x^2+x-2|}-1$$

$$=\frac{3x^2+x+2}{3x^2-x+2}-{}^{3x^2-x+2)}1$$

$$=\frac{3x^2+x+2-3x^2+x-2}{3x^2-x+2}$$

$$=\frac{2x}{3x^2-x+2}$$

Vastaus $\dfrac{2x}{3x^2-x+2},\ x\in\mathbb{R}$

**209**

Lauseke $\dfrac{|25x^2+100x+100|}{|5x+10|}$ on määritelty, jos

$$5x+10\neq 0$$
$$5x\neq -10$$
$$x\neq -2$$

**Tapa 1**

$$\frac{|25x^2+100x+100|}{|5x+10|} \qquad \frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|$$

$$=\left|\frac{25x^2+100x+100}{5x+10}\right|$$

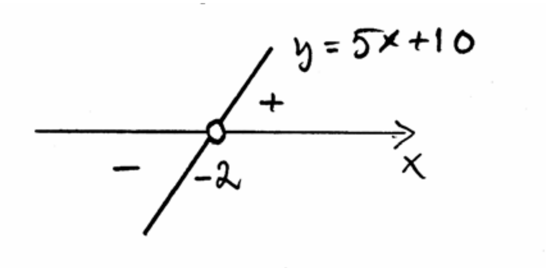
$$=\left|\frac{(5x+10)^{\cancel{2}}}{\cancel{5x+10}}\right|$$

$$=|5x+10|$$

Itseisarvon nollakohta:

$$5x+10=0$$
$$x=-2$$

Kuvaaja:



Siis

$$|5x+10| = \begin{cases} -5x-10 & \text{, jos } x < -2 \\ 5x+10 & \text{, jos } x > -2 \end{cases}$$

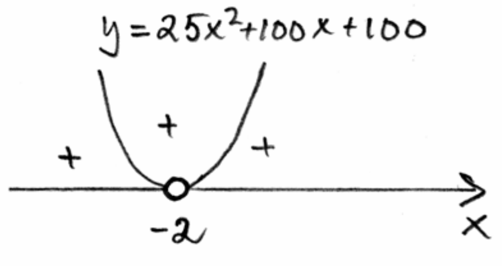
**Tapa 2**

Osoittaja

Nollakohdat:

$$\begin{aligned} 25x^2+100x+100 &= 0 \\ x^2+4x+4 &= 0 \\ (x+2)^2 &= 0 \\ x+2 &= 0 \\ x &= -2 \quad (\text{kaksoisjuuri}) \end{aligned}$$

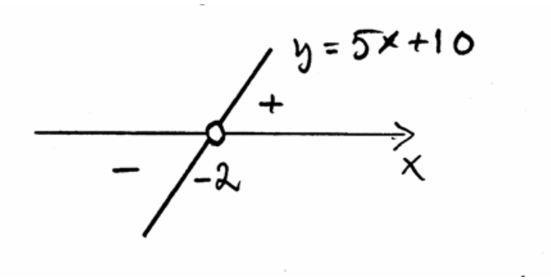
Kuvaaja:




Siis $|25x^2+100x+100| = 25x^2+100x+100,\ x \neq -2$.

Nimittäjä

Kuvaaja:




Siis

$$|5x+10| = \begin{cases} -5x-10 & \text{, jos } x < -2 \\ 5x+10 & \text{, jos } x > -2 \end{cases}$$

Näin ollen

alueessa $x < -2$

$$\begin{aligned} &\left|\frac{25x^2+100x+100}{5x+10}\right| \\ &= \frac{25x^2+100x+100}{-5x-10} \\ &= \frac{(5x+10)^{\cancel{2}}}{-\cancel{(5x+10)}} \\ &= -5x-10 \end{aligned}$$

alueessa $x > -2$

$$\left|\frac{25x^2+100x+100}{5x+10}\right|$$
$$= \frac{25x^2+100x+100}{5x+10}$$
$$= \frac{(5x+10)^{\cancel{2}}}{\cancel{(5x+10)}}$$
$$= 5x+10$$

Siis

$$\frac{|25x^2+100x+100|}{|5x+10|} = \begin{cases} -5x-10 & \text{, jos } x < -2 \\ 5x+10 & \text{, jos } x > -2 \end{cases}$$

Vastaus $$\frac{|25x^2+100x+100|}{|5x+10|} = \begin{cases} -5x-10 & \text{, jos } x < -2 \\ 5x+10 & \text{, jos } x > -2 \end{cases}$$

**210**

a)

$$|x-6| = 0$$

| Luvun $x-6$ itseisarvo eli etäisyys nollasta on 0, jos ja vain jos luku on nolla.

$$x-6=0$$
$$x=6$$

b)

$$|x-6| = \underbrace{3}_{\geq 0}$$

| Jos $b \geq 0$, niin $|a| = b \iff a = b$ tai $a = -b$.

$$x-6=3 \text{ tai } x-6=-3$$
$$x=9 \text{ tai } x=3$$

**Tapa 2**

$$\underbrace{|x-6|}_{\geq 0} = \underbrace{3}_{\geq 0}$$

| Jos $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin $a = b \iff a^2 = b^2$.

$$|x-6|^2 = 3^2$$

| $|a|^2 = a^2$

$$(x-6)^2 = 3^2$$
$$x^2-12x+36=9$$
$$x^2-12x+27=0$$
$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2-4\cdot 1\cdot 27}}{2\cdot 1} = \frac{12\pm 6}{2}$$
$$x = \frac{18}{2} = 9 \text{ tai } x = \frac{6}{2} = 3$$

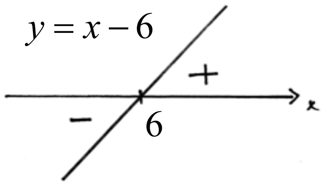
**Tapa 3**

$|x-6|=3$

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkitaan yhtälöä eri alueissa.

1) Jos $x-6 \geq 0$ eli $x \geq 6$, niin saadaan

$\underbrace{|x-6|}_{\geq 0}=3$ | $x \geq 6$ Jos $a \geq 0$, niin $|a|=a$.



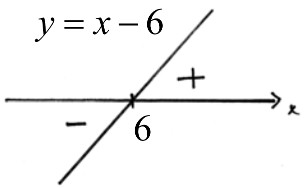

$x-6=3$

$x=9 \quad |x \geq 6$

kelpaa

2) Jos $x-6<0$ eli $x<6$, niin saadaan

$\underbrace{|x-6|}_{<0}=3$ | $x<6$ Jos $a<0$, niin $|a|=-a$.




$-(x-6)=3$

$-x+6=3$

$-x=-3$

$x=3 \quad |x<6$

kelpaa

Vastaus $x=3$ tai $x=9$

c)

$\underbrace{|x-6|}_{\geq 0}=\underbrace{-2}_{<0}$ aina epätosi

ei ratkaisua

**211**

a)

$|x-3|=\underbrace{2}_{\geq 0}$ | Jos $b \geq 0$, niin $|a|=b \Leftrightarrow a=b$ tai $a=-b$.

$x-3=2$ tai $x-3=-2$

$x=2+3$ tai $x=-2+3$

$x=5$ tai $x=1$

**Tapa 2**

$\underbrace{|x-3|}_{\geq 0}=\underbrace{2}_{\geq 0}$ | Jos $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$.

$|x-3|^2=2^2$ | $|a|=a^2$

$(x-3)^2=2^2$

$x^2-6x+9=4$

$x^2-6x+5=0$

$$x=\frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 4}{2}$$

$x=5$ tai $x=1$

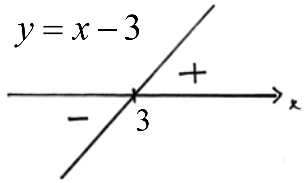
**Tapa 3**

$|x-3| = 2$

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkitaan yhtälöä eri alueissa.

1) Jos $x-3 \geq 0$ eli $x \geq 3$, niin saadaan

$|\underbrace{x-3}_{\geq 0}| = \underbrace{2}_{\geq 0}$ $\quad\Big|$ $x \geq 3$, Jos $a \geq 0$, niin $|a| = a$.



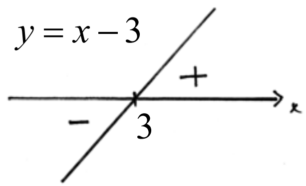

$x-3 = 2$

$x = 5 \quad |x \geq 3$

kelpaa

2) Jos $x-3 < 0$ eli $x < 3$, niin saadaan

$|\underbrace{x-3}_{<0}| = \underbrace{2}_{\geq 0}$ $\quad\Big|$ $x < 3$, Jos $a < 0$, niin $|a| = -a$.




$-(x-3) = 2$

$-x+3 = 2$

$-x = -1$

$x = 1 \quad |x < 3$

kelpaa

Vastaus $\quad x = 5$ tai $x = 1$

**211**

b)

$|x-2| = \underbrace{1}_{\geq 0}$ $\quad\Big|$ Jos $b \geq 0$, niin $|a| = b$ <=> $a = b$ tai $a = -b$.

$x-2 = 1$ tai $x-2 = -1$

$x = 1+2$ tai $x = -1+2$

$x = 3$ tai $x = 1$

**Tapa 2**

$\underbrace{|x-2|}_{\geq 0} = \underbrace{1}_{\geq 0}$ $\quad\Big|$ Jos $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin $a = b$ <=> $a^2 = b^2$.

$|x-2|^2 = 1^2 \quad \Big|\ |a|^2 = a^2$

$(x-2)^2 = 1^2$

$x^2 - 4x + 4 = 1$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$x = 3$ tai $x = 1$

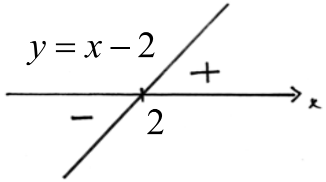
**Tapa 3**

$|x-2| = 1$

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkitaan yhtälöä eri alueissa.

1) Jos $x-2\geq 0$ eli $x\geq 2$, niin saadaan

$$\underbrace{|x-2|}_{\geq 0}=1 \qquad \left| \begin{array}{l} x\geq 2 \\ \text{Jos } a\geq 0, \text{ niin } |a|=a. \end{array}\right.$$



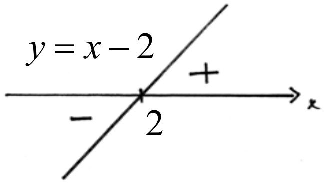

$$x-2=1$$

$$x=3 \qquad |\ x\geq 2$$

kelpaa

2) Jos $x-2<0$ eli $x<2$, niin saadaan

$$\underbrace{|x-2|}_{<0}=1 \qquad \left| \begin{array}{l} x< 2 \\ \text{Jos } a< 0, \text{ niin } |a|=-a. \end{array}\right.$$




$$-(x-2)=1$$

$$-x+2=1$$

$$-x=1-2$$

$$x=1 \qquad |\ x<2$$

kelpaa

Vastaus $\quad x=1$ tai $x=3$

c)

$$\underbrace{|x-1|}_{\geq 0}=\underbrace{-3}_{<0} \qquad \text{aina epätosi}$$

ei ratkaisua

**212**

a)

$$2|x-1|-4=0$$

$$2|x-1|=4 \qquad |:2$$

$$|x-1|=\underbrace{2}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } b\geq 0, \text{ niin} \\ |a|=b \iff a=b \text{ tai } a=-b. \end{array}\right.$$

$$x-1=2 \quad \text{tai} \quad x-1=-2$$

$$x=3 \quad \text{tai} \quad x=-1$$

**Tapa 2**

$$2|x-1|-4=0$$

$$2|x-1|=4$$

$$\underbrace{|x-1|}_{\geq 0}=\underbrace{2}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } a\geq 0 \text{ ja } b\geq 0, \\ \text{niin } a=b \iff a^2=b^2. \end{array}\right.$$

$$|x-1|^2=2^2 \qquad \left|\ |a|^2=a^2\right.$$

$$(x-1)^2=2^2$$

$$x^2-2x+1=4$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}$$

$$x=3 \text{ tai } x=-1$$

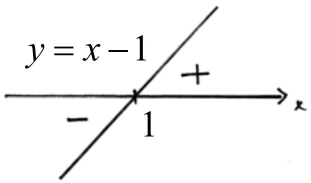
**Tapa 3**

$$2|x-1|-4=0$$

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkitaan yhtälöä eri alueissa.

1) Jos $x-1\geq 0$ eli $x\geq 1$, niin saadaan

$$2\underbrace{|x-1|}_{\geq 0}-4=0 \qquad \left|\begin{array}{l} x\geq 1 \\ \text{Jos } a\geq 0,\ \text{niin } |a|=a. \end{array}\right.$$

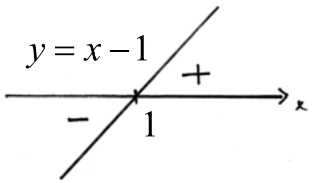



$$2(x-1)-4=0$$
$$2x-2-4=0$$
$$2x=6$$
$$x=3 \qquad |\ x\geq 1$$

kelpaa

2) Jos $x-1<0$ eli $x<1$, niin saadaan

$$2\underbrace{|x-1|}_{<0}-4=0 \qquad \left|\begin{array}{l} x<1 \\ \text{Jos } a<0,\ \text{niin } |a|=-a. \end{array}\right.$$




$$2(-x+1)-4=0$$
$$-2x+2-4=0$$
$$-2x=2$$
$$x=-1 \qquad |\ x<1$$

kelpaa

Vastaus $\quad x=-1$ tai $x=3$

b)

$$-|6x-1|=-5 \qquad |:-1$$

$$|6x-1|=\underbrace{5}_{\geq 0} \qquad \left|\begin{array}{l} \text{Jos } b\geq 0,\ \text{niin} \\ |a|=b \iff a=b \text{ tai } a=-b. \end{array}\right.$$

$$6x-1=5 \quad \text{tai} \quad 6x-1=-5$$
$$6x=6 \quad \text{tai} \quad 6x=-4$$
$$x=1 \quad \text{tai} \quad x=-\frac{2}{3}$$

**Tapa 2**

$$-|6x-1|=-5$$

$$\underbrace{|6x-1|}_{\geq 0}=\underbrace{5}_{\geq 0} \qquad \left|\begin{array}{l} \text{Jos } a\geq 0 \text{ ja } b\geq 0, \\ \text{niin } a=b \iff a^2=b^2. \end{array}\right.$$

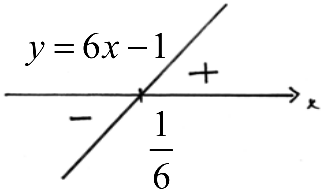
$$|6x-1|^2=5^2 \qquad \left|\ |a|^2=a^2\right.$$
$$(6x-1)^2=5^2$$
$$36x^2-12x+1=25$$
$$36x^2-12x-24=0 \qquad |:12$$
$$3x^2-x-2=0$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}=\frac{1\pm 5}{6}$$
$$x=1 \text{ tai } x=-\frac{2}{3}$$

**Tapa 3**

$-|6x-1|=-5$

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkitaan yhtälöä eri alueissa.

1) Jos $6x-1\geq 0$ eli $x\geq \frac{1}{6}$, niin saadaan




$-|\underbrace{6x-1}_{\geq 0}|=-5 \qquad \Big| \; x\geq \frac{1}{6}$

Jos $a\geq 0$, niin $|a|=a$.

$-(6x-1)=-5$

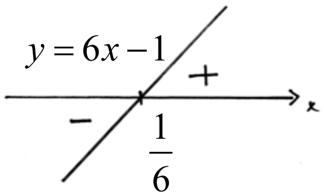
$-6x+1=-5$

$-6x=-6$

$x=1 \qquad \Big| \; x\geq \frac{1}{6}$

kelpaa

2) Jos $6x-1<0$ eli $x<\frac{1}{6}$, niin saadaan




$-|\underbrace{6x-1}_{<0}|=-5 \qquad \Big| \; x<\frac{1}{6}$

Jos $a<0$, niin $|a|=-a$.

$-(-6x+1)=-5$

$6x-1=-5$

$6x=-4$

$x=-\frac{2}{3} \qquad \Big| \; x<\frac{1}{6}$

kelpaa

Vastaus $\quad x=1$ tai $x=-\frac{2}{3}$

**213**

a)

$2|3x-1|=6 \qquad \Big| :2$

$|3x-1|=\underbrace{3}_{\geq 0}$

Jos $b\geq 0$, niin

$|a|=b \iff a=b$ tai $a=-b$.

$3x-1=3$ tai $3x-1=-3$

$3x=4$ tai $3x=-2$

$x=\frac{4}{3}$ tai $x=-\frac{2}{3}$

**Tapa 2**

$$2|3x-1| = 6 \qquad \Big| :2$$

$$\underbrace{|3x-1|}_{\geq 0} = \underbrace{3}_{\geq 0}$$

Jos $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin $a = b \iff a^2 = b^2$.

$$|3x-1|^2 = 3^2 \qquad \Big| \, |a|^2 = a^2$$

$$(3x-1)^2 = 3^2$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 9$$

$$9x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-8)}}{2 \cdot 9} = \frac{6 \pm 18}{18}$$

$$x = \frac{24}{18} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{12}{18}$$

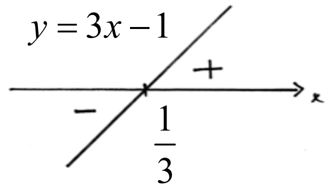
$$x = \frac{4}{3} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2}{3}$$

**Tapa 3**

$$2|3x-1| = 6$$

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkitaan yhtälöä eri alueissa.

