

**301****Tapa 1**

Ratkaistaan yhtälöryhmä käyttämällä sijoituskeinoa.

$$\begin{cases} (1) & x - y + z = 2 \\ (2) & x - 2y + 3z = 0 \\ (3) & 3x - 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöstä (1) muuttuja  $z$  muuttujien  $x$  ja  $y$  suhteen.

Saadaan yhtälö

$$(4) \quad z = -x + y + 2$$

Sijoitetaan yhtälö (4) yhtälöihin (2) ja (3), jolloin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x - 2y + 3(-x + y + 2) = 0 \\ 3x - 4y + 2(-x + y + 2) = -2 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} -2x + y + 6 = 0 \\ (6) \quad x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöstä (5) muuttuja  $y$  muuttujan  $x$  suhteen.

Saadaan yhtälö

$$(7) \quad y = 2x - 6$$

Sijoitetaan yhtälö (7) yhtälöön (6), jolloin saadaan

$$x - 2(2x - 6) + 6 = 0$$

$$x - 4x + 12 + 6 = 0$$

$$-3x = -18$$

$$x = 6$$

Muuttujan  $y$  arvo saadaan sijoittamalla  $x = 6$  yhtälöön (7).

$$y = 2x - 6 = 2 \cdot 6 - 6 = 6$$

Muuttujan  $z$  arvo saadaan sijoittamalla  $x = 6$  ja  $y = 6$  yhtälöön (4).

$$z = -x + y + 2 = -6 + 6 + 2 = 2$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on 
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$$
**Tapa 2**

Ratkaistaan yhtälöryhmä käyttämällä yhteenlaskukeinoa.

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ (2) \quad x - 2y + 3z = 0 \\ (3) \quad 3x - 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

Eliminoidaan yhtälöistä (1) ja (2) muuttuja  $x$ .

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} | \cdot 1 \\ | \cdot (-1) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 0 \end{array} \right. \\ \hline (4) \quad y - 2z = 2 \end{array}$$

Eliminoidaan vastaavasti yhtälöistä (2) ja (3) myös muuttuja  $x$ .

$$\begin{array}{l} (2) \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = -2 \end{array} \right. \begin{array}{l} | \cdot (-3) \\ | \cdot 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{l} -3x + 6y - 9z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = -2 \end{array} \right. \\ \hline (5) \quad 2y - 7z = -2 \end{array}$$

Ratkaistaan yhtälöistä (4) ja (5) muodostettu yhtälöpari.

$$\begin{array}{l} (4) \left\{ \begin{array}{l} y - 2z = 2 \\ 2y - 7z = -2 \end{array} \right. \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ | \cdot 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{l} -2y + 4z = -4 \\ 2y - 7z = -2 \end{array} \right. \\ \hline -3z = -6 \\ z = 2 \end{array}$$

Sijoitetaan  $z = 2$  yhtälöön (4), jolloin saadaan

$$\begin{array}{l} y - 2 \cdot 2 = 2 \\ y = 6 \end{array}$$

Muuttuja  $x$  arvo saadaan sijoittamalla  $y = 6$  ja  $z = 2$  yhtälöön (1).

$$\begin{array}{l} x - 6 + 2 = 2 \\ x = 6 \end{array}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on  $\begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$ .

302

**Tapa 1**

Ratkaistaan yhtälöryhmä käyttämällä sijoituskeinoa.

$$\begin{cases} (1) & 6x + 3y + 2z + 5 = 0 \\ (2) & x - y + z + 3 = 0 \\ (3) & x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöstä (2) muuttuja  $z$  muuttujien  $x$  ja  $y$  suhteen. Saadaan yhtälö

$$(4) \quad z = -x + y - 3$$

Sijoitetaan yhtälö (4) yhtälöihin (1) ja (3), jolloin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2(-x + y - 3) + 5 = 0 \\ x - 2y + 3(-x + y - 3) - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5) & 4x + 5y - 1 = 0 \\ (6) & -2x + y - 17 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöstä (6) muuttuja  $y$  muuttujan  $x$  suhteen. Saadaan yhtälö

$$(7) \quad y = 2x + 17$$

Sijoitetaan yhtälö (7) yhtälöön (5), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 4x + 5(2x + 17) - 1 &= 0 \\ 4x + 10x + 85 - 1 &= 0 \\ 14x &= -84 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Muuttujan  $y$  arvo saadaan sijoittamalla  $x = -6$  yhtälöön (7).

$$y = 2x + 17 = 2 \cdot (-6) + 17 = 5$$

Muuttujan  $z$  arvo saadaan sijoittamalla  $x = -6$  ja  $y = 5$  yhtälöön (4).

$$z = -x + y - 3 = -(-6) + 5 - 3 = 8$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on  $\begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \\ z = 8 \end{cases}$ .

**Tapa 2**

Ratkaistaan yhtälöryhmä käyttämällä yhteenlaskukeinoa.

$$\begin{cases} (1) & 6x + 3y + 2z + 5 = 0 \\ (2) & x - y + z + 3 = 0 \\ (3) & x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

Eliminoidaan yhtälöistä (1) ja (2) muuttuja  $z$ .

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z + 5 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} | \cdot 1 \\ | \cdot (-2) \end{array}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 4x + 5y - 1 = 0 \\ -4x + 2y - 34 = 0 \end{array} \right. \\ \hline 7y - 35 = 0 \\ y = 5$$

Sijoitetaan  $y = 5$  yhtälöön (4), jolloin saadaan

$$\begin{array}{l} 4x + 5 \cdot 5 - 1 = 0 \\ 4x = -24 \\ x = -6 \end{array}$$

Eliminoidaan vastaavasti yhtälöistä (2) ja (3) myös muuttuja  $x$ .

$$\begin{array}{l} (2) \\ (3) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - y + z + 3 = 0 \\ x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} | \cdot (-3) \\ | \cdot 1 \end{array}$$

Muuttuja  $z$  arvo saadaan sijoittamalla  $x = -6$  ja  $y = 5$  yhtälöön (2).

$$\begin{array}{l} -6 - 5 + z + 3 = 0 \\ z = 8 \end{array}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on  $\begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \\ z = 8 \end{cases}$ .

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -3x + 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + 3z - 8 = 0 \end{array} \right. \\ \hline (5) \quad -2x + y - 17 = 0$$

Ratkaistaan yhtälöistä (4) ja (5) muodostettu yhtälöpari.

$$\begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4x + 5y - 1 = 0 \\ -2x + y - 17 = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} | \cdot 1 \\ | \cdot 2 \end{array}$$

## 303

Merkitään lannoitteiden  $A$ ,  $B$  ja  $C$  määriä vastaavasti kirjaimilla  $a$ ,  $b$  ja  $c$  (yksikkönä kg).