1) Jos $3x - 1 \geq 0$ eli $x \geq \frac{1}{3}$, niin saadaan




$$2\underbrace{|3x-1|}_{\geq 0} = 6 \qquad \Big| \; x \geq \frac{1}{3}$$

Jos $a \geq 0$, niin $|a| = a$.

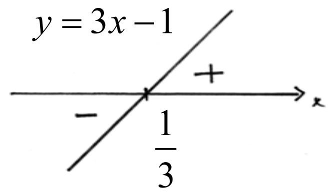
$$2(3x-1) = 6 \qquad \Big| :2$$

$$3x - 1 = 3$$

$$x = \frac{4}{3} \qquad \Big| \; x \geq \frac{1}{3}$$

kelpaa

2) Jos $3x - 1 < 0$ eli $x < \frac{1}{3}$, niin saadaan




$$2\underbrace{|3x-1|}_{<0} = 6 \qquad \Big| \; x < \frac{1}{3}$$

Jos $a < 0$, niin $|a| = -a$.

$$2(-3x+1) = 6 \qquad \Big| :2$$

$$-3x + 1 = 3$$

$$x = -\frac{2}{3} \qquad \Big| \; x < \frac{1}{3}$$

kelpaa

Vastaus $\quad x = \frac{4}{3}$ tai $x = -\frac{2}{3}$

b)

$$-|x-1| = 10 \qquad \big| \cdot (-1)$$

$$\underbrace{|x-1|}_{\geq 0} = \underbrace{-10}_{<0} \qquad \text{aina epätosi}$$

ei ratkaisua

**214**

a) $|3x-2| = 4x$

Koska $|3x-2| \geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $4x \geq 0$ eli $x \geq 0$.

Tällöin

$$|3x-2| = \underbrace{4x}_{\geq 0} \qquad \Bigg| \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \text{Jos } b \geq 0, \text{ niin} \\ |a| = b \text{ <=> } a = b \text{ tai } a = -b. \end{array}$$

$$3x - 2 = 4x \quad \text{tai} \quad 3x - 2 = -4x$$

$$-x = 2 \quad \text{tai} \quad 7x = 2$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{7} \qquad \big| \; x \geq 0$$

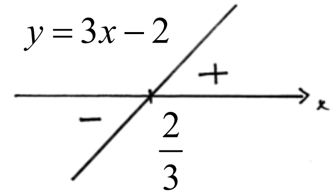
ei kelpaa — kelpaa

Vastaus $x = \dfrac{2}{7}$

**Tapa 2** $|3x-2| = 4x$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1) Jos $3x - 2 \geq 0$ eli $x \geq \dfrac{2}{3}$, niin saadaan




$$\underbrace{|3x-2|}_{\geq 0} = 4x \qquad \Bigg| \begin{array}{l} x \geq \frac{2}{3} \\ \text{Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a| = a. \end{array}$$

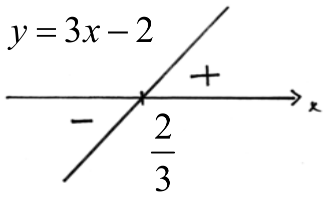
$$3x - 2 = 4x$$

$$-x = 2$$

$$x = -2 \qquad \Big| \; x \geq \frac{2}{3}$$

ei kelpaa

2) Jos $3x-2<0$ eli $x<\frac{2}{3}$, niin saadaan




$$\underbrace{|3x-2|}_{<0}=4x \qquad \left| \begin{array}{l} x<\frac{2}{3} \\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a. \end{array} \right.$$

$$-(3x-2)=4x$$
$$-3x+2=4x$$
$$-7x=-2$$
$$x=\frac{2}{7} \qquad \left| x<\frac{2}{3} \right.$$

kelpaa

Vastaus $x=\frac{2}{7}$

b) $|3x+1|=2x$

Koska $|3x+1|\geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $2x\geq 0$ eli $x\geq 0$.
Tällöin

$$|3x+1|=\underbrace{2x}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} x\geq 0 \\ \text{Jos } b\geq 0, \text{ niin} \\ |a|=b \Leftrightarrow a=b \text{ tai } a=-b. \end{array} \right.$$

$3x+1=2x$ tai $3x+1=-2x$

$3x-2x=-1$ tai $5x=-1$

$x=-1$ tai $x=-\frac{1}{5}$ $\quad |\ x\geq 0$

ei kelpaa    ei kelpaa

Vastaus ei ratkaisua

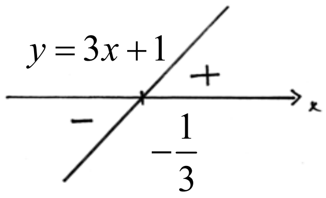
**Tapa 2** $|3x+1| = 2x$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1) Jos $3x+1 \geq 0$ eli $x \geq -\frac{1}{3}$, niin saadaan

$$\underbrace{|3x+1|}_{\geq 0} = 2x \qquad \Bigg| \; x \geq -\frac{1}{3}$$

Jos $a \geq 0$, niin $|a| = a$.

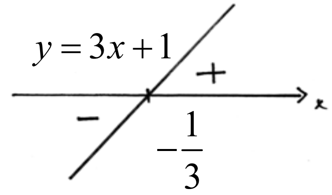



$$3x+1 = 2x$$

$$x = -1 \qquad \Bigg| \; x \geq -\frac{1}{3}$$

ei kelpaa

2) Jos $3x+1 < 0$ eli $x < -\frac{1}{3}$, niin saadaan




$$\underbrace{|3x+1|}_{<0} = 2x \qquad \Bigg| \; x < -\frac{1}{3}$$

Jos $a < 0$, niin $|a| = -a$.

$$-(3x+1) = 2x$$

$$-3x-1 = 2x$$

$$-5x = 1$$

$$x = -\frac{1}{5} \qquad \Bigg| \; x < -\frac{1}{3}$$

ei kelpaa

Vastaus ei ratkaisua

**215**

a) $|x-2|=2x$

Koska $|x-2|\geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $2x\geq 0$ eli $x\geq 0$. Tällöin

$$|x-2|=\underbrace{2x}_{\geq 0} \qquad \left|\begin{array}{l} x\geq 0 \\ \text{Jos } b\geq 0, \text{ niin} \\ |a|=b \iff a=b \text{ tai } a=-b. \end{array}\right.$$

$$x-2=2x \quad \text{tai} \quad x-2=-2x$$

$$-x=2 \quad \text{tai} \quad 3x=2$$

$$x=-2 \quad \text{tai} \quad x=\frac{2}{3} \qquad |\, x\geq 0$$

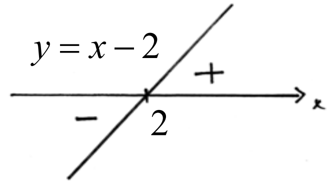
ei kelpaa kelpaa

Vastaus $x=\dfrac{2}{3}$

**Tapa 2** $|x-2|=2x$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1) Jos $x-2\geq 0$ eli $x\geq 2$, niin saadaan



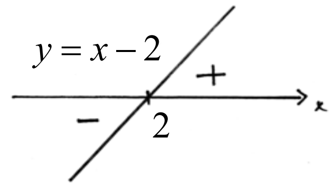

$$\underbrace{|x-2|}_{\geq 0}=2x \qquad \left|\begin{array}{l} x\geq 2 \\ \text{Jos } a\geq 0, \text{ niin } |a|=a. \end{array}\right.$$

$$x-2=2x$$

$$x=-2 \qquad |\, x\geq 2$$

ei kelpaa

2) Jos $x-2<0$ eli $x<2$, niin saadaan




$$\underbrace{|x-2|}_{<0}=2x \qquad \left|\begin{array}{l} x<2 \\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a. \end{array}\right.$$

$$-(x-2)=2x$$

$$-x+2=2x$$

$$-3x=-2$$

$$x=\frac{2}{3} \qquad |\, x<2$$

kelpaa

Vastaus $x=\dfrac{2}{3}$

b) $|1-2x| = -x+1$

Koska $|1-2x| \geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $-x+1 \geq 0$ eli $-x \geq -1$ eli $x \leq 1$. Tällöin

$$|1-2x| = \underbrace{-x+1}_{\geq 0} \quad \left|\ \begin{array}{l} x \leq 1 \\ \text{Jos } b \geq 0, \text{ niin} \\ |a| = b \iff a = b \text{ tai } a = -b. \end{array}\right.$$

$$1-2x = -x+1 \quad \text{tai} \quad 1-2x = -(-x+1)$$

$$x-2x = 1-1 \quad \text{tai} \quad 1-2x = x-1$$

$$-x = 0 \quad \text{tai} \quad -3x = -2$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{3} \qquad \Big|\ x \leq 1$$

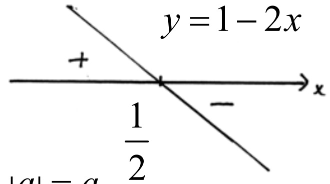
kelpaa kelpaa

Vastaus $x = 0$ tai $x = \dfrac{2}{3}$

**Tapa 2** $|1-2x| = -x+1$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1) Jos $1-2x \geq 0$ eli $-2x \geq -1$ eli $x \leq \dfrac{1}{2}$, niin saadaan




$$\underbrace{|1-2x|}_{\geq 0} = -x+1 \quad \left|\ \begin{array}{l} x \leq \frac{1}{2} \\ \text{Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a| = a. \end{array}\right.$$

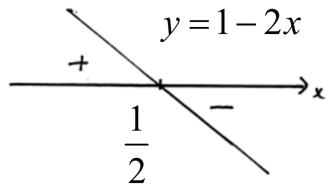
$$1-2x = -x+1$$

$$-x = 0$$

$$x = 0 \qquad \Big|\ x \leq \frac{1}{2}$$

kelpaa

2) Jos $1-2x < 0$ eli $x > \dfrac{1}{2}$, niin saadaan




$$\underbrace{|1-2x|}_{<0} = -x+1 \quad \left|\ \begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ \text{Jos } a < 0, \text{ niin } |a| = -a. \end{array}\right.$$

$$-(1-2x) = -x+1$$

$$-1+2x = -x+1$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3} \qquad \Big|\ x > \frac{1}{2}$$

kelpaa

Vastaus $x = 0$ tai $x = \dfrac{2}{3}$

**216**

a)

$$|3x-2| = \underbrace{4}_{\geq 0} \qquad \Big| \text{ Jos } b \geq 0, \text{ niin } |a| = b \iff a = b \text{ tai } a = -b.$$

$$3x-2=4 \quad \text{tai} \quad 3x-2=-4$$

$$3x=6 \quad \text{tai} \quad 3x=-2$$

$$x=2 \quad \text{tai} \quad x=-\frac{2}{3}$$

**Tapa 2**

$$\underbrace{|3x-2|}_{\geq 0} = \underbrace{4}_{\geq 0} \qquad \Big| \text{ Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \text{ niin } a = b \iff a^2 = b^2.$$

$$|3x-2|^2 = 4^2 \qquad \Big| \ |a|^2 = a^2$$

$$(3x-2)^2 = 4^2$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 16$$

$$9x^2 - 12x - 12 = 0 \qquad \Big| :3$$

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 8}{6}$$

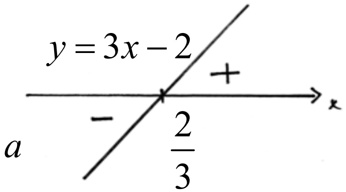
$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2}{3}$$

**Tapa 3** $|3x-2| = 4$

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkitaan yhtälöä eri alueissa.

1) Jos $3x-2 \geq 0$ eli $3x \geq 2$ eli $x \geq \frac{2}{3}$, niin saadaan

$$\underbrace{|3x-2|}_{\geq 0} = 4 \qquad \Big| \ x \geq \frac{2}{3}, \text{ Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a| = a$$



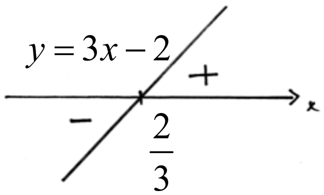

$$3x-2=4$$

$$3x=6$$

$$x=2 \qquad \Big| \ x \geq \frac{2}{3}$$

kelpaa

2) Jos $3x-2<0$ eli $x<\frac{2}{3}$, niin saadaan




$\underbrace{|3x-2|}_{<0}=4$ $\quad\Big|\ x<\frac{2}{3}$

Jos $a<0$, niin $|a|=-a$.

$-(3x-2)=4$

$-3x+2=4$

$-3x=2$

$x=-\frac{2}{3}$ $\quad\Big|\ x<\frac{2}{3}$

kelpaa

Vastaus $x=2$ tai $x=-\frac{2}{3}$

b)

$|3x-2|+4x=0$

$|3x-2|=-4x$

Koska $|3x-2|\geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $-4x\geq 0$ eli $x\leq 0$. Tällöin

$|3x-2|=\underbrace{-4x}_{\geq 0}$ $\quad\Big|\ x\leq 0$

Jos $b\geq 0$, niin

$|a|=b \iff a=b$ tai $a=-b$.

$3x-2=-4x$ tai $3x-2=4x$

$7x=2$ tai $-x=2$

$x=\frac{2}{7}$ tai $x=-2$ $\quad\Big|\ x\leq 0$

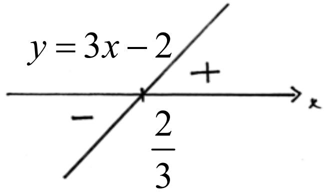
ei kelpaa kelpaa

Vastaus $x=-2$

**Tapa 2** $|3x-2|+4x=0$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1) Jos $3x-2\geq 0$ eli $x\geq \frac{2}{3}$, niin saadaan




$$\underbrace{|3x-2|}_{\geq 0}+4x=0 \qquad \left| \begin{array}{l} x\geq \frac{2}{3} \\ \text{Jos } a\geq 0, \text{ niin } |a|=a. \end{array} \right.$$

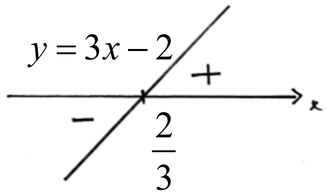
$$3x-2+4x=0$$

$$7x=2$$

$$x=\frac{2}{7} \qquad \left| x\geq \frac{2}{3} \right.$$

ei kelpaa

2) Jos $3x-2<0$ eli $x<\frac{2}{3}$, niin saadaan




$$\underbrace{|3x-2|}_{<0}+4x=0 \qquad \left| \begin{array}{l} x<\frac{2}{3} \\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a. \end{array} \right.$$

$$-(3x-2)+4x=0$$

$$-3x+2+4x=0$$

$$x=-2 \qquad \left| x<\frac{2}{3} \right.$$

kelpaa

Vastaus $x=-2$

**217**

a)

$$\underbrace{|x-112|}_{\geq 0}=\underbrace{-112}_{<0} \quad \text{aina epätosi}$$

ei ratkaisua

b)

$$3x-|1+2x|=6$$

$$-|1+2x|=-3x+6 \qquad |\cdot(-1)$$

$$|1+2x|=3x-6$$

Koska $|1+2x|\geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $3x-6\geq 0$ eli $3x\geq 6$ eli $x\geq 2$. Tällöin

$$|1+2x|=\underbrace{3x-6}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} x\geq 2 \\ \text{Jos } b\geq 0, \text{ niin} \\ |a|=b \text{ <=> } a=b \text{ tai } a=-b. \end{array} \right.$$

$$1+2x=3x-6 \quad \text{tai} \quad 1+2x=-(3x-6)$$

$$-3x+2x=-6-1 \quad \text{tai} \quad 1+2x=-3x+6$$

$$-x=-7 \quad \text{tai} \quad 5x=5$$

$$x=7 \quad \text{tai} \quad x=1 \qquad |\, x\geq 2$$

kelpaa ei kelpaa

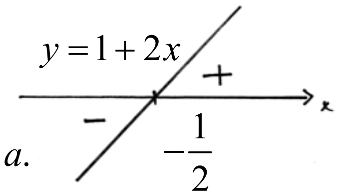
Vastaus $x=7$

**Tapa 2** $3x - |1 + 2x| = 6$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1) Jos $1 + 2x \geq 0$ eli $2x \geq -1$ eli $x \geq -\frac{1}{2}$, niin saadaan