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 82 \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} a = 3b \\ (3) \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1}{10}b \end{array} \right. \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (1).} \\ | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (1).} \end{array} \right.$$

$$3b + b + \frac{1}{10}b = 82 \quad | \cdot 10$$

$$30b + 10b + b = 820$$

$$41b = 820$$

$$b = \frac{820}{41} = 20 \text{ (kg)}$$

Muuttujien  $a$  ja  $c$  arvot saadaan yhtälöistä (2) ja (3).

$$a = 3b = 3 \cdot 20 = 60 \text{ (kg)}$$

$$c = \frac{1}{10}b = \frac{1}{10} \cdot 20 = 2 \text{ (kg)}$$

Vastaus Ravinnetta  $A$  on kylvettävä 60 kg, ravinnetta  $B$  20 kg ja ravinnetta  $C$  2 kg.

## 304

Merkitään kolmion sivuja kirjaimilla  $x$ ,  $y$  ja  $z$ .

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} x + y = 12 \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} x + z = 14 \\ (3) \left\{ \begin{array}{l} y + z = 18 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan yhtälöt

$$(4) \quad y = 12 - x \text{ ja}$$

$$(5) \quad z = 14 - x$$

Sijoitetaan saadut yhtälöt yhtälöön (3), jolloin saadaan

$$12 - x + 14 - x = 18$$

$$-2x = -8$$

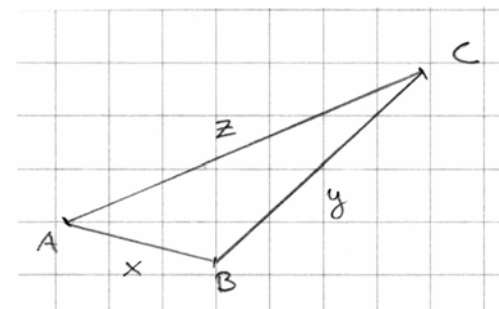
$$x = 4$$

Sijoitetaan  $x = 4$  yhtälöihin (4) ja (5), jolloin saadaan muuttujien  $y$  ja  $z$  arvot.

$$y = 12 - x = 12 - 4 = 8$$

$$z = 14 - x = 14 - 4 = 10$$

Vastaus Kolmion sivut ovat 4, 8, ja 10.



305

$$\begin{cases} x : y : z = 1 : 2 : 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$$

Merkintä  $x : y : z = 1 : 2 : 5$  tarkoittaa sitä, että

$$x : y = 1 : 2 \quad \text{ja} \quad y : z = 2 : 5.$$

Siis yhtälöryhmä saa muodon

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{z} = \frac{2}{5} \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} y = 2x \end{cases} & | \text{ Sijoitetaan yhtälöihin (2) ja (3).} \\ (2) & \begin{cases} 5y = 2z \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} 3x + 2y + z = 24 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot 2x = 2z \\ 3x + 2 \cdot 2x + z = 24 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (4) & \begin{cases} z = 5x \end{cases} & | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (5).} \\ (5) & \begin{cases} 7x + z = 24 \end{cases} \end{aligned}$$

$$7x + 5x = 24$$

$$12x = 24$$

$$x = 2$$

Muuttujien  $y$  ja  $z$  arvot saadaan yhtälöistä (4) ja (1).

$$z = 5x = 5 \cdot 2 = 10$$

$$y = 2x = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{Yhtälöryhmän ratkaisu on } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 10 \end{cases} .$$

## 306

Merkintä  $x : y : z = 1 : 3 : 4$  tarkoittaa sitä, että

$x : y = 1 : 3$  ja  $y : z = 3 : 4$ . Siis yhtälöryhmä saa muodon

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{y}{z} = \frac{3}{4} \\ 2x + y - 3z = -14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} y = 3x \\ 4y = 3z \\ 2x + y - 3z = -14 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \text{Sijoitetaan yhtälöihin (2) ja (3).} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot 3x = 3z \\ 2x + 3x - 3z = -14 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (4) \left\{ \begin{array}{l} z = 4x \\ 5x - 3z = -14 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \text{Sijoitetaan yhtälöön (5).} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{aligned} 5x - 3 \cdot 4x &= -14 \\ -7x &= -14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Muuttujien  $y$  ja  $z$  arvot saadaan yhtälöistä (4) ja (1).

$$z = 4x = 4 \cdot 2 = 8$$

$$y = 3x = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\text{Yhtälöryhmän ratkaisu on } \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = 8 \end{cases}$$

307

$$\begin{cases} (1) & 2x - 5y - 7 = 0 \\ (2) & 3x + y - 2 = 0 \\ (3) & 9x - 6y - 12 = 3 \end{cases}$$

Yhtälöitä on kolme ja muuttujia vain kaksi, joten muodostetaan uusi yhtälöryhmä valitsemalla siihen esimerkiksi yhtälöt (1) ja (2).

Ratkaistaan näin saatu yhtälöpari ja tutkitaan, toteuttaako saatu ratkaisu myös yhtälön (3).

$$\begin{cases} (1) & 2x - 5y - 7 = 0 & | \cdot 1 \\ (2) & 3x + y - 2 = 0 & | \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y - 7 = 0 \\ 15x + 5y - 10 = 0 \end{array} \right. \\ \hline 17x \quad -17 = 0 \end{array}$$

$x = 1$  | Sijoitetaan yhtälöön (2).

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 + y - 2 &= 0 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Tarkistetaan toteuttaako saatu ratkaisu  $x = 1$  ja  $y = -1$  myös yhtälön (3).

Kun  $x = 1$  ja  $y = -1$ , yhtälön (3)  $9x - 6y - 12 = 3$

vasen puoli on  $9 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) - 12 = 3$  ja  
oikea puoli on  $3$

Saatu ratkaisu toteuttaa yhtälön (3), joten

yhtälöryhmän ratkaisu on  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ .

Vastaus  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$



**308**

$$\begin{cases} (1) & 6x + 8y = 40 \\ (2) & 4x + 7y = 30 \\ (3) & 7x - 9y = 10 \end{cases}$$

Yhtälöitä on kolme ja muuttujia vain kaksi, joten muodostetaan uusi yhtälöryhmä valitsemalla siihen esimerkiksi yhtälöt (1) ja (2).

Ratkaistaan näin saatu yhtälöpari ja tutkitaan, toteuttaako saatu ratkaisu myös yhtälön (3).

Saatu ratkaisu toteuttaa yhtälön (3), joten yhtälöryhmän ratkaisu on  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ .

Vastaus  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ .

$$\begin{array}{l} (1) \begin{cases} 6x + 8y = 40 \\ 4x + 7y = 30 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \cdot (-8) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 12x + 16y = 80 \\ -12x - 21y = -90 \end{cases} \\ \hline 5y = -10 \\ y = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} + \begin{cases} 42x + 56y = 280 \\ -32x - 56y = -240 \end{cases} \\ \hline 10x = 40 \\ x = 4 \end{array}$$

Tarkistetaan toteuttaako saatu ratkaisu  $x = 4$  ja  $y = 2$  myös yhtälön (3).

Kun  $x = 4$  ja  $y = 2$ , yhtälön (3)  $7x - 9y = 10$

vasen puoli on  $7 \cdot 4 - 9 \cdot 2 = 28 - 18 = 10$  ja  
oikea puoli on  $10$

309

$$\begin{cases} (1) & 6x + 3y = 0 \\ (2) & -x + y = -3 \\ (3) & x - 7y = -13 \end{cases}$$

Yhtälöitä on kolme ja muuttujia vain kaksi, joten muodostetaan uusi yhtälöryhmä valitsemalla siihen esimerkiksi yhtälöt (1) ja (2).

Ratkaistaan näin saatu yhtälöpari ja tutkitaan, toteuttaako saatu ratkaisu myös yhtälön (3).

$$\begin{cases} (1) & 6x + 3y = 0 & | \cdot 1 \\ (2) & -x + y = -3 & | \cdot 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ -6x + 6y = -18 \end{cases} \\ \hline 9y = -18 \end{array}$$

$$y = -2 \quad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (2).}$$

$$-x - 2 = -3$$

$$x = 1$$

Tarkistetaan toteuttaako saatu ratkaisu  $x = 1$  ja  $y = -2$  myös yhtälön (3).

Kun  $x = 1$  ja  $y = -2$ , niin yhtälön (3)  $x - 7y = -13$

vasen puoli on  $1 - 7 \cdot (-2) = 15$  ja

oikea puoli on  $-13$

Saatu ratkaisu ei toteuta yhtälöä (3), joten alkuperäisellä yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

**310**

$$\begin{cases} (1) & x - 3y = -3 \\ (2) & 2x + y = 8 \\ (3) & -x + 2y = 5 \end{cases}$$

Yhtälöitä on kolme ja muuttujia vain kaksi, joten muodostetaan uusi yhtälöryhmä valitsemalla siihen esimerkiksi yhtälöt (1) ja (2).

Ratkaistaan näin saatu yhtälöpari ja tutkitaan, toteuttaako saatu ratkaisu myös yhtälön (3).

$$\begin{cases} (1) & x - 3y = -3 & | \cdot 1 \\ (2) & 2x + y = 8 & | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} x - 3y = -3 \\ 6x + 3y = 24 \end{cases} \\ \hline 7x \quad = 21 \end{array}$$

$$x = 3$$

| Sijoitetaan yhtälöön (2).

$$2 \cdot 3 + y = 8$$

$$y = 2$$

Tarkistetaan toteuttaako saatu ratkaisu  $x = 3$  ja  $y = 2$  myös yhtälön (3).

Kun  $x = 3$  ja  $y = 2$ , niin yhtälön (3)  $-x + 2y = 5$

vasen puoli on  $-3 + 2 \cdot 2 = 1$  ja  
oikea puoli on 5.

Saatu ratkaisu ei toteuta yhtälöä (3), joten alkuperäisellä yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

## 311

Yhtälöitä on vain kaksi ja muuttujia kolme, joten ratkaistaan kaksi muuttujaa kolmannen muuttujan suhteen.

## Tapa 1

Ratkaistaan esimerkiksi muuttujat  $y$  ja  $z$  muuttujan  $x$  suhteen yhteenlaskukeinolla.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ \hline 5x \quad + z = 0 \\ \quad \quad z = -5x \end{array} \quad \begin{array}{r} + \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \\ \hline 4x + y = 0 \\ \quad \quad y = -4x \end{array}$$

Siis yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -4x \\ z = -5x \end{cases}$$

Jos merkitään muuttujan  $x$  arvoa kirjaimella  $a$ , saadaan yhtälöryhmän ratkaisu parametrimuodossa.

$$\begin{cases} x = a \\ y = -4a \\ z = -5a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

Huomautuksia:

- Jos yhtälöistä olisi ratkaistu muuttujat  $x$  ja  $z$  muuttujan  $y$  suhteen, olisi ratkaisu saatu muodossa

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4}y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = \frac{5}{4}y \end{cases} \quad \left( \begin{cases} x = -\frac{1}{4}a \\ y = a \\ z = \frac{5}{4}a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \right)$$

- Jos yhtälöistä olisi ratkaistu muuttujat  $x$  ja  $y$  muuttujan  $z$  suhteen, olisi ratkaisu saatu muodossa

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ y = \frac{4}{5}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \left( \begin{cases} x = -\frac{1}{5}a \\ y = \frac{4}{5}a \\ z = a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \right)$$

**Tapa 2**

Ratkaistaan esimerkiksi muuttujat  $y$  ja  $z$  muuttujan  $x$  suhteen sijoituskeinolla.

$$\begin{array}{l} (1) \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ (2) \begin{cases} x - y + z = 0 \end{cases} \end{cases} \quad | \text{ Ratkaistaan } y. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ (3) \begin{cases} y = x + z \end{cases} \end{cases} \quad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (1).} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + 3(x + z) - 2z = 0 \\ 5x + z = 0 \\ z = -5x \quad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (3).} \\ y = x + z = x - 5x = -4x \end{array}$$

Siis yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -4x \\ z = -5x \end{cases} \quad \left( \begin{cases} x = a \\ y = -4a \\ z = -5a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \right)$$

$$\text{Vastaus} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -4x \\ z = -5x \end{cases}$$

**312**

Yhtälöitä on vain kaksi ja muuttujia kolme, joten ratkaistaan kaksi muuttujaa kolmannen muuttujan suhteen.

**Tapa 1**

Ratkaistaan esimerkiksi muuttujat  $y$  ja  $z$  muuttujan  $x$  suhteen yhteenlaskukeinolla.

$$\begin{cases} 7x - 5y - 6z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-5) \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot 1 \\ | \cdot (-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \begin{cases} 7x - 5y - 6z = 0 \\ -10x + 5y + 10z = 0 \end{cases} \quad + \begin{cases} 7x - 5y - 6z = 0 \\ -6x + 3y + 6z = 0 \end{cases} \\ \hline -3x \quad + 4z = 0 \quad \quad \quad x - 2y \quad = 0 \\ z = \frac{3}{4}x \quad \quad \quad y = \frac{1}{2}x \end{array}$$

Siis yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{2}x \\ z = \frac{3}{4}x \end{cases}$$

Jos merkitään muuttujaa  $x$  kirjaimella  $a$ , saadaan yhtälöryhmän ratkaisu parametrimuodossa.

$$\begin{cases} x = a \\ y = \frac{1}{2}a \\ z = \frac{3}{4}a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

Huomautuksia:

- Jos yhtälöistä olisi ratkaistu muuttujat  $x$  ja  $z$  muuttujan  $y$  suhteen olisi ratkaisu saatu muodossa

$$\begin{cases} x = 2y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = \frac{3}{2}y \end{cases} \quad \left( \begin{cases} x = 2a \\ y = a \\ z = \frac{3}{2}a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \right)$$

- Jos yhtälöistä olisi ratkaistu muuttujat  $x$  ja  $y$  muuttujan  $z$  suhteen olisi ratkaisu saatu muodossa

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}z \\ y = \frac{2}{3}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \left( \begin{cases} x = \frac{4}{3}a \\ y = \frac{2}{3}a \\ z = a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \right)$$

## Tapa 2

Ratkaistaan esimerkiksi muuttujat  $y$  ja  $z$  muuttujan  $x$  suhteen sijoituskeinolla.