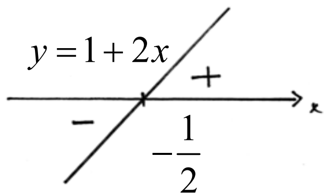
$$3x - \underbrace{|1 + 2x|}_{\geq 0} = 6 \qquad \left| \begin{array}{l} x \geq -\frac{1}{2} \\ \text{Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a| = a. \end{array} \right.$$




$$3x - (1 + 2x) = 6$$
$$3x - 1 - 2x = 6$$
$$3x - 2x = 6 + 1$$
$$x = 7 \quad \text{kelpaa} \qquad \left| \, x \geq -\frac{1}{2} \right.$$

2) Jos $1 + 2x < 0$ eli $x < -\frac{1}{2}$, niin saadaan

$$3x - \underbrace{|1 + 2x|}_{<0} = 6 \qquad \left| \begin{array}{l} x < -\frac{1}{2} \\ \text{Jos } a < 0, \text{ niin } |a| = -a. \end{array} \right.$$




$$3x - (-1 - 2x) = 6$$
$$3x + 1 + 2x = 6$$
$$5x = 5$$
$$x = 1 \quad \text{ei kelpaa} \qquad \left| \, x < -\frac{1}{2} \right.$$

Vastaus $\quad x = 7$

**218**

a)

$$|1 - x| + x + 2 = 2$$
$$|1 - x| = -x$$

Koska $|1 - x| \geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $-x \geq 0$ eli $x \leq 0$. Tällöin

$$|1 - x| = \underbrace{-x}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} x \leq 0 \\ \text{Jos } b \geq 0, \text{ niin} \\ |a| = b \iff a = b \text{ tai } a = -b. \end{array} \right.$$

$$1 - x = -x \quad \text{tai} \quad 1 - x = -(-x)$$
$$-x + x = -1 \quad \text{tai} \quad 1 - x = x$$
$$0 = -1 \quad \text{tai} \quad -2x = -1$$
$$\text{ei ratkaisua} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{2} \qquad \left| \, x \leq 0 \right.$$
$$\text{ei kelpaa}$$

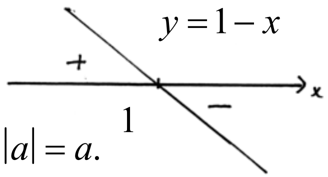
Vastaus $\quad$ Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

**Tapa 2** $|1-x|+x+2=2$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1) Jos $1-x \geq 0$ eli $x \leq 1$, niin saadaan

$$\underbrace{|1-x|}_{\geq 0}+x+2=2 \qquad \left| \begin{array}{l} x \leq 1 \\ \text{Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a|=a. \end{array} \right.$$



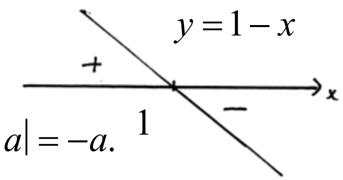

$$1-x+x+2=2$$

$$0=-1 \text{ aina epätosi}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua alueessa $x \leq 1$.

2) Jos $1-x<0$ eli $x>1$, niin saadaan

$$\underbrace{|1-x|}_{<0}+x+2=2 \qquad \left| \begin{array}{l} x > 1 \\ \text{Jos } a < 0, \text{ niin } |a|=-a. \end{array} \right.$$




$$-(1-x)+x+2=2$$

$$-1+x+x+2=2$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad | \, x>1$$

ei kelpaa

Yhtälöllä ei ole ratkaisua alueessa $x>1$.

Vastaus ei ratkaisua

b)

$$|1-x|+x+2=7$$

$$|1-x|=5-x$$

Koska $|1-x| \geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $5-x \geq 0$ eli $-x \geq -5$ eli $x \leq 5$. Tällöin

$$|1-x|=\underbrace{5-x}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} x \leq 5 \\ \text{Jos } b \geq 0, \text{ niin} \\ |a|=b \Leftrightarrow a=b \text{ tai } a=-b. \end{array} \right.$$

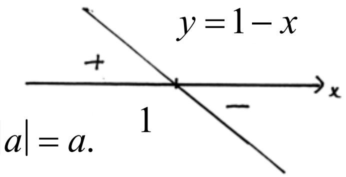
$$\begin{array}{lll} 1-x=5-x & \text{tai} & 1-x=-5+x \\ -x+x=5-1 & \text{tai} & -2x=-6 \\ 0=4 & \text{tai} & x=3 \quad | \, x \leq 5 \\ \text{ei ratkaisua} & & \text{kelpaa} \end{array}$$

Vastaus $x=3$

**Tapa 2** $|1-x|+x+2=7$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1) Jos $1-x \geq 0$ eli $x \leq 1$, niin saadaan




$\underbrace{|1-x|}_{\geq 0}+x+2=7$ $\quad\Big|\; x \leq 1$

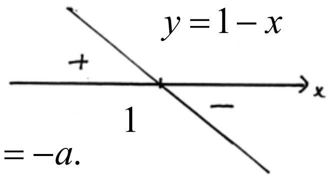
Jos $a \geq 0$, niin $|a|=a$.

$1-x+x+2=7$

$3=7$ aina epätosi

Yhtälöllä ei ole ratkaisua alueessa $x \leq 1$.

2) Jos $1-x<0$ eli $x>1$, niin saadaan




$\underbrace{|1-x|}_{<0}+x+2=7$ $\quad\Big|\; x>1$

Jos $a<0$, niin $|a|=-a$.

$-(1-x)+x+2=7$

$-1+x+x+2=7$

$2x=7$

$x=3 \quad |\; x>1$

kelpaa

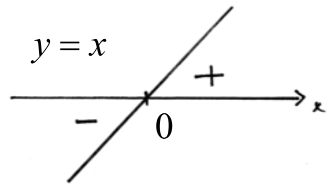
Vastaus $x=3$

**219**

$x|x|+2x+1=0$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1) Jos $x \geq 0$, niin saadaan




$x\underbrace{|x|}_{\geq 0}+2x+1=0$ $\quad\Big|\; x \geq 0$

Jos $a \geq 0$, niin $|a|=a$.

$x \cdot x+2x+1=0$

$x^2+2x+1=0$

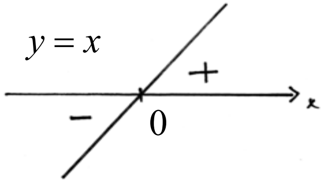
$(x+1)^2=0$

$x+1=0$

$x=-1 \quad |\; x \geq 0$

ei kelpaa

2) Jos $x<0$, niin saadaan




$$\underbrace{x}_{<0}|x|+2x+1=0 \qquad \left|\begin{array}{l} x<0 \\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a. \end{array}\right.$$

$$x\cdot(-x)+2x+1=0$$

$$-x^2+2x+1=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{-2}=\frac{-2\pm\sqrt{4\cdot 2}}{-2}$$

$$x=\frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{-2}=\frac{-2\cdot\left(1\mp\sqrt{2}\right)}{-2}$$

$$x=1-\sqrt{2} \text{ tai } x=1+\sqrt{2} \qquad | \, x<0$$

kelpaa ei kelpaa

Vastaus $x=1-\sqrt{2}$

**220**

a)

$$|2x-3|=|4-2x| \qquad \left|\begin{array}{l} |a|=|b| \Leftrightarrow \\ a=b \text{ tai } a=-b \end{array}\right.$$

$$2x-3=4-2x \quad \text{tai} \quad 2x-3=-(4-2x)$$

$$4x=7 \quad \text{tai} \quad 2x-3=-4+2x$$

$$x=\frac{7}{4} \quad \text{tai} \quad 0=-1 \text{ aina epätosi}$$

$$x=1\frac{3}{4} \quad \text{tai} \quad \text{ei ratkaisua}$$

Vastaus $x=1\frac{3}{4}$

**Tapa 2**

$$\underbrace{|2x-3|}_{\geq 0}=\underbrace{|4-2x|}_{\geq 0} \qquad \left|\begin{array}{l} \text{Jos } a\geq 0 \text{ ja } b\geq 0, \\ \text{niin } a=b \Leftrightarrow a^2=b^2. \end{array}\right.$$

$$|2x-3|^2=|4-2x|^2 \qquad \left| \, |a|^2=a^2 \right.$$

$$(2x-3)^2=(4-2x)^2$$

$$4x^2-12x+9=16-16x+4x^2$$

$$4x=7$$

$$x=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$$

b)

$$|x-5| = |5-x| \qquad \left|\ \begin{array}{l} |a| = |b| <=> \\ a = b \text{ tai } a = -b \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} x-5=5-x & \text{tai} & x-5=-(5-x) \\ 2x=10 & \text{tai} & x-5=-5+x \\ x=5 & \text{tai} & 0=0 \quad \text{aina tosi} \\ x=5 & \text{tai} & x\in\mathbb{R} \end{array}$$

Vastaus $\quad x \in \mathbb{R}$

**Tapa 2**

$$\underbrace{|x-5|}_{\geq 0} = \underbrace{|5-x|}_{\geq 0} \qquad \left|\ \begin{array}{l} \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \\ \text{niin } a = b <=> a^2 = b^2. \end{array}\right.$$

$$|x-5|^2 = |5-x|^2 \qquad \left|\ |a|^2 = a^2\right.$$

$$(x-5)^2 = (5-x)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = 25 - 10x + x^2$$

$$0 = 0 \quad \text{aina tosi}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Vastaus $\quad x \in \mathbb{R}$

**221**

a)

$$|1-x| = |x+1| \qquad \left|\ \begin{array}{l} |a| = |b| <=> \\ a = b \text{ tai } a = -b \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} 1-x=x+1 & \text{tai} & 1-x=-(x+1) \\ -x-x=0 & \text{tai} & 1-x=-x-1 \\ -2x=0 & \text{tai} & 0=-2 \quad \text{aina epätosi} \\ x=0 & \text{tai} & \text{ei ratkaisua} \end{array}$$

Vastaus $\quad x = 0$

**Tapa 2**

$$\underbrace{|1-x|}_{\geq 0} = \underbrace{|x+1|}_{\geq 0} \qquad \left|\ \begin{array}{l} \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \text{ niin} \\ a = b <=> a^2 = b^2. \end{array}\right.$$

$$|1-x|^2 = |x+1|^2 \qquad \left|\ |a|^2 = a^2\right.$$

$$(1-x)^2 = (x+1)^2$$

$$1 - 2x + x^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$-4x = 0$$

$$x = 0$$

Vastaus $\quad x = 0$

b)

$$|2x-1| = |3-6x| \qquad \left| \begin{array}{l} |a| = |b| \iff \\ a = b \text{ tai } a = -b \end{array} \right.$$

$$2x-1 = 3-6x \text{ tai } 2x-1 = -(3-6x)$$
$$2x+6x = 3+1 \text{ tai } 2x-1 = -3+6x$$
$$8x = 4 \text{ tai } -4x = -2$$
$$x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{1}{2}$$

Vastaus $x = \frac{1}{2}$

**Tapa 2**

$$\underbrace{|2x-1|}_{\geq 0} = \underbrace{|3-6x|}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \\ \text{niin } a = b \iff a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$|2x-1|^2 = |3-6x|^2 \qquad \left| \; |a|^2 = a^2 \right.$$

$$(2x-1)^2 = (3-6x)^2$$
$$4x^2 - 4x + 1 = 9 - 36x + 36x^2$$
$$-32x^2 + 32x - 8 = 0 \qquad |:(-8)$$
$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$(2x-1)^2 = 0$$
$$2x-1 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

**222**

a)

$$|11x-6| = \underbrace{5}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } b \geq 0, \text{ niin} \\ |a| = b \iff a = b \text{ tai } a = -b. \end{array} \right.$$

$$11x-6 = 5 \text{ tai } 11x-6 = -5$$
$$11x = 11 \text{ tai } 11x = 1$$
$$x = 1 \text{ tai } x = \frac{1}{11}$$

**Tapa 2**

$$\underbrace{|11x-6|}_{\geq 0} = \underbrace{5}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \\ \text{niin } a = b \iff a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$|11x-6|^2 = 5^2 \qquad \left| \; |a|^2 = a^2 \right.$$

$$(11x-6)^2 = 5^2$$
$$121x^2 - 132x + 36 = 25$$
$$121x^2 - 132x + 11 = 0$$
$$x = \frac{132 \pm \sqrt{(-132)^2 - 4 \cdot 121 \cdot 11}}{2 \cdot 121} = \frac{132 \pm 110}{242}$$
$$x = \frac{242}{242} \text{ tai } x = \frac{22}{242}$$
$$x = 1 \text{ tai } x = \frac{1}{11}$$

**Tapa 3**

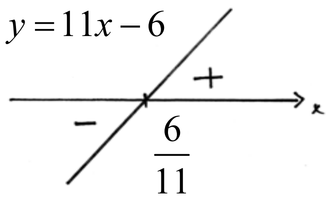
$$|11x-6|=5$$

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkitaan yhtälöä eri alueissa.

1) Jos $11x-6\geq 0$ eli $11x\geq 6$ eli $x\geq\frac{6}{11}$, niin saadaan

$$\underbrace{|11x-6|}_{\geq 0}=5 \qquad \left|\; x\geq\frac{6}{11}\right.$$

Jos $a\geq 0$, niin $|a|=a$.



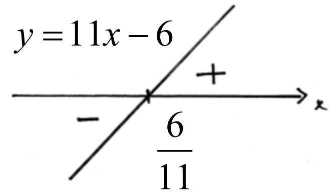

$$11x-6=5$$

$$11x=11$$

$$x=1 \qquad \left|\; x\geq\frac{6}{11}\right.$$

kelpaa

2) Jos $11x-6<0$ eli $x<\frac{6}{11}$, niin saadaan




$$\underbrace{|11x-6|}_{<0}=5 \qquad \left|\; x<\frac{6}{11}\right.$$

Jos $a<0$, niin $|a|=-a$.

$$-(11x-6)=5$$

$$-11x+6=5$$

$$-11x=-1$$

$$x=\frac{1}{11} \qquad \left|\; x<\frac{6}{11}\right.$$

kelpaa

Vastaus $\quad x=1$ tai $x=\frac{1}{11}$

b)

$$|x+100|=|100-x| \qquad \left|\; |a|=|b| <=> a=b \text{ tai } a=-b\right.$$

$x+100=100-x$ tai $x+100=-(100-x)$

$x+x=100-100$ tai $x+100=-100+x$

$2x=0$ tai $0=-200$ aina epätosi

$x=0$ tai ei ratkaisua

Vastaus $\quad x=0$

**Tapa 2**

$$\underbrace{|x+100|}_{\geq 0} = \underbrace{|100-x|}_{\geq 0}$$
| Jos $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

$$|x+100|^2 = |100-x|^2$$
| $|a|^2 = a^2$

$$(x+100)^2 = (100-x)^2$$
$$x^2 + 200x + 10\,000 = 10\,000 - 200x + x^2$$
$$400x = 0$$
$$x = 0$$

Vastaus $x = 0$

**223**

a)
$$|x-2| - |3x+1| = 0$$
$$|x-2| = |3x+1|$$
| $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ tai $a = -b$

$$x - 2 = 3x + 1 \quad \text{tai} \quad x - 2 = -(3x+1)$$
$$-2x = 3 \quad \text{tai} \quad x - 2 = -3x - 1$$
$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad 4x = 1$$
$$x = -1\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{4}$$

**Tapa 2**

$$|x-2| - |3x+1| = 0$$
$$\underbrace{|x-2|}_{\geq 0} = \underbrace{|3x+1|}_{\geq 0}$$
| Jos $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

$$|x-2|^2 = |3x+1|^2$$
| $|a|^2 = a^2$

$$(x-2)^2 = (3x+1)^2$$
$$x^2 - 4x + 4 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$8x^2+10x-3=0$$

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 8\cdot(-3)}}{2\cdot 8}=\frac{-10\pm 14}{16}$$

$$x=\frac{4}{16}\ \text{ tai }\ x=-\frac{24}{16}$$

$$x=\frac{1}{4}\ \text{ tai }\ x=-\frac{3}{2}$$

Vastaus $\quad x=\frac{1}{4}$ tai $x=-1\frac{1}{2}$

b)

$$\underbrace{|-x-10|}_{\geq 0}=\underbrace{-|x+10|}_{\leq 0}$$

Yhtälö on siis tosi, jos ja vain jos yhtälön molemmat puolet ovat nollia. Siis

$$|-x-10|=0 \quad \text{ja} \quad -|x+10|=0$$

$$-x-10=0 \quad \text{ja} \quad |x+10|=0$$

$$-x=10 \quad \text{ja} \quad x+10=0$$

$$x=-10 \quad \text{ja} \quad x=-10$$

Vastaus $\quad x=-10$

**Tapa 2**

$$|-x-10|=-|x+10| \qquad \big|\ |a|=|-a|$$

$$|x+10|=-|x+10|$$

$$|x+10|+|x+10|=0$$

$$2|x+10|=0$$

$$|x+10|=0$$

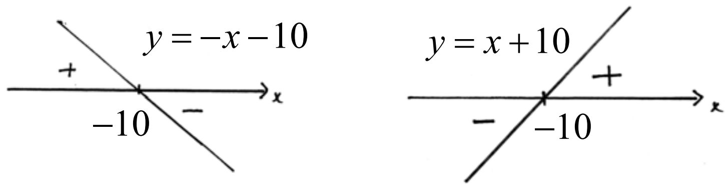
$$x+10=0$$

$$x=-10$$

**Tapa 3**

$$|-x-10|=-|x+10|$$

Ratkaistaan yhtälö poistamalla itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkimalla yhtälöä eri alueissa.




Merkkikaavio:

| | | |
|---|---|---|
| $-x-10$ | + | – |
| $x+10$ | – | + |

$-10$

$x$

1) Jos $x \le -10$, niin saadaan

$$\underbrace{|-x-10|}_{\ge 0} = -\underbrace{|x+10|}_{\le 0}$$

| $x \le -10$
| Jos $a \ge 0$, niin $|a| = a$.
| Jos $a \le 0$, niin $|a| = -a$.

$$-x-10 = -(-x-10)$$
$$-x-10 = x+10$$
$$-2x = 20$$
$$x = -10 \quad \Big| \; x \le -10$$

kelpaa

2) Jos $x > -10$, niin saadaan

$$\underbrace{|-x-10|}_{<0} = -\underbrace{|x+10|}_{\ge 0}$$

| $x > -10$
| Jos $a \ge 0$, niin $|a| = a$.
| Jos $a \le 0$, niin $|a| = -a$.

$$x+10 = -(x+10)$$
$$x+10 = -x-10$$
$$2x = -20$$
$$x = -10 \quad \Big| \; x > -10$$

ei kelpaa

Vastaus $x = -10$

**224**

a)

$$|x-4| = 5|1-x| \quad \Big| \; 5 = |5|$$

$$|x-4| = |5| \cdot |1-x|$$

| tulon itseisarvo:
| $|a| \cdot |b| = |ab|$

$$|x-4| = |5(1-x)|$$

$$|x-4| = |5-5x|$$

| $|a| = |b| \Leftrightarrow$
| $a = b$ tai $a = -b$

$x - 4 = 5 - 5x$ tai $x - 4 = -(5-5x)$

$6x = 9$ tai $x - 4 = -5 + 5x$

$x = \frac{9}{6}$ tai $-4x = -1$

$x = 1\frac{1}{2}$ tai $x = \frac{1}{4}$

**Tapa 2**

$$\underbrace{|x-4|}_{\ge 0} = \underbrace{5|1-x|}_{\ge 0}$$

| Jos $a \ge 0$ ja $b \ge 0$,
| niin $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

$$|x-4|^2 = (5|1-x|)^2$$

| $|a|^2 = a^2$
| $(ab)^2 = a^2b^2$

$$(x-4)^2 = 5^2(1-x)^2$$
$$x^2 - 8x + 16 = 25(1 - 2x + x^2)$$
$$x^2 - 8x + 16 = 25 - 50x + 25x^2$$

$$-24x^2+42x-9=0 \qquad \Big| :(-3)$$

$$8x^2-14x+3=0$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 8\cdot 3}}{2\cdot 8}=\frac{14\pm 10}{16}$$

$$x=\frac{24}{16} \text{ tai } x=\frac{4}{16}$$

$$x=\frac{3}{2} \text{ tai } x=\frac{1}{4}$$

b)

$$\big||x|-2\big|=\underbrace{1}_{\geq 0} \qquad \Big| \text{Jos } b\geq 0, \text{ niin } |a|=b <=> a=b \text{ tai } a=-b.$$

$$|x|-2=1 \text{ tai } |x|-2=-1$$

$$|x|=3 \text{ tai } |x|=1$$

$$x=3 \text{ tai } x=-3 \text{ tai } x=1 \text{ tai } x=-1$$

Vastaus a) $x=1\frac{1}{2}$ tai $x=\frac{1}{4}$

b) $x=\pm 3$ tai $x=\pm 1$

**225**

a)

$$\frac{|x+1|}{3}=\left|x-\frac{x+3}{5}\right| \qquad \Big|\ 3=|3|$$

$$\frac{|x+1|}{|3|}=\left|x-\frac{x+3}{5}\right| \qquad \Big| \text{ osamäärän itseisarvo: } \frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|$$

$$\left|\frac{x+1}{3}\right|=\left|x-\frac{x+3}{5}\right| \qquad \Big|\ |a|=|b| <=> a=b \text{ tai } a=-b$$

$$\frac{x+1}{3}=x-\frac{x+3}{5} \text{ tai } \frac{x+1}{3}=-x+\frac{x+3}{5} \qquad \Big|\cdot 15$$

$$5(x+1)=15x-3(x+3) \text{ tai } 5(x+1)=-15x+3(x+3)$$

$$5x+5=15x-3x-9 \text{ tai } 5x+5=-15x+3x+9$$

$$-7x=-14 \text{ tai } 17x=4$$

$$x=2 \text{ tai } x=\frac{4}{17}$$

**Tapa 2**

$$\frac{|x+1|}{3}=\left|x-\frac{x+3}{5}\right|$$

$$\frac{|x+1|}{3}=\left|\frac{5x}{5}-\frac{x+3}{5}\right|$$

$$\frac{|x+1|}{3}=\left|\frac{5x-(x+3)}{5}\right|$$

$$\underbrace{\frac{|x+1|}{3}}_{\geq 0} = \underbrace{\left|\frac{4x-3}{5}\right|}_{\geq 0} \qquad \Big| \text{ Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \text{ niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

$$\left(\frac{|x+1|}{3}\right)^2 = \left|\frac{4x-3}{5}\right|^2 \qquad \Big| \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2},\quad |a|^2 = a^2$$

$$\frac{(x+1)^2}{3^2} = \left(\frac{4x-3}{5}\right)^2 \qquad \Big| \cdot (9 \cdot 25)$$

$$\frac{x^2+2x+1}{9} = \frac{16x^2-24x+9}{25}$$

$$25(x^2+2x+1) = 9(16x^2-24x+9)$$

$$25x^2+50x+25 = 144x^2-216x+81$$

$$-119x^2+266x-56 = 0 \qquad \Big| : (-7)$$

$$17x^2-38x+8 = 0$$

$$x = \frac{38 \pm \sqrt{(-38)^2 - 4 \cdot 17 \cdot 8}}{2 \cdot 17}$$

$$x = \frac{38 \pm 30}{34}$$

$$x = \frac{68}{34} \quad \text{tai} \quad x = \frac{8}{34}$$

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4}{17}$$

b)

$$\big|3 - |x|\big| = \underbrace{4}_{\geq 0} \qquad \Big| \text{ Jos } b \geq 0, \text{ niin } |a| = b \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b.$$

$$3 - |x| = 4 \qquad \text{tai} \qquad 3 - |x| = -4$$

$$\underbrace{|x|}_{\geq 0} = \underbrace{-1}_{<0} \text{ aina epätosi} \qquad \text{tai} \qquad |x| = 7$$

$$\text{ei ratkaisua} \qquad \text{tai} \qquad x = \pm 7$$

Vastaus $x = \pm 7$

**226**

a) Väite: $|a|^2 = a^2$

Todistus: Käytetään itseisarvon määritelmää.

1) Jos $a \geq 0$, niin yhtälön $|a|^2 = a^2$

vasen puoli on $|a|^2 = a^2$ ja

oikea puoli on $a^2$.

Siis yhtälö $|a|^2 = a^2$ on tosi, kun $a \geq 0$.

2) Jos $a < 0$, niin yhtälön $|a|^2 = a^2$

vasen puoli on $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$ ja

oikea puoli on $a^2$.

Siis yhtälö $|a|^2 = a^2$ on tosi, kun $a < 0$.

Väite on siis tosi kaikilla reaaliluvuilla $a$. $\square$

b)

$$|x-7|^2 = x^2 \qquad \Big|\ |a|^2 = a^2$$

$$(x-7)^2 = x^2$$

$$x^2 - 14x + 49 = x^2$$

$$-14x = -49$$

$$x = \frac{-49}{-14}$$

$$x = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

**227**

$$\sqrt{x^2+1} = |x-1|$$

Koska juurrettava $x^2 + 1 \geq 0$ aina, yhtälö on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$ .

Koska yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, voidaan käyttää neliöönkorotuslausetta.

$$\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\geq 0} = \underbrace{|x-1|}_{\geq 0} \qquad \Big|\ x \in \mathbb{R}\text{. Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0\text{, niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 = |x-1|^2 \qquad \Big|\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ |a|^2 = a^2$$

$$x^2 + 1 = (x-1)^2$$

$$x^2 + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x = 0$$

$$x = 0 \qquad \Big|\ x \in \mathbb{R}$$

kelpaa

Vastaus $x = 0$

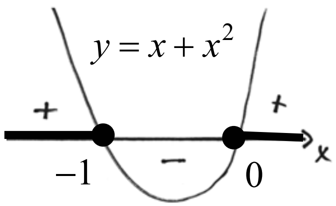
**228**

$$\sqrt{x+x^2}-|x-2|=0$$

Yhtälö on määritelty, kun $x+x^2\geq 0$.
Nollakohdat:

$$x+x^2=0$$
$$x(1+x)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=-1$$

Kuvaaja:




Siis $x\leq -1$ tai $x\geq 0$.

Ratkaistaan yhtälö alueessa $x\leq -1$ tai $x\geq 0$.

$$\sqrt{x+x^2}-|x-2|=0$$

$$\underbrace{\sqrt{x+x^2}}_{\geq 0}=\underbrace{|x-2|}_{\geq 0} \quad \Big| \; x\leq -1 \text{ tai } x\geq 0$$

Jos $a\geq 0$ ja $b\geq 0$,
niin $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$.

$$\left(\sqrt{x+x^2}\right)^2=|x-2|^2 \quad \Big| \; \left(\sqrt{a}\right)^2=a, \; |a|^2=a^2$$

$$x+x^2=(x-2)^2$$
$$x+x^2=x^2-4x+4$$
$$5x=4$$
$$x=\frac{4}{5} \quad \Big| \; x\leq -1 \text{ tai } x\geq 0$$

kelpaa

Vastaus $x=\dfrac{4}{5}$

**229**

$$|2k+1| = \sqrt{k^2+2}$$

Koska juurrettava $k^2+2 \geq 0$ aina, yhtälö on määritelty kaikilla $k \in \mathbb{R}$ . Ratkaistaan yhtälö.

$$\underbrace{|2k+1|}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{k^2+2}}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} k \in \mathbb{R} \\ \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \\ \text{niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$|2k+1|^2 = \left(\sqrt{k^2+2}\right)^2 \qquad \left| \begin{array}{l} |a|^2 = a^2 \\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \end{array} \right.$$

$$(2k+1)^2 = k^2+2$$

$$4k^2+4k+1 = k^2+2$$

$$3k^2+4k-1 = 0$$

$$k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3} = \frac{-4\pm\sqrt{28}}{6}$$

$$k = \frac{-4\pm\sqrt{4\cdot 7}}{6} = \frac{-4\pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2\left(-2\pm\sqrt{7}\right)}{6}$$

$$k = \frac{-2\pm\sqrt{7}}{3} \qquad \big|\ k \in \mathbb{R}$$

kelpaavat

Vastaus $k = \dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$

**230**

$$\frac{|-3k-6|}{\sqrt{k^2+1}} = 3$$

Juurrettava $k^2+1 > 0$ aina, joten yhtälö on määritelty kaikilla $k \in \mathbb{R}$ . Tällöin

$$\frac{|-3k-6|}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \qquad \left| \begin{array}{l} k \in \mathbb{R} \\ \cdot\sqrt{k^2+1} \quad (\neq 0) \end{array} \right.$$

$$\underbrace{|-3k-6|}_{\geq 0} = \underbrace{3\sqrt{k^2+1}}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \\ \text{niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$|-3k-6|^2 = \left(3\sqrt{k^2+1}\right)^2 \qquad \left| \begin{array}{l} |a|^2 = a^2 \\ (ab)^2 = a^2b^2 \end{array} \right.$$

$$(-3k-6)^2 = 3^2\cdot\left(\sqrt{k^2+1}\right)^2 \qquad \left| \begin{array}{l} a^2 = (-a)^2 \\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \end{array} \right.$$

$$(3k+6)^2 = 9\left(k^2+1\right)$$

$$9k^2+36k+36 = 9k^2+9$$

$$36k = -27$$

$$k = -\frac{27}{36}$$

$$k = -\frac{3}{4}$$

Vastaus $k = -\dfrac{3}{4}$

**231**

$|x^2 - x| = 2x$

Koska $|x^2 - x| \geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $2x \geq 0$ eli $x \geq 0$. Tällöin

$$|x^2 - x| = \underbrace{2x}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \text{Jos } b \geq 0, \text{ niin} \\ |a| = b \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b. \end{array} \right.$$

$x^2 - x = 2x$ tai $x^2 - x = -2x$

$x^2 - 3x = 0$ tai $x^2 + x = 0$

$x(x-3) = 0$ tai $x(x+1) = 0$

$x = 0$ tai $x = 3$ tai $x = 0$ tai $x = -1$ $\quad | \; x \geq 0$

$x = 0$ tai $x = 3$

Vastaus $x = 0$ tai $x = 3$

**231**

**Tapa 2**

$|x^2 - x| = 2x$

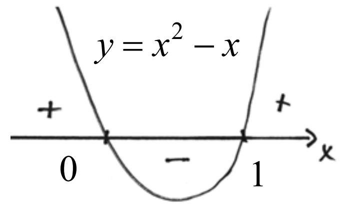
Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.
Selvitetään ensin lausekkeen $x^2 - x$ merkit.
Nollakohdat:

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0$ tai $x = 1$

Kuvaaja:




1) Jos $x^2 - x \geq 0$ eli $x \leq 0$ tai $x \geq 1$, niin saadaan yhtälö

$$|\underbrace{x^2 - x}_{\geq 0}| = 2x \qquad \left| \begin{array}{l} x \leq 0 \text{ tai } x \geq 1 \\ \text{Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a| = a. \end{array} \right.$$

$x^2 - x = 2x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0$ tai $x = 3$ $\quad | \; x \leq 0$ tai $x \geq 1$

kelpaavat

2) Jos $x^2 - x < 0$ eli $0 < x < 1$, niin saadaan

$$\underbrace{|x^2 - x|}_{<0} = 2x \qquad \left|\; \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ \text{Jos } a < 0, \text{ niin } |a| = -a. \end{array}\right.$$

$-(x^2 - x) = 2x$

$-x^2 + x = 2x$

$x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$

$x = 0$ tai $x = -1$ $\quad | \; 0 < x < 1$

eivät kelpaa

Vastaus $\quad x = 0$ tai $x = 3$

**232**

$x - |1 - x^2| = x^2$

$-|1 - x^2| = -x + x^2 \qquad |\cdot(-1)$

$|1 - x^2| = x - x^2$

Koska $|1 - x^2| \geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $x - x^2 \geq 0$. Ratkaistaan ensin epäyhtälö $x - x^2 \geq 0$.

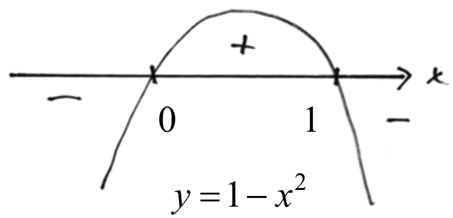
Nollakohdat:

$x - x^2 = 0$

$x(1-x) = 0$

$x = 0$ tai $x = 1$

Kuvaaja:




Siis $\quad 0 \leq x \leq 1$

Tällöin

$$|1-x^2| = \underbrace{x-x^2}_{\geq 0}$$

$0 \leq x \leq 1$
Jos $b \geq 0$, niin
$|a| = b \Leftrightarrow a = b$ tai $a = -b$.

$1-x^2 = x - x^2$ tai $1-x^2 = -x + x^2$

$x = 1$ tai $-2x^2 + x + 1 = 0$ $\quad |0 \leq x \leq 1$

kelpaa tai $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)} = \dfrac{-1 \pm 3}{-4}$

$x = -\dfrac{1}{2}$ tai $x = 1$ $\quad |0 \leq x \leq 1$

ei kelpaa kelpaa

Vastaus $x = 1$

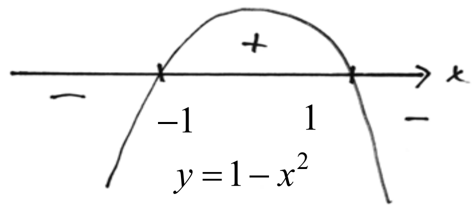
**Tapa 2**

$$x - |1-x^2| = x^2$$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan. Selvitetään ensin lausekkeen $1-x^2$ merkit.