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} 7x - 5y - 6z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} & | \text{Ratkaistaan } y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} 7x - 5y - 6z = 0 \\ y = 2x - 2z \end{cases} & | \text{Sijoitetaan yhtälöön (1).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x - 5(2x - 2z) - 6z &= 0 \\ -3x + 4z &= 0 \\ z &= \frac{3}{4}x & | \text{Sijoitetaan yhtälöön (3).} \end{aligned}$$

$$y = 2x - 2z = 2x - 2 \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x$$

Siis yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{2}x \\ z = \frac{3}{4}x \end{cases} \quad \left( \begin{cases} x = a \\ y = \frac{1}{2}a \\ z = \frac{3}{4}a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \right)$$

**313**

Yhtälöitä on vain kaksi ja muuttujia kolme, joten ratkaistaan kaksi muuttujaa kolmannen muuttujan suhteen.

Ratkaistaan esimerkiksi muuttujat  $x$  ja  $y$  muuttujan  $z$  suhteen yhteenlaskukeinolla.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ -6x + 9y - 3z = 3 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$+ \begin{cases} 6x - 9y + 3z = 15 \\ -6x + 9y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \\ 0 = 18 \quad \text{aina epätosi}$$

Yhtälöryhmällä ei siis ole ratkaisua.

Vastaus Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

**314**

Yhtälöitä on vain kaksi ja muuttujia kolme, joten ratkaistaan kaksi muuttujaa kolmannen muuttujan suhteen.

Ratkaistaan esimerkiksi muuttujat  $x$  ja  $y$  muuttujan  $z$  suhteen yhteenlaskukeinolla.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ -5x + 5y - 10z - 10 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$+ \begin{cases} 5x - 5y + 10z = 15 \\ -5x + 5y - 10z - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \\ -10 = 15 \quad \text{aina epätosi}$$

Yhtälöryhmällä ei siis ole ratkaisua.

Vastaus Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

315

Ratkaistaan yhtälöryhmä käyttämällä sijoituskeinoa.

$$\begin{cases} (1) & x : y = 3 : 2 \\ (2) & 3y = 2z - 4 \\ (3) & 4x - 3z = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöstä (1) muuttuja  $x$  muuttujan  $y$  suhteen.

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{3}{2} \\ 2x &= 3y \\ (4) \quad x &= \frac{3}{2}y \end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälö (4) yhtälöön (3).

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{3}{2}y - 3z &= 0 \\ (5) \quad 6y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöstä (5) muuttuja  $z$  muuttujan  $y$  suhteen.

$$\begin{aligned} -3z &= -6y \\ (6) \quad z &= 2y \quad \left| \text{Sijoitetaan yhtälöön (2)}. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y &= 2 \cdot 2y - 4 \\ -y &= -4 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Muuttujien  $x$  ja  $z$  arvot saadaan sijoittamalla  $y = 4$  yhtälöihin (4) ja (6).

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6 \\ z &= 2y = 2 \cdot 4 = 8 \end{aligned}$$

$$\text{Yhtälöryhmän ratkaisu on } \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \\ z = 8 \end{cases}$$

$$\text{Vastaus } \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \\ z = 8 \end{cases}$$



316

$$\begin{cases} (1) & 2x + z = y - 3 \\ (2) & 2y - z = x + 3 \\ (3) & 3x + 2z = y - 2 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä käyttämällä yhteenlaskukeinoja.

$$\begin{cases} (1) & 2x - y + z = -3 \\ (2) & -x + 2y - z = 3 \\ (3) & 3x - y + 2z = -2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \right. \cdot 2$$

$$\begin{array}{l} + \begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases} \\ \hline (4) \quad x + y = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} + \begin{cases} -2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x - y + 2z = -2 \end{cases} \\ \hline (5) \quad x + 3y = 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} (4) & x + y = 0 \\ (5) & x + 3y = 4 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \cdot 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} + \begin{cases} -x - y = 0 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \\ \hline 2y = 4 \end{array}$$

$$y = 2$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

| Sijoitetaan yhtälöön (4).

Sijoitetaan  $x = -2$  ja  $y = 2$  yhtälöön (1).

$$2 \cdot (-2) - 2 + z = -3$$

$$z = -3 + 6$$

$$z = 3$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ .Vastaus  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

317

$$\text{a) } \begin{cases} x : y : z = -1 : 7 : 4 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

Merkintä  $x : y : z = -1 : 7 : 4$  tarkoittaa sitä, että  $x : y = -1 : 7$  ja  $y : z = 7 : 4$ . Siis yhtälöryhmä saa muodon

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{1}{7} \\ \frac{y}{z} = \frac{7}{4} \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} y = -7x \end{cases} & | \text{ Sijoitetaan yhtälöihin (2) ja (3).} \\ (2) & \begin{cases} 4y = 7z \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} 3x - y + 2z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot (-7x) = 7z \\ 3x - (-7x) + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (4) & \begin{cases} z = -4x \end{cases} & | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (5).} \\ (5) & \begin{cases} 10x + 2z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10x + 2 \cdot (-4x) &= 4 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Muuttujien  $y$  ja  $z$  arvot saadaan yhtälöistä (4) ja (1).

$$\begin{aligned} z &= -4x = -4 \cdot 2 = -8 \\ y &= -7x = -7 \cdot 2 = -14 \end{aligned}$$

$$\text{Yhtälöryhmän ratkaisu on } \begin{cases} x = 2 \\ y = -14 \\ z = -8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (1) & 3x + y = 5 \\ (2) & x - 3y = -5 \\ (3) & 2x + y = 0 \end{cases}$$

Yhtälöitä on kolme ja muuttujia vain kaksi, joten muodostetaan uusi yhtälöryhmä valitsemalla siihen esimerkiksi yhtälöt (1) ja (2).

Ratkaistaan näin saatu yhtälöpari ja tutkitaan, toteuttaako saatu ratkaisu myös yhtälön (3).

$$\begin{cases} (1) & 3x + y = 5 \\ (2) & x - 3y = -5 \end{cases} \quad | \text{ Ratkaistaan } y.$$

$$\begin{cases} (4) & y = 5 - 3x \\ (2) & x - 3y = -5 \end{cases} \quad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (2).}$$

$$x - 3(5 - 3x) = -5$$

$$10x - 15 = -5$$

$$x = 1 \quad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (4).}$$

$$y = 5 - 3x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

Tarkistetaan toteuttaako saatu ratkaisu  $x = 1$  ja  $y = 2$  myös yhtälön (3).

$$\text{Kun } x = 1 \text{ ja } y = 2, \text{ yhtälön (3) } 2x + y = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{vasen puoli on } 2 \cdot 1 + 2 = 4 \text{ ja} \\ \text{oikea puoli on } 0 \end{array}$$

Saatu ratkaisu ei toteuta yhtälöä (3), joten alkuperäisellä yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

$$\text{Vastaus a) } \begin{cases} x = 2 \\ y = -14 \\ z = -8 \end{cases}$$

b) Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

318

$$\text{a) } \begin{cases} (1) & 6x = 3y - 4 \\ (2) & 4x - 9y + 5 = 0 \\ (3) & y - \frac{7}{3} = 8x + 2 \end{cases}$$

Yhtälöitä on kolme ja muuttujia vain kaksi, joten muodostetaan uusi yhtälöryhmä valitsemalla siihen esimerkiksi yhtälöt (1) ja (2).