Nollakohdat: Kuvaaja:

$$1 - x^2 = 0$$
$$-x^2 = -1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$




1) Jos $1-x^2 \geq 0$ eli $-1 \leq x \leq 1$, niin saadaan yhtälö

$$x - |\underbrace{1-x^2}_{\geq 0}| = x^2$$

$-1 \leq x \leq 1$
Jos $a \geq 0$, niin $|a| = a$.

$$x - (1-x^2) = x^2$$
$$x - 1 + x^2 = x^2$$
$$x = 1 \quad |-1 \leq x \leq 1$$

kelpaa

2) Jos $1-x^2<0$ eli $x<-1$ tai $x>1$, niin saadaan

$$x-|\underbrace{1-x^2}_{<0}|=x^2 \qquad \left|\begin{array}{l} x<-1 \text{ tai } x>1 \\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a. \end{array}\right.$$

$$x-\left(-1+x^2\right)=x^2$$

$$x+1-x^2=x^2$$

$$2x^2-x-1=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}$$

$$x=1 \text{ tai } x=-\frac{1}{2} \qquad |\, x<-1 \text{ tai } x>1$$

eivät kelpaa

Vastaus $\quad x=1$

**233**

$$2x+3+\left|3x-x^2-2\right|=x^2$$

$$\left|-x^2+3x-2\right|=x^2-2x-3$$

Koska $\left|-x^2+3x-2\right|\geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $x^2-2x-3\geq 0$. Ratkaistaan ensin tämä epäyhtälö.

Nollakohdat:

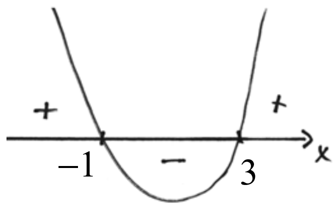
$$x^2-2x-3=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}$$

$$x=3 \text{ tai } x=-1$$

Kuvaaja:

$y=x^2-2x-3$




Siis $\qquad x\leq -1$ tai $x\geq 3$

Kun $x^2-2x-3\geq 0$ eli $x\leq -1$ tai $x\geq 3$, niin saadaan

$$\left|-x^2+3x-2\right| = \underbrace{x^2-2x-3}_{\geq 0}$$

$x \leq -1$ tai $x \geq 3$
Jos $b \geq 0$, niin
$|a| = b \Leftrightarrow a = b$ tai $a = -b$.

$-x^2+3x-2 = x^2-2x-3$ tai $-x^2+3x-2 = -\left(x^2-2x-3\right)$

$-2x^2+5x+1=0$ tai $-x^2+3x-2 = -x^2+2x+3$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)}$ tai $3x-2x = 3+2$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{-4}$ tai $x = 5$

$x = \dfrac{-5+\sqrt{33}}{-4} \approx -0{,}2$ tai $x = \dfrac{-5-\sqrt{33}}{-4} \approx 2{,}7$ tai $x = 5$

ei kelpaa ei kelpaa kelpaa

Vastaus $x = 5$

**Tapa 2**

$$2x+3+\left|3x-x^2-2\right| = x^2$$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.
Selvitetään ensin lausekkeen $3x-x^2-2$ merkit.

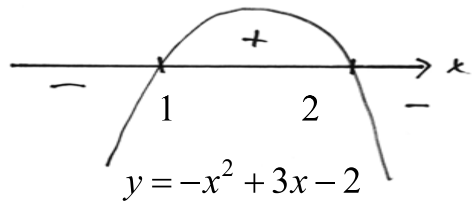
Nollakohdat:

$$-x^2+3x-2=0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot(-1)\cdot(-2)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-3\pm 1}{-2}$$

$x = 1$ tai $x = 2$

Kuvaaja:



1) Jos $3x - x^2 - 2 \geq 0$ eli $1 \leq x \leq 2$, niin saadaan yhtälö

$$2x + 3 + |\underbrace{3x - x^2 - 2}_{\geq 0}| = x^2 \qquad \left| \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ \text{Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a| = a. \end{array} \right.$$

$$2x + 3 + 3x - x^2 - 2 = x^2$$

$$-2x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{-4}$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{33}}{-4} \approx -0{,}2 \text{ tai } x = \frac{-5 - \sqrt{33}}{-4} \approx 2{,}7 \qquad |\, 1 \leq x \leq 2$$

ei kelpaa ei kelpaa

Yhtälöllä ei ole ratkaisua alueessa $1 \leq x \leq 2$

2) Jos $3x - x^2 - 2 < 0$ eli $x < 1$ tai $x > 2$, niin saadaan yhtälö

$$2x + |\underbrace{3x - x^2 - 2}_{<0}| = x^2 \qquad \left| \begin{array}{l} x < 1 \text{ tai } x > 2 \\ \text{Jos } a < 0, \text{ niin } |a| = -a. \end{array} \right.$$

$$2x + 3 + (-3x + x^2 + 2) = x^2$$

$$2x + 3 - 3x + x^2 + 2 = x^2$$

$$-x + 5 = 0$$

$$x = 5 \qquad |\, x < 1 \text{ tai } x > 2$$

kelpaa

Vastaus $x = 5$

**234**

$\left|x^6 - x^2 + 1\right| = \underbrace{x^2 + 1}_{\geq 0}$

Jos $b \geq 0$, niin
$|a| = b \Leftrightarrow a = b$ tai $a = -b$.

$x^6 - x^2 + 1 = x^2 + 1$ tai $x^6 - x^2 + 1 = -\left(x^2 + 1\right)$

$x^6 - 2x^2 = 0$ tai $x^6 - x^2 + 1 = -x^2 - 1$

$x^2\left(x^4 - 2\right) = 0$ tai $\underbrace{x^6}_{\geq 0} = \underbrace{-2}_{<0}$ aina epätosi

$x^2 = 0$ tai $x^4 - 2 = 0$ ei ratkaisua

$x = 0$ tai $x^4 = 2$

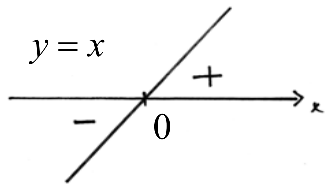
$x = 0$ tai $x = \pm\sqrt[4]{2}$

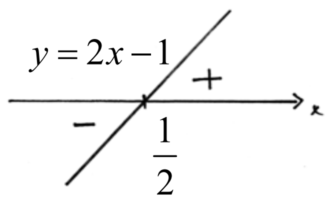
Vastaus $x = 0$ tai $x = \pm\sqrt[4]{2}$

**235**

$|x| + |2x - 1| = 2$

Ratkaistaan yhtälö poistamalla itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkimalla yhtälöä eri alueissa.




Merkkikaavio:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | – | + | + |
| $2x-1$ | – | – | + |
| | $0$ | $\frac{1}{2}$ | |

1) Jos $x < 0$, niin saadaan

$$\underbrace{|x|}_{<0} + \underbrace{|2x-1|}_{<0} = 2 \qquad \left| \begin{array}{l} x < 0 \\ \text{Jos } a < 0, \text{ niin } |a| = -a. \end{array} \right.$$

$$-x + (-2x+1) = 2$$

$$-3x = 1$$

$$x = -\frac{1}{3} \qquad \Big|\ x < 0$$

kelpaa

2) Jos $0 \le x \le \frac{1}{2}$, niin saadaan

$$\underbrace{|x|}_{\ge 0} + \underbrace{|2x-1|}_{<0} = 2 \qquad \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \text{Jos } a \ge 0, \text{ niin } |a| = a. \\ \text{Jos } a < 0, \text{ niin } |a| = -a. \end{array} \right.$$

$$x + (-2x+1) = 2$$

$$-x = 1$$

$$x = -1 \qquad \Big|\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

ei kelpaa

3) Jos $x > \frac{1}{2}$, niin saadaan

$$\underbrace{|x|}_{\ge 0} + \underbrace{|2x-1|}_{\ge 0} = 2 \qquad \left| \begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ \text{Jos } a \ge 0, \text{ niin } |a| = a. \end{array} \right.$$

$$x + (2x-1) = 2$$

$$3x = 3$$

$$x = 1 \qquad \Big|\ x > \frac{1}{2}$$

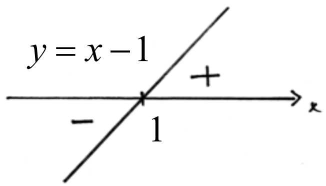
kelpaa

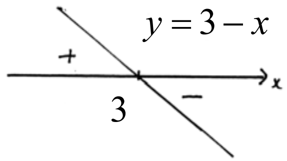
Vastaus $\quad x = -\frac{1}{3}$ tai $x = 1$

**236**

a) $|x-1|-|3-x|+2x=4$

Ratkaistaan yhtälö poistamalla itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkimalla yhtälöä eri alueissa.




Merkkikaavio:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $3-x$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| | 1 | 3 | |

1) Jos $x<1$, niin saadaan

$$\begin{aligned} \underbrace{|x-1|}_{<0}-\underbrace{|3-x|}_{\geq 0}+2x&=4 &&\Bigg|\; \begin{array}{l} x<1 \\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a. \\ \text{Jos } a\geq 0, \text{ niin } |a|=a. \end{array} \\ (-x+1)-(3-x)+2x&=4 \\ -x+1-3+x+2x&=4 \\ 2x-2&=4 \\ 2x&=6 \\ x&=3 &&|\; x<1 \end{aligned}$$

ei kelpaa

2) Jos $1\leq x\leq 3$, niin saadaan

$$\begin{aligned} \underbrace{|x-1|}_{\geq 0}-\underbrace{|3-x|}_{\geq 0}+2x&=4 &&\Bigg|\; \begin{array}{l} 1\leq x\leq 3 \\ \text{Jos } a\geq 0, \text{ niin } |a|=a. \end{array} \\ (x-1)-(3-x)+2x&=4 \\ x-1-3+x+2x&=4 \\ 4x-4&=4 \\ 4x&=8 \\ x&=2 &&|\; 1\leq x\leq 3 \end{aligned}$$

kelpaa

3) Jos $x > 3$, niin saadaan

$$\underbrace{|x-1|}_{\geq 0} - \underbrace{|3-x|}_{<0} + 2x = 4 \qquad \left| \begin{array}{l} x > 3 \\ \text{Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a| = a. \\ \text{Jos } a < 0, \text{ niin } |a| = -a. \end{array} \right.$$

$$(x-1) - (-3+x) + 2x = 4$$

$$x - 1 + 3 - x + 2x = 4$$

$$2x + 2 = 4$$

$$2x = 2$$

$$x = 1 \qquad | \; x > 3$$

ei kelpaa

Vastaus $\quad x = 2$

b)

$$\left| |x-1| - |3-x| + 2x \right| = \underbrace{4}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } b \geq 0, \text{ niin} \\ |a| = b \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b. \end{array} \right.$$

$$|x-1| - |3-x| + 2x = 4 \quad \text{tai} \quad |x-1| - |3-x| + 2x = -4$$

Ensimmäisen yhtälön ratkaisu on $x = 2$ ($a$-kohta).

Ratkaistaan toinen yhtälöistä käyttämällä yhtälön sievennyksessä a-kohdan tuloksia.

$$|x-1| - |3-x| + 2x = -4$$

1) Jos $x < 1$, niin saadaan

$$\underbrace{|x-1|}_{<0} - \underbrace{|3-x|}_{\geq 0} + 2x = -4 \qquad | \text{ a-kohta}$$

$$2x - 2 = -4$$

$$2x = -2$$

$$x = -1 \qquad | \; x < 1$$

kelpaa

2) Jos $1 \leq x \leq 3$, niin saadaan

$$\underbrace{|x-1|}_{\geq 0} - \underbrace{|3-x|}_{\geq 0} + 2x = -4 \qquad | \text{ a-kohta}$$

$$4x - 4 = -4$$

$$4x = 0$$

$$x = 0 \qquad | \; 1 \leq x \leq 3$$

ei kelpaa

3) Jos $x > 3$, niin saadaan

$$\underbrace{|x-1|}_{\geq 0} - \underbrace{|3-x|}_{<0} + 2x = -4 \qquad | \text{ a-kohta}$$

$$2x + 2 = -4$$
$$2x = -6$$
$$x = -3 \qquad | \; x > 3$$

ei kelpaa

Vastaus $x = -1$ tai $x = 2$

**237**

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ |x| + |y| = 4 \end{cases}$$

1) Kun $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \text{aina epätosi, koska } 1 \neq 4$$

Yhtälöparilla ei siis ole ratkaisua alueessa $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.

2) Kun $x \geq 0$ ja $y < 0$, saadaan yhtälöpari

$$+\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 2x = 5 \qquad}$$

$$x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \quad \text{kelpaa, koska } x \geq 0.$$

$$y = 1 - x = 1 - 2\frac{1}{2} = -1\frac{1}{2} \quad \text{kelpaa, koska } y < 0.$$

$$\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{2} \end{cases}$$

3) Kun $x<0$ ja $y\geq 0$, saadaan yhtälöpari

$$+\begin{cases} x+y=1 \\ -x+y=4 \end{cases}$$
$$2y=5$$

$$y=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2} \quad \text{kelpaa, koska } y\geq 0.$$

$$x=1-y=1-2\frac{1}{2}=-1\frac{1}{2} \quad \text{kelpaa, koska } x<0.$$

$$\begin{cases} x=-1\frac{1}{2} \\ y=2\frac{1}{2} \end{cases}$$

4) Kun $x<0$ ja $y<0$, saadaan yhtälöpari

$$+\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=4 \end{cases}$$
$$0=5 \quad \text{aina epätosi}$$

Yhtälöparilla ei siis ole ratkaisua alueessa $x<0$ ja $y<0$.

Vastaus $\begin{cases} x=-1\frac{1}{2} \\ y=2\frac{1}{2} \end{cases}$ tai $\begin{cases} x=2\frac{1}{2} \\ y=-1\frac{1}{2} \end{cases}$

**Tapa 2**

$$\begin{cases} x+y=1 \\ |x|+|y|=4 \end{cases}$$

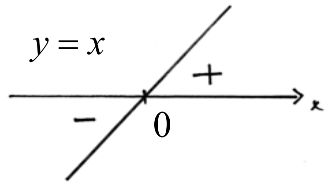
$$\begin{cases} y=1-x \\ |x|+|y|=4 \end{cases} \quad \text{sijoitetaan alempaan yhtälöön}$$

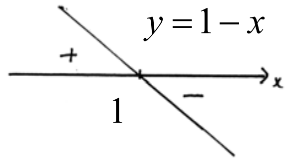
$$|x|+|1-x|=4$$

Itseisarvolausekkeiden nollakohdat: $x=0$ ja $x=1$

Merkkikaavio:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | – | + | + |
| $1-x$ | + | + | – |
| | 0 | 1 | |



1) Kun $x < 0$:

$$-x + (1 - x) = 4$$
$$-2x = 3$$
$$x = -1\frac{1}{2} \quad \text{kelpaa, koska } x < 0.$$
$$y = 1 - x = 1 - \left(-1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$$

Siis $\begin{cases} x = -1\frac{1}{2} \\ y = 2\frac{1}{2} \end{cases}$

2) Kun $0 \le x \le 1$:

$$x + (1 - x) = 4$$
$$1 = 4 \quad \text{aina epätosi}$$

Yhtälöparilla ei siis ole ratkaisua alueessa $0 \le x \le 1$.

3) Kun $x > 1$:

$$x + (-1 + x) = 4$$
$$2x = 5$$
$$x = 2\frac{1}{2} \quad \text{kelpaa, koska } x \ge 1.$$
$$y = 1 - x = 1 - 2\frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$$

Siis $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{2} \end{cases}$

Vastaus $\begin{cases} x = -1\frac{1}{2} \\ y = 2\frac{1}{2} \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{2} \end{cases}$

Huomautus: Yhtälöparin yhtälöt ovat symmetriset muuttujien $x$ ja $y$ suhteen eli

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ |x| + |y| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + x = 1 \\ |y| + |x| = 4 \end{cases}$$

Siksi jos ratkaisuna on $x = a$ ja $y = b$, niin ratkaisuna on myös $x = b$ ja $y = a$.

**238**

$$\underbrace{|x-2y|}_{\geq 0}+\underbrace{|2x+y-5|}_{\geq 0}=0$$

Kahden ei-negatiivisen luvun summa on nolla, jos ja vain jos luvut ovat nollia. Siis saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} |x-2y|=0 \\ |2x+y-5|=0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Vain luvun nolla} \\ \text{itseisarvo on nolla.} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} x=2y \\ 2x+y-5=0 \end{cases} \quad \left| \text{ Sijoitetaan yhtälöön}(2). \right.$$

$$2\cdot 2y+y-5=0$$
$$5y=5$$
$$y=1 \quad \left| \text{ Sijoitetaan yhtälöön}(1). \right.$$
$$x=2y=2\cdot 1=2$$

Vastaus $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

**239**

**Todistus:**

Yhtälö $\underbrace{|x^3+5x^2+8x+4|}_{\geq 0}+\underbrace{|x+1|}_{\geq 0}=0$

toteutuu täsmälleen silloin, kun

$$|x^3+5x^2+8x+4|=0 \text{ ja } |x+1|=0$$

koska kahden ei-negatiivisen luvun summa on nolla, jos ja vain jos luvut ovat nollia.

Koska $|x+1|=0$ täsmälleen silloin, kun $x+1=0$ eli $x=-1$, niin yhtälön *ainoa mahdollinen* ratkaisu on $x=-1$.

Osoitetaan, että $x=-1$ toteuttaa myös yhtälön $|x^3+5x^2+8x+4|=0$:

Kun $x=-1$, niin

$$\begin{aligned} |x^3+5x^2+8x+4| &= |(-1)^3+5\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)+4| \\ &= |-1+5-8+4| \\ &= |0| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Siis $x=-1$ on alkuperäisen yhtälön ainoa ratkaisu. $\square$

**240**

$$|x^3 - x + 1| = -x^3 - x + 1$$

Koska $|x^3 - x + 1| \geq 0$ aina, niin pitää välttämättä olla myös $-x^3 - x + 1 \geq 0$. Kun ehto $-x^3 - x + 1 \geq 0$ on voimassa, saadaan

$$|x^3 - x + 1| = \underbrace{-x^3 - x + 1}_{\geq 0} \quad \left| \begin{array}{l} -x^3 - x + 1 \geq 0 \\ \text{Jos } b \geq 0, \text{ niin} \\ |a| = b \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} x^3 - x + 1 = -x^3 - x + 1 & \text{tai} & x^3 - x + 1 = -(-x^3 - x + 1) \\ 2x^3 = 0 & \text{tai} & x^3 - x + 1 = x^3 + x - 1 \\ x^3 = 0 & \text{tai} & -2x = -2 \\ x = 0 & \text{tai} & x = 1 \end{array}$$

On vielä tutkittava, onko ehto $-x^3 - x + 1 \geq 0$ voimassa.

$x = 0$: $\quad -0^3 - 0 + 1 = 1 \geq 0 \quad$ Siis $x = 0$ kelpaa.

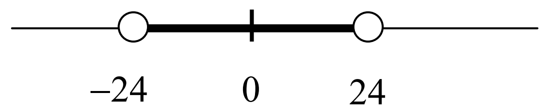
$x = 1$: $\quad -1^3 - 1 + 1 = -1 < 0 \quad$ Siis $x = 1$ ei kelpaa.

Vastaus $\quad x = 0$

**241**

a) $|6x| < 24$

**Tapa 1**




Luvun $6x$ etäisyys origosta on pienempi kuin 24, joten $6x$ on välillä $]-24, 24[$. Siis

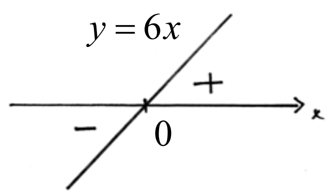
$$\begin{array}{ll} |6x| < 24 & \big|\ |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b \\ -24 < 6x < 24 & \big|\ : 6\ (> 0) \\ -4 < x < 4 & \end{array}$$

**Tapa 2**

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää ja tutkitaan epäyhtälöä eri alueissa.

1) Jos $6x \geq 0$ eli $x \geq 0$, niin saadaan epäyhtälö

$$\begin{array}{ll} |6x| < 24 & \left| \begin{array}{l} x \geq 0, \text{ jos } a \geq 0, \\ \text{niin } |a| = a \end{array} \right. \\ 6x < 24 & \big|\ : 6\ (> 0) \\ x < 4 & \big|\ x \geq 0 \\ 0 \leq x < 4 & \end{array}$$

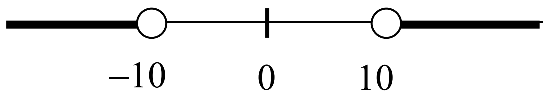


2) Jos $6x<0$ eli $x<0$, niin saadaan epäyhtälö

$$
\begin{aligned}
|6x| &< 24 && \big| \ x<0,\ \text{jos } a<0,\ \text{niin } |a|=-a \\
-6x &< 24 && \big| :(-6)\ (<0) \\
x &> -4 && \big| x<0 \\
-4 < x &< 0
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä 1) ja 2) saadaan ratkaisu $-4<x<4$.

b) **Tapa 1**
$|x-1|>10$



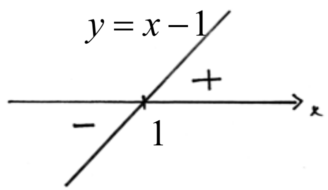

Luvun $x-1$ etäisyys origosta on suurempi kuin 10. Siis

$$
\begin{aligned}
&|x-1|>10 && \big| \ |a|>b \Leftrightarrow a>b \text{ tai } a<-b \\
&x-1>10 \text{ tai } x-1<-10 \\
&x>11 \text{ tai } \quad x<-9
\end{aligned}
$$

**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.
1) Jos $x-1\geq 0$ eli $x\geq 1$, saadaan

$$
\begin{aligned}
|x-1| &> 10 && \big| \ x\geq 1 \\
x-1 &> 10 \\
x &> 11 && \big| x\geq 1 \\
x &> 11
\end{aligned}
$$




2) Jos $|x-1|<0$ eli $x<1$, saadaan

$$
\begin{aligned}
|x-1| &> 10 && \big| x<1 \\
-(x-1) &> 10 \\
-x+1 &> 10 \\
-x &> 9 && \big| :(-1)(<0) \\
x &< -9 && \big| \ x<1
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) vastaukset saadaan

$x<-9$ tai $x>11$

**Tapa 3** $\underbrace{|x-1|}_{\geq 0} > \underbrace{10}_{\geq 0}$

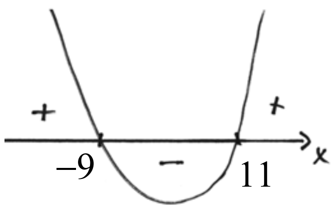
Voidaan käyttää neliöönkorotuslausetta, koska epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia.

$$
\begin{aligned}
|x-1|^2 &> 10^2 && \big| \ |a|^2=a^2 \\
(x-1)^2 &> 10^2 \\
x^2-2x+1 &> 100 \\
x^2-2x-99 &> 0
\end{aligned}
$$

Nollakohdat:

$$x^2-2x-99=0$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-99)}}{2\cdot1}$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{400}}{2}=\frac{2\pm20}{2}$$
$$x=11 \text{ tai } x=-9$$

Kuvaaja: ylöspäin aukeava paraabeli




Siis $x<-9$ tai $x>11$

Vastaus a) $-4<x<4$
b) $x<-9$ tai $x>11$

**242**

a) $\underbrace{|x|}_{\geq 0}<\underbrace{-3}_{<0}$

Ei ratkaisua, sillä mikään ei-negatiivinen luku ei ole pienempi kuin negatiivinen luku.

b) $\underbrace{-|4x-9|}_{\leq 0}<\underbrace{7}_{>0}$

$x\in\mathbb{R}$, sillä nolla tai negatiivinen luku on aina pienempi kuin positiivinen luku.

Vastaus a) ei ratkaisua
b) $x\in\mathbb{R}$

**243**

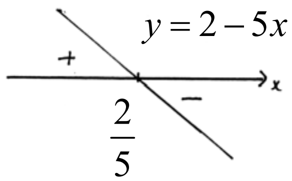
a) **Tapa 1**

$$|2-5x|\leq 8 \qquad \| a|\leq b \Leftrightarrow -b\leq a\leq b$$
$$-8\leq 2-5x\leq 8 \quad | -2$$
$$-10\leq -5x\leq 6 \quad | :(-5)<0$$
$$2\geq x\geq -\frac{6}{5}$$

**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.

1) Jos $2-5x \geq 0$ eli $x \leq \frac{2}{5}$, niin




$|2-5x| \leq 8$ | Jos $a \geq 0$, niin $|a| = a$

$2-5x \leq 8$

$-5x \leq 6$ | $:(-5) < 0$

$x \geq -\frac{6}{5}$ | $x \leq \frac{2}{5}$

$-1\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{2}{5}$

2) Jos $2-5x < 0$ eli $x > \frac{2}{5}$, niin

$|2-5x| \leq 8$ | Jos $a < 0$, niin $|a| = -a$

$-(2-5x) \leq 8$

$-2+5x \leq 8$

$5x \leq 10$

$x \leq 2$ | $x > \frac{2}{5}$

$\frac{2}{5} < x \leq 2$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan $-1\frac{1}{5} \leq x \leq 2$.

b) **Tapa 1**

$|3x-6| \geq 2$ | $|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ tai $a \geq b$

$3x-6 \leq -2$ tai $3x-6 \geq 2$

$3x \leq 4$ tai $3x \geq 8$

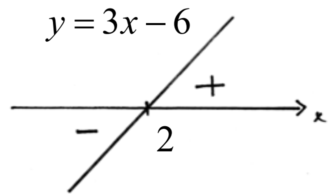
$x \leq \frac{4}{3}$ tai $x \geq \frac{8}{3}$

$x \leq 1\frac{1}{3}$ tai $x \geq 2\frac{2}{3}$

**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.

1) Jos $3x-6 \geq 0$ eli $x \geq 2$, niin




$|3x-6| \geq 2$ | Jos $a \geq 0$, niin $|a| = a$

$3x-6 \geq 2$

$3x \geq 8$

$x \geq \frac{8}{3}$ | $x \geq 2$

$x \geq 2\frac{2}{3}$

2) Jos $3x-6<0$ eli $x<2$, niin

$$
\begin{aligned}
|3x-6| &\geq 2 && \mid \text{ jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a \\
-(3x-6) &\geq 2 \\
-3x+6 &\geq 2 \\
-3x &\geq -4 && \mid :(-3)<0 \\
x &\leq \frac{4}{3} && \mid x<2 \\
x &\leq 1\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan
$x \leq 1\frac{1}{3}$ tai $x \geq 2\frac{2}{3}$.

Vastaus a) $-1\frac{1}{5} \leq x \leq 2$

b) $x \leq 1\frac{1}{3}$ tai $x \geq 2\frac{2}{3}$

**244**

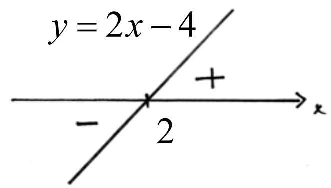
a) **Tapa 1**

$$
\begin{aligned}
|2x-4| &< 6 && \mid |a|<b \Leftrightarrow -b<a<b \\
-6<2x-4 &< 6 && \mid +4 \\
-2<2x &< 10 && \mid :2>0 \\
-1<x &< 5
\end{aligned}
$$

**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.
1) Jos $2x-4 \geq 0$ eli $x \geq 2$, niin

$$
\begin{aligned}
|2x-4| &< 6 && \mid \text{Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a|=a \\
2x-4 &< 6 \\
2x &< 10 \\
x &< 5 && \mid x \geq 2 \\
2 \leq x &< 5
\end{aligned}
$$




2) Jos $2x-4<0$ eli $x<2$, niin

$$
\begin{aligned}
|2x-4| &< 6 && \mid \text{Jos a} \geq 0, \text{ niin } |a|=-a \\
-(2x-4) &< 6 \\
-2x+4 &< 6 \\
-2x &< 2 && \mid :(-2)<0 \\
x &> -1 && \mid x<2 \\
-1<x &< 2
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan $-1 < x < 5$.

b)

$$\underbrace{\left|-\frac{2}{7}x-7\right|}_{\geq 0} \geq \underbrace{-2}_{<0} \qquad \text{aina tosi}$$

Vastaus a) $-1 < x < 5$
b) $x \in \mathbb{R}$

**245**

a) **Tapa 1**

$$|3x+5| \geq 7 \qquad \big|\ |a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \text{ tai } a \leq -b$$

$$3x+5 \geq 7 \quad \text{tai} \quad 3x+5 \leq -7$$

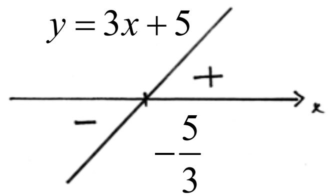
$$3x \geq 2 \quad \text{tai} \quad 3x \leq -12$$

$$x \geq \frac{2}{3} \quad \text{tai} \quad x \leq -4$$

**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.

1) Jos $3x+5 \geq 0$ eli $x \geq -\frac{5}{3}$, niin




$$|3x+5| \geq 7 \qquad \big|\ \text{Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a| = a$$

$$3x+5 \geq 7$$

$$3x \geq 2$$

$$x \geq \frac{2}{3} \qquad \big|\ x \geq -\frac{5}{3}$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

2) Jos $3x+5 < 0$ eli $x < -\frac{5}{3}$, niin

$$|3x+5| \geq 7 \qquad \Big|\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a$$
$$-(3x+5) \geq 7$$
$$-3x-5 \geq 7$$
$$-3x \geq 12 \qquad \Big|\ :(-3)<0$$
$$x \leq -4 \qquad \Big|\ x < -\frac{5}{3}$$
$$x \leq -4$$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan $x \leq -4$ tai $x \geq \frac{2}{3}$.

b)
$$\underbrace{|18-x|}_{\geq 0} \leq \underbrace{-4}_{<0} \qquad \text{aina epätosi}$$

Vastaus a) $x \leq -4$ tai $x \geq \frac{2}{3}$

b) ei ratkaisua

**246**

a) **Tapa 1**

$$|4-5x| \leq 7x \qquad \Big|\ |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$$
$$-7x \leq 4-5x \leq 7x$$
$$-7x \leq 4-5x \quad \text{ja} \quad 4-5x \leq 7x$$
$$-7x+5x \leq 4 \quad \text{ja} \quad -5x-7x \leq -4$$
$$-2x \leq 4 \ \Big|\ :(-2)<0 \quad \text{ja} \quad -12x \leq -4 \ \Big|\ :(-12)<0$$
$$x \geq -2 \quad \text{ja} \quad x \geq \frac{4}{12}$$
$$x \geq \frac{1}{3}$$

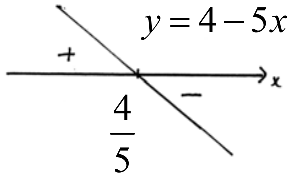
Molemmat ehdot toteutuvat, kun $x \geq \frac{1}{3}$.

**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.

1) Jos $4-5x \geq 0$ eli $x \leq \frac{4}{5}$, niin

$|4-5x| \le 7x$ | Jos $a \ge 0$, niin $|a| = a$




$4-5x \le 7x$

$-12x \le -4$ | $:(-12) < 0$

$x \ge \frac{1}{3}$ | $x \le \frac{4}{5}$

$\frac{1}{3} \le x \le \frac{4}{5}$

2) Jos $4-5x < 0$ eli $x > \frac{4}{5}$, niin

$|4-5x| \le 7x$ | Jos $a < 0$, niin $|a| = -a$

$-(4-5x) \le 7x$

$-4+5x \le 7x$

$-2x \le 4$ | $:(-2) < 0$

$x \ge -2$ | $x > \frac{4}{5}$

$x > \frac{4}{5}$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan $x \ge \frac{1}{3}$.

b) **Tapa 1**

$|3x-5| > 2x$ | $|a| > b \Leftrightarrow a > b$ tai $a < -b$

$3x-5 > 2x$ tai $3x-5 < -2x$

$x > 5$ tai $5x < 5$

$x < 1$

**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.

1) Jos $3x-5 \ge 0$ eli $x \ge \frac{5}{3}$, niin

$|3x-5| > 2x$ | Jos $a \ge 0$, niin $|a| = a$

$3x-5 > 2x$

$x > 5$ | $x \ge \frac{5}{3}$

$x > 5$

2) Jos $3x-5 < 0$ eli $x < \frac{5}{3}$, niin

$$|3x-5|>2x \qquad \Big|\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a$$
$$-(3x-5)>2x$$
$$-3x+5>2x$$
$$-5x>-5 \qquad \Big|\ :(-5)<0$$
$$x<1 \qquad \Big|\ x<\frac{5}{3}$$
$$x<1$$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan $x<1$ tai $x>5$.