Ratkaistaan näin saatu yhtälöpari ja tutkitaan, toteuttaako saatu ratkaisu myös yhtälön (3).

$$\begin{array}{l} (1) \begin{cases} 6x - 3y = -4 \\ 4x - 9y = -5 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot 1 \end{array} \right. \\ \hline + \begin{cases} 12x - 6y = -8 \\ -12x + 27y = 15 \end{cases} \quad + \begin{cases} -18x + 9y = 12 \\ 4x - 9y = -5 \end{cases} \\ \hline 21y = 7 \qquad \qquad \qquad -14x = 7 \\ y = \frac{1}{3} \qquad \qquad \qquad x = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Tarkistetaan toteuttaako saatu ratkaisu  $x = -\frac{1}{2}$  ja  $y = \frac{1}{3}$  myös yhtälön (3).

$$\text{Kun } x = -\frac{1}{2} \text{ ja } y = \frac{1}{3}, \text{ yhtälön (3) } y - \frac{7}{3} = 8x + 2$$

$$\text{vasen puoli on } \frac{1}{3} - \frac{7}{3} = -\frac{6}{3} = -2 \text{ ja}$$

$$\text{oikea puoli on } 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = -4 + 2 = -2$$

Saatu ratkaisu toteuttaa yhtälön (3), joten yhtälöryhmän ratkaisu on  $x = -\frac{1}{2}$  ja  $y = \frac{1}{3}$ .

b) Yhtälöitä on vain kaksi ja muuttujia kolme, joten ratkaistaan kaksi muuttujaa kolmannen muuttujan suhteen.

Ratkaistaan esimerkiksi muuttujat  $x$  ja  $y$  muuttujan  $z$  suhteen yhteenlaskukeinolla.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 5x - y + 3z = 0 \\ 10x - 2y + 6z = -5 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 1 \end{array} \right. \\ \hline + \begin{cases} -10x + 2y - 6z = 0 \\ 10x - 2y + 6z = -5 \end{cases} \\ \hline 0 = -5 \text{ aina epätosi} \end{array}$$

Yhtälöryhmällä ei siis ole ratkaisua.

$$\text{Vastaus a) } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \text{b) Ei ratkaisua.}$$

**319**

a) Ratkaistaan yhtälöryhmä käyttämällä sijoituskeinoa.

$$\begin{cases} (1) & x + 3y + 4z = 0 \\ (2) & x - 2y + 3z = -3 \\ (3) & 2x - 5y - z = 7 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöstä (1) muuttuja  $x$  muuttujien  $y$  ja  $z$  suhteen. Saadaan yhtälö

$$(4) \quad x = -3y - 4z$$

Sijoitetaan yhtälö (4) yhtälöihin (2) ja (3), jolloin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} -3y - 4z - 2y + 3z = -3 \\ 2(-3y - 4z) - 5y - z = 7 \end{cases}$$

$$(5) \quad -5y - z = -3$$

$$(6) \quad -11y - 9z = 7$$

Ratkaistaan yhtälöstä (5) muuttuja  $z$  muuttujan  $y$  suhteen. Saadaan yhtälö

$$(7) \quad z = 3 - 5y$$

Sijoitetaan yhtälö (7) yhtälöön (6), jolloin saadaan

$$-11y - 9(3 - 5y) = 7$$

$$-11y - 27 + 45y = 7$$

$$34y = 34$$

$$y = 1$$

Muuttujan  $z$  arvo saadaan sijoittamalla  $y = 1$  yhtälöön (7).

$$z = 3 - 5y = 3 - 5 \cdot 1 = -2$$

Muuttujan  $x$  arvo saadaan sijoittamalla  $y = 1$  ja  $z = -2$  yhtälöön (4).

$$x = -3y - 4z = -3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) = 5$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on 
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} .$$

b) Yhtälöitä on vain kaksi ja muuttujia kolme, joten ratkaistaan kaksi muuttujaa kolmannen muuttujan suhteen.

Ratkaistaan esimerkiksi muuttujat  $x$  ja  $y$  muuttujan  $z$  suhteen sijoituskeinolla.

$$\begin{cases} (1) \{ 2x + y - z = 1 \\ (2) \{ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad | \quad \text{Ratkaistaan } y.$$

$$\begin{cases} (3) \{ y = -2x + z + 1 \\ (2) \{ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad | \quad \text{Sijoitetaan yhtälöön (2).}$$

$$\begin{aligned} x - 2x + z + 1 + 2z &= 0 \\ x = 3z + 1 \quad &| \quad \text{Sijoitetaan yhtälöön (3).} \end{aligned}$$

$$y = -2x + z + 1 = -2(3z + 1) + z + 1 = -5z - 1$$

$$\text{Siis yhtälöryhmän ratkaisu on } \begin{cases} x = 3z + 1 \\ y = -5z - 1. \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Jos merkitään muuttujan  $z$  arvoa kirjaimella  $a$ , saadaan yhtälöryhmän ratkaisu parametrimuodossa

$$\begin{cases} x = 3a + 1 \\ y = -5a - 1 \quad (a \in \mathbb{R}) \\ z = a \end{cases}$$

Huomautuksia:

– Jos yhtälöistä olisi ratkaistu muuttujat  $x$  ja  $z$  muuttujan  $y$  suhteen, ratkaisu olisi saatu muodossa

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{5}y + \frac{2}{5} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{1}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases} \quad \left( \begin{cases} x = -\frac{3}{5}a + \frac{2}{5} \\ y = a \\ z = -\frac{1}{5}a - \frac{1}{5} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \right)$$

– Jos yhtälöistä olisi ratkaistu muuttujat  $y$  ja  $z$  muuttujan  $x$  suhteen, ratkaisu olisi saatu muodossa

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases} \quad \left( \begin{cases} x = a \\ y = -\frac{5}{3}a + \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \right)$$

$$\text{Vastaus} \quad \text{a) } \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 3z + 1 \\ y = -5z - 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

320

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a + b + c = 24 \\ a = \frac{1}{5}(b - c) \\ b = 2(a + c) \end{cases} \quad | \cdot 5$$

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 24 \\ 5a - b + c = 0 \\ 2a - b + 2c = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 24 \\ 5a - b + c = 0 \end{array} \right. \\ \hline (4) \quad 6a + 2c = 24 \end{array} \quad \begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 24 \\ 2a - b + 2c = 0 \end{array} \right. \\ \hline (5) \quad 3a + 3c = 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (4) \left\{ \begin{array}{l} 6a + 2c = 24 \\ 3a + 3c = 24 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-2) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{l} 6a + 2c = 24 \\ -6a - 6c = -48 \end{array} \right. \\ \hline -4c = -24 \\ c = 6 \end{array}$$

Sijoitetaan  $c = 6$  yhtälöön (4), jolloin saadaan

$$\begin{array}{l} 6a + 2 \cdot 6 = 24 \\ 6a = 12 \\ a = 2 \end{array}$$

Sijoitetaan  $a = 2$  ja  $c = 6$  alkuperäiseen yhtälöön  $b = 2(a + c)$ , jolloin saadaan

$$b = 2(2 + 6) = 16$$

Vastaus Luvut ovat 2, 16 ja 6.