Vastaus a) $x \geq \frac{1}{3}$

b) $x<1$ tai $x>5$

**247**

a) **Tapa 1**

$$|x+4| \geq -x \qquad \Big|\ |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \text{ tai } a \geq b$$
$$x+4 \leq x \quad \text{tai} \quad x+4 \geq -x$$
$$0 \leq -4 \quad \text{tai} \quad x+x \geq -4$$
$$\text{epätosi} \quad \text{tai} \quad 2x \geq -4 \qquad \Big|\ :2>0$$
$$\text{ei ratkaisua} \quad \text{tai} \quad x \geq -2$$

**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.

1) Jos $x+4 \geq 0$ eli $x \geq -4$, niin

$$|x+4| \geq -x \qquad \Big|\ \text{Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a|=a$$
$$x+4 \geq -x$$
$$2x \geq -4$$
$$x \geq -2 \qquad \Big|\ x \geq -4$$
$$x \geq -2$$

2) Jos $x+4<0$ eli $x<-4$, niin

$$|x+4| \geq -x \qquad \Big| \text{ Jos } a<0, \text{ niin } |a| = -a$$

$$-(x+4) \geq -x$$

$$-x-4 \geq -x$$

$$0 \geq 4 \text{ epätosi}$$

ei ratkaisua

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan $x \geq -2$.

b) **Tapa 1**

$$|-4x-6| < -2x \qquad \Big| \; |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

$$2x < -4x-6 < -2x$$

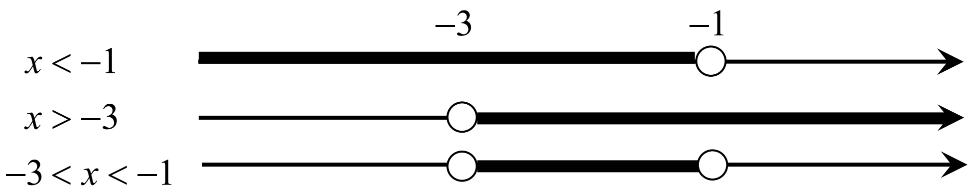
$$2x < -4x-6 \quad \text{ja} \quad -4x-6 < -2x$$

$$6x < -6 \quad \Big| :6>0 \quad \text{ja} \quad -4x+2x < 6$$

$$x < -1 \quad \text{ja} \quad -2x < 6 \quad \Big| :(-2)<0$$

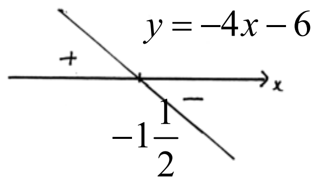
$$x > -3$$

Yhdistetään osaratkaisut:




**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.




1) Jos $-4x-6 \geq 0$ eli $x \leq -\frac{3}{2}$, niin

$$|-4x-6| < -2x \qquad \Big| \text{ Jos } a \geq 0, \text{ niin } |a| = -a$$

$$-4x-6 < -2x$$

$$x < -3 \qquad \Big| :(-2)<0$$

$$-3 < x \leq -\frac{3}{2} \qquad \Big| \; x \leq -\frac{3}{2}$$

2) Jos $-4x-6 < 0$ eli $x > -\frac{3}{2}$, niin

$$|-4x-6| < -2x \qquad \Big| \text{ Jos } a<0, \text{ niin } |a| = -a$$

$$-(-4x-6) < -2x$$

$$4x+6 < -2x$$

$$6x < -6$$

$$x < -1 \qquad \Big| \; x > -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} < x < -1$$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan $-3 < x < -1$.

Vastaus a) $x \geq -2$
b) $-3 < x < -1$

**248**

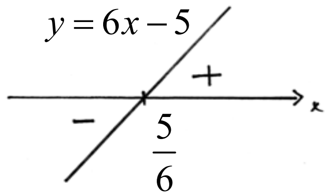
**Tapa 1**

$$|6x-5|+2x-3>0$$

Itseisarvolausekkeen nollakohta:

$$6x-5=0$$

$$x=\frac{5}{6}$$




1) Kun $x<\frac{5}{6}$, saadaan epäyhtälö

$$-6x+5+2x-3>0$$

$$-4x>-2$$

$$x<\frac{1}{2}$$

Siis $x<\frac{1}{2}$ ($x<\frac{5}{6}$, joten ratkaisu kelpaa)

2) Kun $x\geq\frac{5}{6}$, saadaan epäyhtälö

$$6x-5+2x-3>0$$

$$8x>8$$

$$x>1$$

Siis $x>1$ ($x\geq\frac{5}{6}$, joten ratkaisu kelpaa)

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan $x<\frac{1}{2}$ tai $x>1$.

**Tapa 2**

$$|6x-5|+2x-3>0$$

$$|6x-5|>-2x+3 \qquad \Big|\ |a|>b \Leftrightarrow a<-b \text{ tai } a>b$$

$$6x-5<-(-2x+3) \text{ tai } 6x-5>-2x+3$$

$$6x-5<2x+3 \text{ tai } 6x+2x>3+5$$

$$6x-2x<-3+5 \text{ tai } 8x>8$$

$$4x<2 \text{ tai } x>1$$

$$x<\frac{1}{2}$$

Vastaus $x<\frac{1}{2}$ tai $x>1$

**249**

$$|x^2-2x-3|<5 \qquad \big|\ |a|<b \Leftrightarrow -b<a<b$$

$$-5<x^2-2x-3<5$$

$$-5<x^2-2x-3 \quad \text{ja} \quad x^2-2x-3<5$$

$$x^2-2x-3+5>0 \quad \text{ja} \quad x^2-2x-3-5<0$$

$$x^2-2x+2>0 \quad \text{ja} \quad x^2-2x-8<0$$

Nollakohdat:

$$x^2-2x+2=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}\notin\mathbb{R}$$

$$x^2-2x-8=0$$

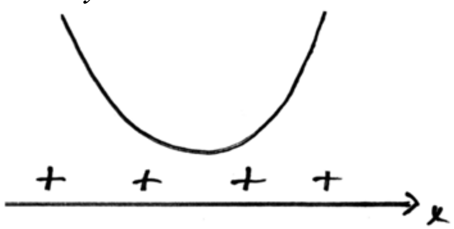
$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm6}{2}$$

$$x=4 \ \text{ tai } \ x=-2$$

Kuvaaja:

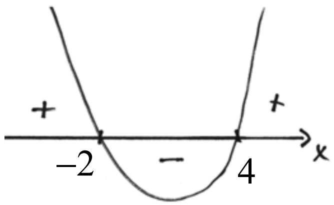
$y=x^2-2x-3$




$x\in\mathbb{R}$

**ja**

$y=x^2-2x-8$




$-2<x<4$

Vastaus $\quad -2<x<4$

**250**

$$|x^2+7x|<4-x^2 \qquad \big|\ |a|<b \Leftrightarrow -b<a<b$$

$$-(4-x^2)<x^2+7x<4-x^2$$

$$-4+x^2<x^2+7x \quad \text{ja} \quad x^2+7x<4-x^2$$

$$-4<7x \quad \text{ja} \quad 2x^2+7x-4<0$$

$$x>-\frac{4}{7}$$

Nollakohdat:

$$2x^2+7x-4=0$$

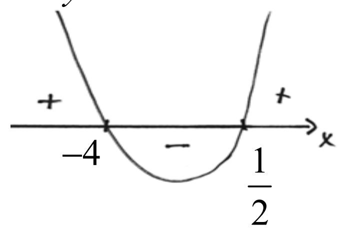
$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot2\cdot(-4)}}{2\cdot2}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{-7\pm9}{4}$$

$$x=-4 \ \text{ tai } \ x=\frac{1}{2}$$

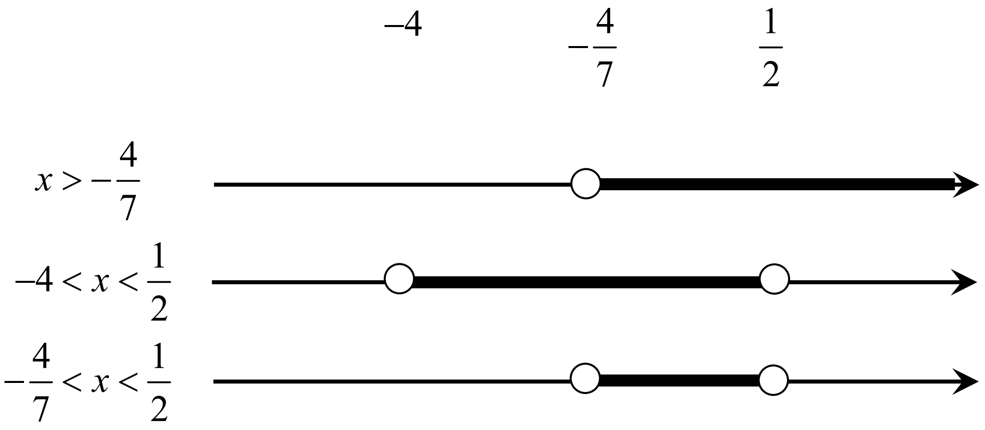
Kuvaaja:

$y=2x^2+7x-4$




$$-4<x<\frac{1}{2}$$

Yhdistetään ratkaisut $x > -\frac{4}{7}$ **ja** $-4 < x < \frac{1}{2}$




Vastaus $-\frac{4}{7} < x < \frac{1}{2}$

**251**

$$|3 + 2x - x^2| \geq 3 - 3x \qquad \big|\ |a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \text{ tai } a \leq -b$$

$$3 + 2x - x^2 \geq 3 - 3x \text{ tai } 3 + 2x - x^2 \leq -(3 - 3x)$$

$$-x^2 + 2x + 3x + 3 - 3 \geq 0 \qquad \text{tai } -x^2 + 2x + 3 \leq -3 + 3x$$

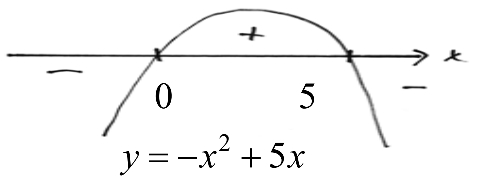
$$-x^2 + 5x \geq 0 \qquad \text{tai } -x^2 - x + 6 \leq 0$$

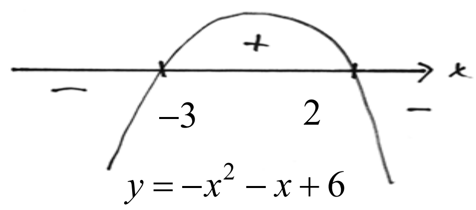
Nollakohdat:

$$-x^2 + 5x = 0$$
$$x(-x + 5) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 5$$

$$-x^2 - x + 6 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2}$$
$$x = -3 \text{ tai } x = 2$$

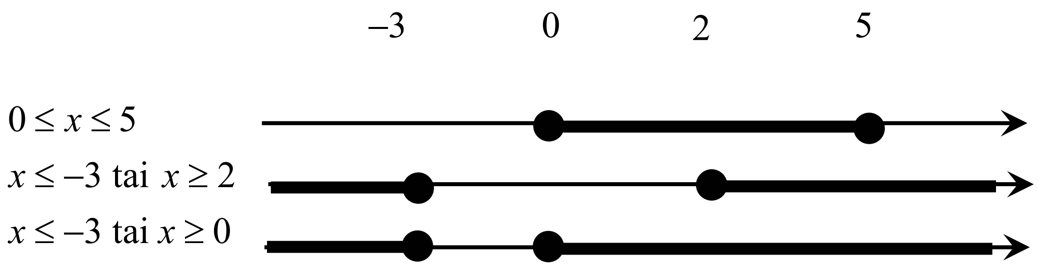
Kuvaajat:




$0 \leq x \leq 5$ **tai** $x \leq -3$ tai $x \geq 2$

Yhdistetään ratkaisut:




Vastaus $\quad x \le -3$ tai $x \ge 0$

**252**

a) **Tapa 1**

$$|2-2x| < -6x \qquad \Big|\ |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

$$-(-6x) < 2-2x < -6x$$

$$6x < 2-2x \quad \text{ja} \quad 2-2x < -6x$$

$$8x < 2 \quad \text{ja} \quad 4x < -2$$

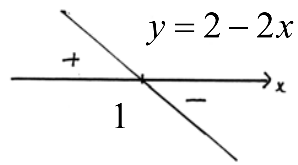
$$x < \frac{1}{4} \quad \text{ja} \quad x < -\frac{1}{2}$$

Siis $x < -\dfrac{1}{2}$

**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.
1) Jos $2-2x \ge 0$ eli $x \le 1$, niin

$$|2-2x| < -6x \qquad \Big|\ \text{Jos } a \ge 0, \text{ niin } |a| = a$$




$$2-2x < -6x$$

$$4x < -2$$

$$x < -\frac{1}{2} \qquad \Big|\ x \le 1$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

2) Jos $2-2x<0$ eli $x>1$, niin

$$2-2x<-6x \qquad \Big|\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a$$
$$-(2-2x)<-6x$$
$$-2+2x<-6x$$
$$8x<2$$
$$x<\frac{1}{4} \qquad \Big|\ x>1$$

ei ratkaisua

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan $x<-\frac{1}{2}$.

b) **Tapa 1**

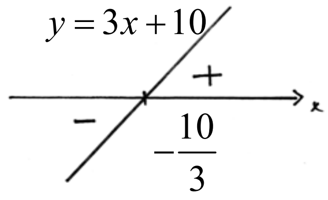
$$|3x+10|\ge 5 \qquad \Big|\ x\in\mathbb{R}_-,\quad |a|\ge b \Leftrightarrow a\le -b \text{ tai } a\ge b$$
$$3x+10\le -5 \quad \text{tai} \quad 3x+10\ge 5$$
$$3x\le -15 \quad \text{tai} \quad 3x\ge -5$$
$$x\le -5 \quad \text{tai} \quad x\ge -1\frac{2}{3} \qquad \Big|\ x\in\mathbb{R}_-$$

Siis $x\le -5$ tai $-1\frac{2}{3}\le x<0$

**Tapa 2**

Käytetään itseisarvon määritelmää.

1) Jos $3x+10\ge 0$ eli $x\ge -\frac{10}{3}$, niin




$$|3x+10|\ge 5 \qquad \Big|\ \text{Jos } a\ge 0, \text{ niin } |a|=a$$
$$3x+10\ge 5$$
$$3x\ge -5$$
$$x\ge -\frac{5}{3} \qquad \Big|\ x\in\mathbb{R}_-$$
$$-\frac{5}{3}\le x<0$$

2) Jos $3x+10<0$ eli $x<-\frac{10}{3}$, niin

$$|3x+10|\ge 5 \qquad \Big|\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a$$
$$-(3x+10)\ge 5$$
$$-3x-10\le 5$$
$$-3x\ge 15 \qquad \Big|\ :(-3)<0$$
$$x\le -5 \qquad \Big|\ x\in\mathbb{R}_-$$
$$x\le -5$$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan

$x \le -5$ tai $-1\frac{2}{3} \le x < 0$.

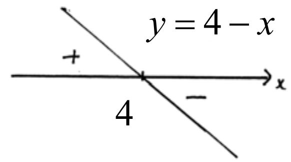
Vastaus a) $x < -\frac{1}{2}$ b) $x \le -5$ tai $-1\frac{2}{3} \le x < 0$

**253**

a) $|4 - x| < x, \quad x \in \mathbb{Z}_+$ eli $x = 1$ tai 2 tai 3 tai ...

Itseisarvolausekkeen nollakohta:

$$4 - x = 0$$
$$x = 4$$




1) Kun $1 \le x \le 4$, saadaan epäyhtälö

$$4 - x < x$$
$$-2x < -4$$
$$x > 2$$

Siis $x = 3$ tai $x = 4$

2) Kun $x > 4$, saadaan epäyhtälö

$$-4 + x < x$$
$$-4 < 0 \quad \text{aina tosi}$$
$$x \in \mathbb{R}$$

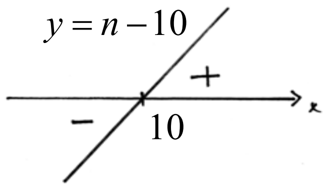
Siis $x = 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ ...$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan
$x = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ ...$

b) $2n - |n-10| > 11, \ n \in \mathbb{N}$

1) Kun $0 \le n \le 10$, saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned} 2n - (-n+10) &> 11 \\ 2n + n - 10 &> 11 \\ 3n &> 21 \\ n &> 7 \end{aligned}$$




Siis $n = 8$ tai $n = 9$

2) Kun $n \ge 10$, saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned} 2n - (n-10) &> 11 \\ 2n - n + 10 &> 11 \\ n &> 1 \end{aligned}$$

Siis $n \ge 10$

Yhdistämällä kohtien 1) ja 2) ratkaisut saadaan $n = 8, 9, 10, \ldots$

Vastaus a) $x \in \mathbb{Z}_+, \ x \ge 3$
b) $n \in \mathbb{N}, \ n \ge 8$

**254**

$$|2x+3| > |4-x|$$

$a \ge 0, b \ge 0$
$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

$$\begin{aligned} |2x+3|^2 &> |4-x|^2 \\ 4x^2 + 12x + 9 &> 16 - 8x + x^2 \\ 3x^2 + 20x - 7 &> 0 \end{aligned}$$

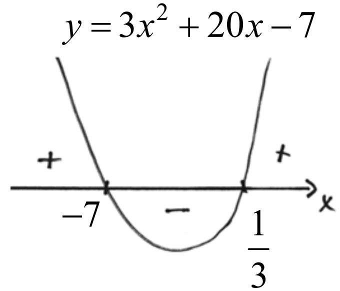
Nollakohdat:

$$3x^2 + 20x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{484}}{6} = \frac{-20 \pm 22}{6}$$

$$x = -\frac{42}{6} = -7 \text{ tai } x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$




Vastaus $x < -7$ tai $x > \frac{1}{3}$

**255**

$$|3x-1|-2|2-x|\le 0$$

$$|3x-1|\le 2|2-x|$$

$$|3x-1|\le |2(2-x)|$$

$$\underbrace{|3x-1|}_{\ge 0}\le \underbrace{|4-2x|}_{\ge 0}$$

| Jos $a\ge 0$ ja $b\ge 0$,
| niin $a\le b \Leftrightarrow a^2\le b^2$

$$(3x-1)^2\le (4-2x)^2$$

$$9x^2-6x+1\le 16-16x+4x^2$$

$$5x^2+10x-15\le 0$$

Nollakohdat:

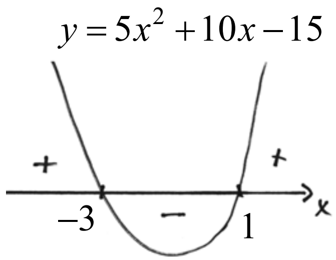
$$5x^2+10x-15=0 \quad |:5$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{-2\pm 4}{2}$$

$x=-3$ tai $x=1$




Siis $-3\le x\le 1$

Vastaus $-3\le x\le 1$

**256**

$\sqrt{x+2}$ on määritelty, kun $x+2\ge 0$ eli $x\ge -2$.