321

a)

$$\begin{cases} (1) & 3x = -6 & | \text{ Ratkaistaan } x. \\ (2) & x + y = 1 & | \text{ Ratkaistaan } y. \\ (3) & 3x + 2y + z = 1 \\ (4) & x - y + 5z - 5t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5) & \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 - x \end{cases} \\ (3) & 3x + 2y + z = 1 \\ (4) & x - y + 5z - 5t = 0 \end{cases}$$

Muuttujan  $y$  arvo saadaan, kun sijoitetaan  $x = -2$  yhtälöön (5).

$$y = 1 - x = 1 - (-2) = 3$$

Muuttujan  $z$  arvo saadaan, kun sijoitetaan  $x = -2$  ja  $y = 3$  yhtälöön (3).

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Muuttujan  $t$  arvo saadaan, kun sijoitetaan  $x = -2$ ,  $y = 3$  ja  $z = 1$  yhtälöön (4).

$$-2 - 3 + 5 \cdot 1 - 5t = 0$$

$$-5t = 0$$

$$t = 0$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{cases}$ .

b)

$$\begin{cases} (1) & x + y + z + 2u = 2 \\ (2) & x + 2y - z - u = 0 & | \text{ Ratkaistaan } u. \\ (3) & x - y + 2z = 5 - u \\ (4) & 3y + 2x - 3u = 2z + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & x + y + z + 2u = 2 \\ (5) & u = x + 2y - z & | \text{ Sijoitetaan yhtälöihin (1), (3) ja (4).} \\ (3) & x - y + 2z = 5 - u \\ (4) & 3y + 2x - 3u = 2z + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + 2(x + 2y - z) = 2 \\ x - y + 2z = 5 - (x + 2y - z) \\ 3y + 2x - 3(x + 2y - z) = 2z + 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} (6) & 3x + 5y - z = 2 \\ (7) & 2x + y + z = 5 \\ (8) & -x - 3y + z = 2 \end{cases} \quad | \text{ Ratkaistaan } x.$$

$$\begin{cases} (6) & 3x + 5y - z = 2 \\ (7) & 2x + y + z = 5 \\ (9) & x = -3y + z - 2 \end{cases} \quad | \text{ Sijoitetaan yhtälöihin (6) ja (7).}$$

$$\begin{cases} 3(-3y + z - 2) + 5y - z = 2 \\ 2(-3y + z - 2) + y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y + 2z = 8 \\ -5y + 3z = 9 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskukeinolla.

$$\begin{cases} -4y + 2z = 8 & | \cdot 5 & | \cdot (-3) \\ -5y + 3z = 9 & | \cdot (-4) & | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -20y + 10z = 40 \\ 20y - 12z = -36 \end{cases} \\ \hline -2z = 4 \\ z = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 12y - 6z = -24 \\ -10y + 6z = 18 \end{cases} \\ \hline 2y = -6 \\ y = -3 \end{array}$$

Muuttujan  $x$  arvo saadaan, kun sijoitetaan  $y = -3$  ja  $z = -2$  yhtälöön (9).

$$x = -3y + z - 2 = -3 \cdot (-3) - 2 - 2 = 9 - 4 = 5$$

Muuttujan  $u$  arvo saadaan, kun sijoitetaan muuttujien  $x$ ,  $y$  ja  $z$  arvot yhtälöön (5).

$$u = x + 2y - z = 5 + 2 \cdot (-3) - (-2) = 5 - 6 + 2 = 1$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on 
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = -2 \\ u = 1 \end{cases}.$$

Vastaus a) 
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$
 b) 
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = -2 \\ u = 1 \end{cases}$$

322

a) Muodostetaan yhtälöketjusta yhtälöpari

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 2x + 3y - 9 \\ 2x + 3y - 9 = 4x + 3y - 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 1 - 2x - 3y + 9 = 0 \\ 2x + 3y - 9 - 4x - 3y + 15 = 0 \end{cases}$$

(1)  $-x - 5y + 8 = 0$

(2)  $-2x + 6 = 0$  | Ratkaistaan  $x$ .

$-2x + 6 = 0$

$x = 3$

Muuttujan  $y$  arvo saadaan, kun sijoitetaan  $x = 3$  yhtälöön (1).

$-3 - 5y + 8 = 0$

$-5y = -5$

$y = 1$

Ratkaisu on  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ .

b) Muodostetaan yhtälöketjusta yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + u + 1 = x - y + 3z - u \\ x - y + 3z - u = 3x + 2y + z - 2u + 6 \\ 3x + 2y + z - 2u + 6 = -x - y + 2z + 2u - 7 \\ -x - y + 2z + 2u - 7 = 2x + u \end{cases}$$

(1)  $x + 4y - 4z + 2u + 1 = 0$

(2)  $-2x - 3y + 2z + u - 6 = 0$

(3)  $4x + 3y - z - 4u + 13 = 0$

(4)  $-3x - y + 2z + u - 7 = 0$

Ratkaistaan yhtälöstä (1) muuttuja  $x$  muuttujien  $y$ ,  $z$  ja  $u$  suhteen.

(5)  $x = -4y + 4z - 2u - 1$

Sijoitetaan yhtälö (5) yhtälöihin (2), (3) ja (4).

$$\begin{cases} -2(-4y + 4z - 2u - 1) - 3y + 2z + u - 6 = 0 \\ 4(-4y + 4z - 2u - 1) + 3y - z - 4u + 13 = 0 \\ -3(-4y + 4z - 2u - 1) - y + 2z + u - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (6) \\ (7) \\ (8) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5y - 6z + 5u - 4 = 0 \\ -13y + 15z - 12u + 9 = 0 \\ 11y - 10z + 7u - 4 = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{l} 25y - 30z + 25u - 20 = 0 \\ -26y + 30z - 24u + 18 = 0 \end{array} \right. \\ \hline -y \quad +u - 2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{l} -26y + 30z - 24u + 18 = 0 \\ 33y - 30z + 21u - 12 = 0 \end{array} \right. \\ \hline (10) \quad 7y \quad -3u + 6 = 0 \end{array}$$

$$(9) \quad y = u - 2$$

Sijoitetaan yhtälö (9) yhtälöön (10).

$$7(u - 2) - 3u + 6 = 0$$

$$7u - 14 - 3u + 6 = 0$$

$$4u = 8$$

$$u = 2 \quad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (9).}$$

$$y = u - 2 = 2 - 2 = 0$$

Muuttujan  $z$  arvo saadaan sijoittamalla  $u = 2$  ja  $y = 0$  yhtälöön (6).

$$5 \cdot 0 - 6z + 5 \cdot 2 - 4 = 0$$

$$-6z + 6 = 0$$

$$z = 1$$

Muuttujan  $x$  arvo saadaan sijoittamalla  $y = 0$ ,  $z = 1$  ja  $u = 2$  yhtälöön (5).