Tällöin

$$\underbrace{\sqrt{x+2}}_{\ge 0}<\underbrace{|x|}_{\ge 0}$$

| Jos $a\ge 0$ ja $b\ge 0$,
| niin $a\le b \Leftrightarrow a^2\le b^2$

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2<x^2$$

$$x+2<x^2$$

$$-x^2+x+2<0$$

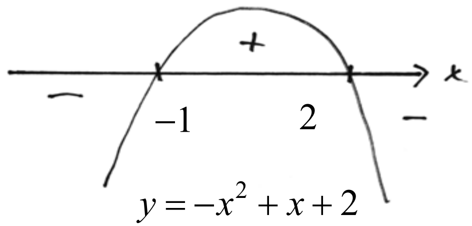
Nollakohdat

$$-x^2+x+2=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)}$$

$$x=\frac{-1\pm 3}{-2}$$

$x=-1$ tai $x=2$




Siis $x<-1$ tai $x>2$

Huomioimalla määrittelyehto $x\ge -2$ saadaan
$-2\le x<-1$ tai $x>2$

Vastaus $-2\le x<-1$ tai $x>2$

**257**

$\sqrt{x-1}$ on määritelty, kun $x-1\geq 0$ eli kun $x\geq 1$.

Tällöin

$$|x+1|-3\sqrt{x-1}>0$$

$$\underbrace{|x+1|}_{\geq 0}>\underbrace{3\sqrt{x-1}}_{\geq 0}$$

| Jos $a\geq 0$ ja $b\geq 0$,
| niin $a>b\Leftrightarrow a^2>b^2$

$$(x+1)^2>3^2\left(\sqrt{x-1}\right)^2$$

$$x^2+2x+1>9(x-1)$$

$$x^2+2x+1-9x+9>0$$

$$x^2-7x+10>10$$

Nollakohdat:

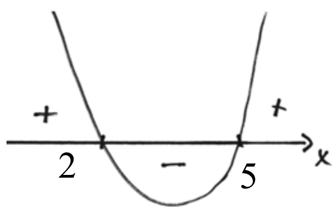
$$x^2-7x+10=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{7\pm 3}{2}$$

$x=2$ tai $x=5$

$y=x^2-7x+10$




Huomioimalla määrittelyehto $x\geq 1$ saadaan $1\leq x<2$ tai $x>5$

Vastaus $1\leq x<2$ tai $x>5$

**258**

$$x|x|<2x-1$$

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

1) Kun $x\geq 0$, saadaan

$$x|x|<2x-1$$

$$x\cdot x<2x-1$$

$$x^2-2x+1<0$$

$$\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}<0$$

ei ratkaisua

2) Kun $x<0$, saadaan

$$x|x|<2x-1$$

$$x\cdot(-x)<2x-1$$

$$-x^2-2x+1<0$$

Nollakohdat:

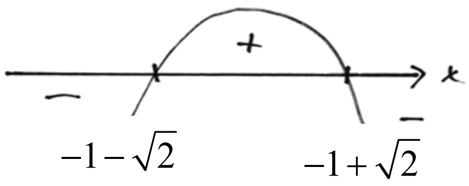
$$-x^2-2x+1=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{-2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{-2}$$

$$x=-1\mp\sqrt{2}$$

Kuvaaja:




$y=-x^2-2x+1$

Ottamalla huomioon tarkastelualue $x<0$ saadaan vastaukseksi $x<-1-\sqrt{2}$.

Vastaus $x<-1-\sqrt{2}$

**259**

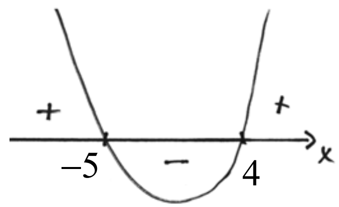
Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.
1) Jos $x+1\geq 0$ eli $x\geq -1$, saadaan

$$(x-3)|x+1|>17-3x \quad \Big|\ \text{Jos } a\geq 0, \text{ niin } |a|=a$$
$$(x-3)(x+1)>17-3x$$
$$x^2+x-3x-3>17-3x$$
$$x^2+x-20>0$$

Nollakohdat:

$$x^2+x-20=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-20)}}{2\cdot1}$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{-1\pm9}{2}$$
$$x=4 \text{ tai } x=-5$$

Kuvaaja: $y=x^2+x-20$




Ottamalla huomioon tarkastelualue $x\geq -1$ saadaan kohdan 1) vastaukseksi $x>4$.

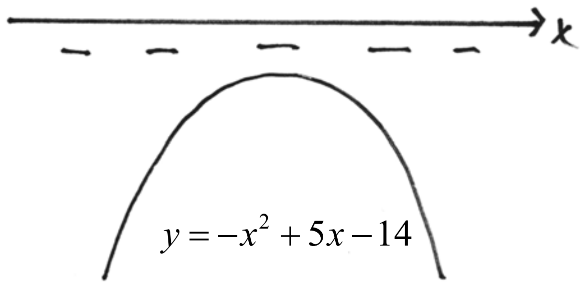
2) Jos $x+1<0$ eli $x<-1$, saadaan

$$(x-3)|x+1|>17-3x \qquad \Big|\ \text{Jos } a<0, \text{ niin } |a|=-a$$
$$(x-3)(-x-1)>17-3x$$
$$-x^2-x+3x+3>17-3x$$
$$-x^2+5x-14>0$$

Nollakohdat:

$$-x^2+5x-14=0$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-1)\cdot(-14)}}{2\cdot(-1)}$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{-31}}{-2}\notin\mathbb{R}$$

Kuvaaja:




Ei ratkaisua

Vastaus $x>4$

**260**

Jaetaan tarkastelu osiin itseisarvon määritelmän mukaan.

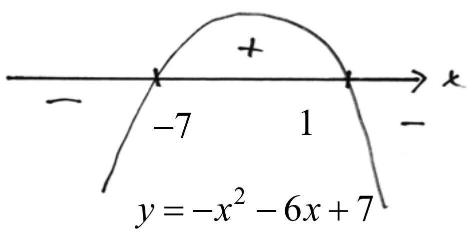
1) Jos $2-x\geq 0$ eli $x\leq 2$, saadaan

$$|2-x|(x+3)+1>5x \qquad \Big|\ \text{Jos } a\geq 0, \text{ niin } |a|=a$$
$$(2-x)(x+3)+1>5x$$
$$2x+6-x^2-3x+1>5x$$
$$-x^2-6x+7>0$$

Nollakohdat:

$$-x^2-6x+7=0$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot(-1)\cdot 7}}{2\cdot(-1)}$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{64}}{-2}=\frac{6\pm 8}{-2}$$
$$x=-7 \text{ tai } x=1$$

Kuvaaja:




$$-7<x<1$$

Tämä sisältyy tarkastelualueeseen $x\leq 2$.

2) Jos $2-x<0$ eli $x>2$, saadaan

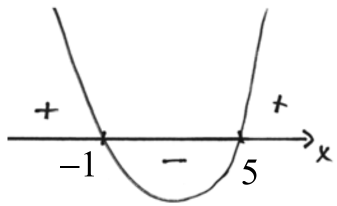
$$|2-x|(x+3)+1>5x \qquad \Big|\ \text{Jos } a<0,\ \text{niin } |a|=-a$$
$$(-2+x)(x+3)+1>5x$$
$$-2x-6+x^2+3x+1>5x$$
$$x^2-4x-5>0$$

Nollakohdat:

$$x^2-4x-5=0$$
$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}$$
$$x=5 \text{ tai } x=-1$$

Kuvaaja:

$y=x^2-4x-5$




$x<-1$ tai $x>5$

Ottamalla huomioon tarkastelualue $x>2$, saadaan kohdan 2) ratkaisuksi $x>5$.

Yhdistetään kohtien 1) ja 2) ratkaisut.
Saadaan $-7<x<1$ tai $x>5$

Vastaus $\quad -7<x<1$ tai $x>5$

**261**

Ensimmäinen luku on $4\cdot x-5$.
Toinen luku on 2.

Lukujen välimatka lukusuoralla on lukujen erotuksen itseisarvo eli

$$|(4x-5)-2|=|4x-7|$$

Saadaan epäyhtälö

$$|4x-7|\le 3 \qquad \Big|\ |a|\le b \Leftrightarrow -b\le a\le b$$
$$-3\le 4x-7\le 3 \qquad \Big|\ +7$$
$$4\le 4x\le 10 \qquad \Big|\ :4>0$$
$$1\le x\le \frac{10}{4}$$
$$1\le x\le 2\frac{1}{2}$$

Vastaus $\quad |(4x-5)-2|=|4x-7|$ ja $1\le x\le 2\frac{1}{2}$

**262**

$$|x|+|x+1|\le 2$$

Itseisarvolausekkeiden nollakohdat: $x=0$ ja $x=-1$
Merkkikaavio:

| | $x<-1$ | $-1<x<0$ | $x>0$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $+$ | $+$ |

$-1$     $0$

1) Kun $x<-1$:

$$-x+(-x-1)\le 2$$
$$-2x\le 3 \qquad \Big|:(-2)<0$$
$$x\ge -1\frac{1}{2}$$

Siis $-1\frac{1}{2}\le x<-1$

2) Kun $-1\le x\le 0$:

$$-x+x+1\le 2$$
$$1\le 2 \quad \text{aina tosi}$$

Siis $-1\le x\le 0$

3) Kun $x>0$:

$$x+x+1\le 2$$
$$2x\le 1 \qquad \Big|:2>0$$
$$x\le \frac{1}{2}$$

Siis $0<x\le \frac{1}{2}$

Yhdistämällä kohtien 1), 2) ja 3) ratkaisut saadaan $-1\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$

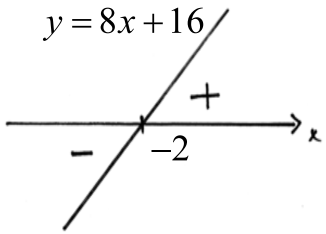
Vastaus $\quad -1\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$

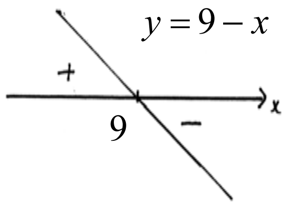
**263**

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää. Itseisarvolausekkeiden nollakohdat jakavat tarkastelun eri alueisiin.

Nollakohdat ja kuvaajat:

$$8x+16=0 \qquad\qquad 9-x=0$$
$$8x=-6 \qquad\qquad x=9$$
$$x=-2$$




Merkkikaavio:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $8x+16$ | − | + | + |
| $9-x$ | + | + | − |
| | $-2$ | $9$ | |

1) Jos $x<-2$, saadaan

$$11-|8x+16|\geq|9-x|$$
$$11-(-8x-16)\geq 9-x$$
$$11+8x+16\geq 9-x$$
$$9x\geq -18$$
$$x\geq -2 \qquad \Big|\ x<-2$$

ei ratkaisua

2) Jos $-2\leq x\leq 9$, saadaan

$$11-|8x+16|\geq|9-x|$$
$$11-(8x+16)\geq 9-x$$
$$11-8x-16\geq 9-x$$
$$-7x\geq 14 \qquad \Big|:(-7)<0$$
$$x\leq -2 \qquad \Big|\ -2\leq x\leq 9$$
$$x=-2$$

3) Jos $x>9$, saadaan

$$11-|8x+16|\geq|9-x|$$
$$11-(8x+16)\geq -9+x$$
$$11-8x-16\geq -9+x$$
$$-9x\geq -4 \qquad \Big|:(-9)<0$$
$$x\leq \frac{4}{9} \qquad \Big|\ x>9$$

ei ratkaisua

yhdistetään kohtien 1), 2) ja 3) ratkaisut. Saadaan $x=-2$.

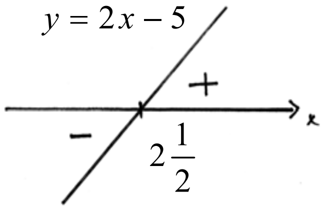
Vastaus $\quad x=-2$

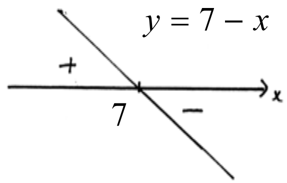
**264**

Poistetaan itseisarvomerkit käyttämällä itseisarvon määritelmää. Itseisarvolausekkeiden nollakohdat jakavat tarkastelun eri alueisiin.

Nollakohdat ja kuvaajat

$$2x-5=0 \qquad\qquad 7-x=0$$
$$2x=5 \qquad\qquad x=7$$
$$x=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$




Merkkikaavio:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2x-5$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $7-x$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| | $2\frac{1}{2}$ | $7$ | |

1) Jos $x<2\frac{1}{2}$, saadaan

$$|2x-5|<|7-x|+6$$
$$-2x+5<7-x+6$$
$$-x<8 \qquad \Big|\cdot(-1)<0$$
$$x>-8 \qquad \Big|\, x<2\frac{1}{2}$$
$$-8<x<2\frac{1}{2}$$

2) Jos $2\frac{1}{2}\le x\le 7$, saadaan

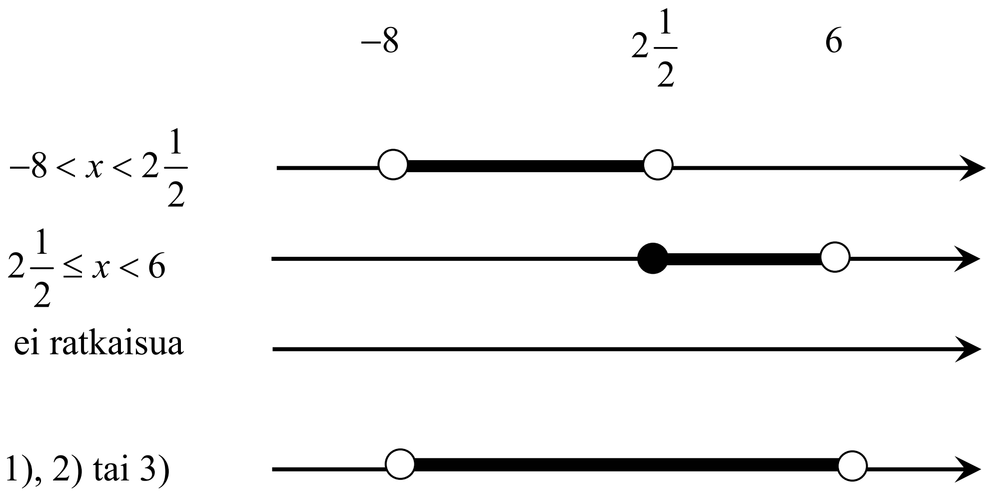
$$|2x-5|<|7-x|+6$$
$$2x-5<7-x+6$$
$$3x<18 \qquad \Big|:3>0$$
$$x<6 \qquad \Big|\, 2\frac{1}{2}\le x\le 7$$
$$2\frac{1}{2}\le x<6$$

3) Jos $x>7$, saadaan

$$|2x-5|<|7-x|+6$$
$$2x-5<-7+x+6$$
$$x<4 \qquad \Big|\, x>7$$

ei ratkaisua

Yhdistetään kohtien 1), 2) ja 3) ratkaisut.




Vastaus $\quad -8 < x < 6$

**265**

$$\underbrace{|x-a|}_{\ge 0} < x$$

Jotta epäyhtälöllä olisi ratkaisu on oikean puolen oltava positiivinen eli $x > 0$. Tällöin

$$\underbrace{|x-a|}_{\ge 0} < \underbrace{x}_{\ge 0} \qquad \Big| \text{ Jos } a \ge 0 \text{ ja } b \ge 0, \text{ niin } a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

$$(x-a)^2 < x^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 < x^2$$

$$-2ax < -a^2 \qquad \big|\cdot(-1) < 0$$

$$2ax > a^2$$

1) Jos $a = 0$, ei epäyhtälöllä ole ratkaisuja

2) Jos $a > 0$, niin

$$2ax > a^2 \qquad \big| : 2a > 0$$

$$x > \frac{a^2}{2a}$$

$$x < \frac{a}{2}(> 0),$$ kelpaa, sillä alkuehto $x > 0$ toteutuu

3) Jos $a < 0$, niin

$$2ax > a^2 \qquad \big| : 2a < 0$$

$$x < \frac{a^2}{2a}$$

$$x < \frac{a}{2}(< 0),$$ ei kelpaa, sillä alkuehto $x > 0$ ei toteudu

Vastaus $\quad x > \frac{a}{2}$, kun $a > 0$

ei ratkaisua, kun $a \le 0$