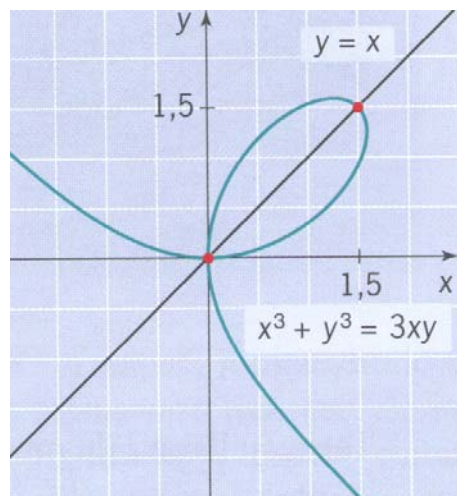
$$x = -4y + 4z - 2u - 1$$

$$= -4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 1 = -1$$

$$\text{Ratkaisu on } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ u = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vastaus} \quad \text{a) } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ u = 2 \end{cases}$$

323



Leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} (1) & x^3 + y^3 = 3xy \\ (2) & x = y \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Sijoitetaan yhtälöön (1).} \end{array} \right.$$

$$x^3 + x^3 = 3x \cdot x$$

$$2x^3 - 3x^2 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Otetaan yhteinen tekijä.} \end{array} \right.$$

$$x^2(2x - 3) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Tulon nollasääntö.} \end{array} \right.$$

$$x^2 = 0 \text{ tai } 2x - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Muuttujan  $y$  arvot saadaan sijoittamalla muuttujan  $x$  arvot yhtälöön (2).

Kun  $x = 0$ , niin  $y = 0$ . Siis leikkauspiste on  $(0, 0)$ .

Kun  $x = 1\frac{1}{2}$ , niin  $y = 1\frac{1}{2}$ . Siis leikkauspiste on  $\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ .

Vastaus Leikkauspisteet ovat  $(0, 0)$  ja  $\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ .

324

Parillisten potenssien summa on nolla, kun jokainen yhteenlaskettava on nolla. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 4z - 1 = 0 \\ 3x - y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot (-4) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ + (2) \end{array} \begin{cases} -4x - 4y + 4z + 8 = 0 \\ 2x + 3y - 4z - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ + (3) \end{array} \begin{cases} -2x - 2y + 2z + 4 = 0 \\ 3x - y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$


---


$$(4) \quad -2x - y + 7 = 0 \qquad \qquad \qquad x - 3y = 0$$

$$(5) \quad x = 3y$$

Sijoitetaan yhtälö (5) yhtälöön (4).

$$\begin{aligned} -2 \cdot 3y - y + 7 &= 0 \\ -7y &= -7 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

| Sijoitetaan yhtälöön (5).

$$x = 3y = 3 \cdot 1 = 3$$

Muuttujan  $z$  arvo saadaan, kun sijoitetaan  $x = 3$  ja  $y = 1$  yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} 3 + 1 - z - 2 &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus Yhtälö on tosi, kun  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ .

325

Merkitään sekoitusmääriä seuraavasti:

**Pullo A:**

suolaliuosta aluksi  $a$  (dl)

1. kaadon jälkeen  $a - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a$

2. kaadon jälkeen  $\frac{2}{3}a$

3. kaadon jälkeen  $\frac{2}{3}a + \frac{1}{10} \left( c + \frac{1}{4}b + \frac{1}{12}a \right)$

$$= \overset{40)}{\frac{2}{3}a} + \frac{1}{10}c + \frac{1}{40}b + \frac{1}{120}a$$

$$= \overset{27}{\cancel{81}} \overset{40}{120} a + \frac{1}{10}c + \frac{1}{40}b$$

$$= \frac{27}{40}a + \frac{1}{10}c + \frac{1}{40}b$$

**Pullo B:**suolaliuosta aluksi  $b$  (dl)

1. kaadon jälkeen  $b + \frac{1}{3}a$

2. kaadon jälkeen  $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(b + \frac{1}{3}a\right)$

$$= \frac{3}{4}\left(b + \frac{1}{3}a\right)$$

$$= \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a$$

3. kaadon jälkeen  $\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a$

**Pullo C:**suolaliuosta aluksi  $c$  (dl)

1. kaadon jälkeen  $c$

2. kaadon jälkeen  $c + \frac{1}{4}\left(b + \frac{1}{3}a\right)$   
 $= c + \frac{1}{4}b + \frac{1}{12}a$

3. kaadon jälkeen  $\left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(c + \frac{1}{4}b + \frac{1}{12}a\right)$   
 $= \frac{9}{10}c + \frac{9}{40}b + \frac{3}{40}a$

Kaikissa pulloissa on lopuksi suolaliuosta 9 dl, joten saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{27}{40}a + \frac{1}{10}c + \frac{1}{40}b = 9 & | \cdot 40 \\ \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a = 9 & | \cdot 4 \\ \frac{9}{10}c + \frac{9}{40}b + \frac{3}{40}a = 9 & | \cdot 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & 27a + b + 4c = 360 \\ (2) & a + 3b = 36 \\ (3) & 3a + 9b + 36c = 360 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \text{Ratkaistaan } a \\ | :3 \end{array}$$

$$\begin{cases} (1) & 27a + b + 4c = 360 \\ (4) & a = 36 - 3b \\ (5) & a + 3b + 12c = 120 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \text{Sijoitetaan yhtälöihin (1) ja (5).} \end{array}$$

$$\begin{cases} 27(36 - 3b) + b + 4c = 360 \\ 36 - 3b + 3b + 12c = 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -80b + 4c = -612 \\ 12c = 84 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | :4 \end{array}$$

$$(6) \begin{cases} -20b + c = -153 \\ c = 7 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \text{Sijoitetaan yhtälöön (6).} \end{array}$$

$$-20b + 7 = -153$$

$$-20b = -160$$

$$b = 8 \quad \begin{array}{l} | \text{Sijoitetaan yhtälöön (4).} \end{array}$$

$$a = 36 - 3b = 36 - 3 \cdot 8 = 12$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on  $a = 12$ ,  $b = 8$  ja  $c = 7$ .

Vastaus Ensimmäisessä pullossa on 12 dl, toisessa 8 dl ja kolmannessa 7 dl.

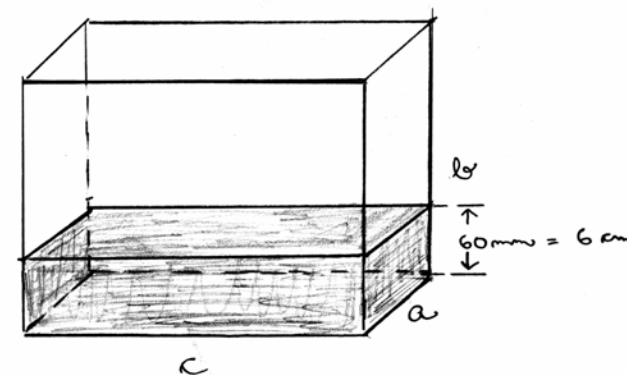
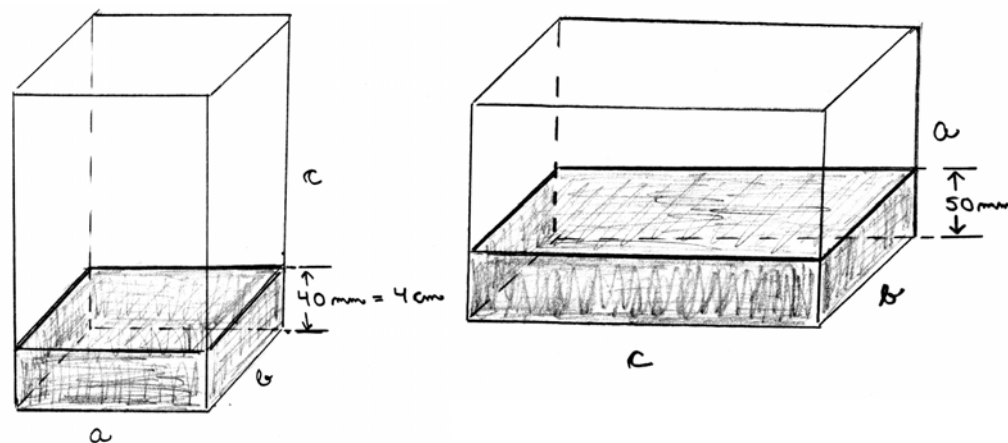
**326**

Merkitään suorakulmaisen särmiön särmiä kirjaimilla  $a$ ,  $b$  ja  $c$ . Tällöin särmiön tilavuus on  $V = abc$  ( $a$ ,  $b$ ,  $c \neq 0$ ).

Veden tilavuus on

$$1,20l = 1,20 \text{ dm}^3 = 1\,200 \text{ cm}^3$$

Piirretään tilanteesta mallikuva.



Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a \cdot b \cdot 4 = 1200 \\ b \cdot c \cdot 5 = 1200 \\ a \cdot c \cdot 6 = 1200 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \text{ Ratkaistaan } b. \\ | :5 \\ | :6 \end{array}$$

Suorakulmaisen särmiön tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= abc = 5\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{10} = 120 \cdot 10\sqrt{10} \\ &= 1200\sqrt{10} = 3794,733\dots \\ &\approx 3790(\text{cm}^3) = 3,79 \text{ l} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} b = \frac{300}{a} \\ bc = 240 \\ ac = 200 \end{cases} \quad \begin{array}{l} | \text{ Sijoitetaan yhtälöön (2).} \\ \\ \end{array}$$

Vastaus Särmiön tilavuus on 3,79 l.

$$\frac{300}{a} \cdot c = 240 \quad \left| : \frac{300}{a} \right.$$

$$(4) \quad c = 240 \cdot \frac{a}{300} = \frac{4}{5}a \quad \left| \text{ Sijoitetaan yhtälöön (3).} \right.$$

$$a \cdot \frac{4}{5}a = 200 \quad \left| : \frac{4}{5} \right.$$

$$a^2 = 250$$

$$a = (\pm)\sqrt{250} = 5\sqrt{10}$$

Sijoitetaan yhtälöihin (4) ja (1).

$$c = \frac{4}{5}a = \frac{4}{5} \cdot 5\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

$$b = \frac{300}{a} = \frac{300}{5\sqrt{10}} = \frac{60}{\sqrt{10}} = 6\sqrt{10}$$



327

$$\begin{cases} ax + 3y + 2z = 8 \\ -8x - 6y - az - 4 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöitä on vain kaksi ja muuttujia kolme, joten ratkaistaan kaksi muuttujaa kolmannen muuttujan suhteen.

Ratkaistaan muuttuja  $y$  muuttujan  $z$  suhteen.

$$\begin{cases} ax + 3y + 2z = 8 \\ -8x - 6y - az - 4 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 8 \\ \cdot a, a \neq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Tapaus } a = 0 \text{ on tutkittava erikseen.} \end{array}$$

1)  $a \neq 0$ 

$$+ \begin{cases} 8ax + 24y + 16z = 64 \\ -8ax - 6ay - a^2z = 4a \end{cases}$$

$$(24 - 6a)y + (16 - a^2)z = 64 + 4a$$

$$(24 - 6a)y = (64 + 4a) - (16 - a^2)z \quad \begin{array}{l} : (24 - 6a) \neq 0 \\ \text{eli } a \neq 4 \end{array}$$

Jos  $a \neq 4$ , on

$$y = \frac{64 + 4a}{24 - 6a} - \frac{16 - a^2}{24 - 6a}z$$

Ratkaistaan seuraavaksi muuttuja  $x$  muuttujan  $z$  suhteen.

$$\begin{cases} ax + 3y + 2z = 8 \\ -8x - 6y - az = 4 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$+ \begin{cases} 2ax + 6y + 4z = 16 \\ -8x - 6y - az = 4 \end{cases}$$

$$(2a - 8)x + (4 - a)z = 20$$

$$(2a - 8)x = 20 - (4 - a)z \quad \begin{array}{l} : (2a - 8) \neq 0 \text{ eli } a \neq 4 \end{array}$$

Jos  $a \neq 4$ , on

$$x = \frac{20}{2a - 8} - \frac{4 - a}{2a - 8}z$$

Jos  $a = 4$ , alkuperäinen yhtälöpari on

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 8 \\ -8x - 6y - 4z - 4 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$+ \begin{cases} 8x + 6y + 4z = 16 \\ -8x - 6y - 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$-4 = 16$$

aina epätosi

Yhtälöparilla ei siis ole ratkaisua, kun  $a = 4$ .

Tutkitaan vielä tapaus  $a = 0$ .

2) Jos  $a = 0$ , alkuperäinen yhtälöpari on

$$\begin{cases} 3y + 2z = 8 \\ -8x - 6y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y + 2z = 8 \\ -8x - 6y = 4 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array} \right.$$

$$+ \begin{cases} 6y + 4z = 16 \\ -8x - 6y = 4 \end{cases}$$

$$\hline -8x \quad + 4z = 20 \quad \left| :4 \right.$$

$$-2x + z = 5$$

$$z = 2x + 5$$

Yhtälöllä  $z = 2x + 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , on äärettömän monta ratkaisua.

Kohtien 1) ja 2) perusteella yhtälöparilla ei siis ole ratkaisua, kun  $a = 4$ .

Vastaus  $a = 4$