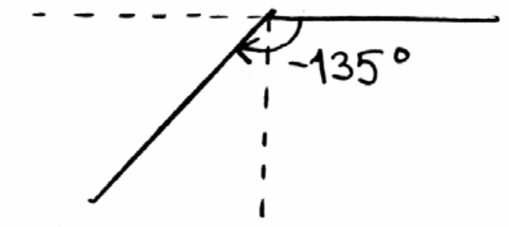
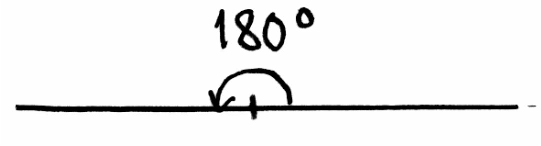
401

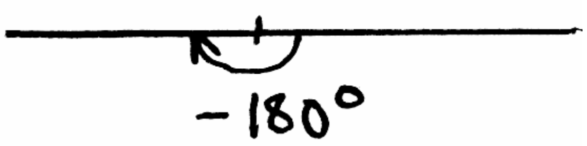
a)



b)



c)



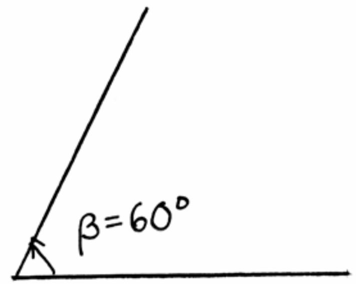
402

Suplementtikulmille on voimassa

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

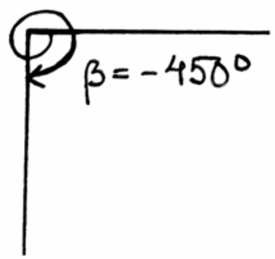
a)

$$\alpha = 120^\circ$$
$$120^\circ + \beta = 180^\circ$$
$$\beta = 60^\circ$$



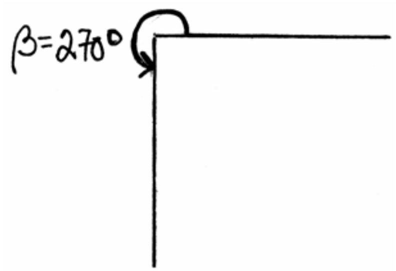
b)

$$\alpha = 630^\circ$$
$$630^\circ + \beta = 180^\circ$$
$$\beta = 180^\circ - 630^\circ$$
$$\beta = -450^\circ$$
$$\beta = -360^\circ - 90^\circ$$



c)

$$\alpha = -90^\circ$$
$$-90^\circ + \beta = 180^\circ$$
$$\beta = 180^\circ + 90^\circ$$
$$\beta = 270^\circ$$



403

a)

$\alpha = -30^\circ - 180^\circ = -210^\circ$

$\beta = 270^\circ + 60^\circ = 330^\circ$

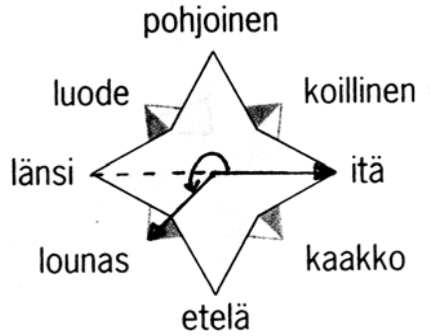
b)

$\alpha = -360^\circ - 45^\circ = -405^\circ$

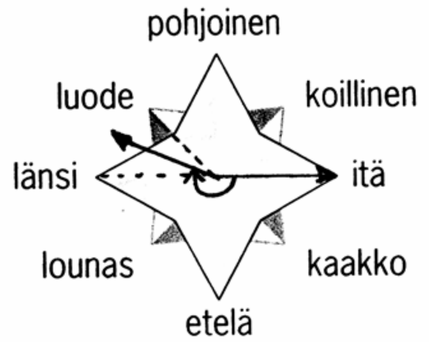
$\beta = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

404.

a) Suunnattu kulma on
$180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$



b) Suunnattu kulma on
$-180^\circ - 22{,}5^\circ = -202{,}5^\circ$



405

a) $1180^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 100^\circ$,

joten kulmalla 100° on sama alku- ja loppukylki.

b) $-2000^\circ = 5 \cdot (-360^\circ) - 200^\circ$

Kulmaa -200° vastaava positiivisen kiertosuunnan kulma on $360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$.

406

$t = 11$ min

Sekuntiviisari kiertää minuutissa yhden kierroksen myötäpäivään eli viisari kiertää kulman -360°. Siis

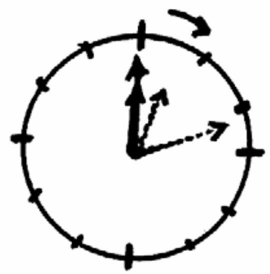
$\alpha = 11 \cdot (-360^\circ) = -3960^\circ$

$t = 11 \text{ min} = \frac{11}{60} \text{ h}$

Tuntiviisari kiertää tunnissa myötäpäivään yhden numerovälin eli

$-\frac{360^\circ}{12} = -30^\circ$.

Siis $\alpha = \frac{11}{60} \cdot (-30^\circ) = -5{,}5^\circ$



Vastaus -3960°; $5{,}5^\circ$

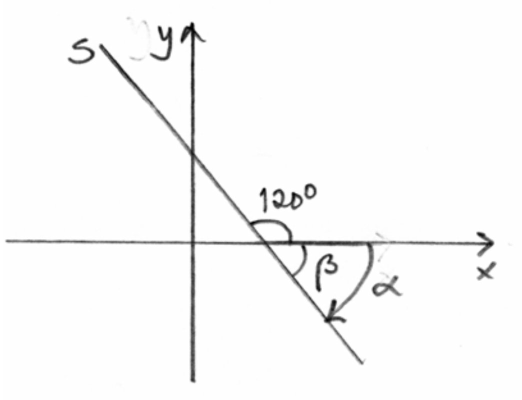
407

a) Pystysuoran suoran suuntakulma on 90°.

b) Vaakasuoran suoran suuntakulma on 0°

408

a) Merkitään suoran s ja positiivisen x-akselin välistä kulmaa β:lla.

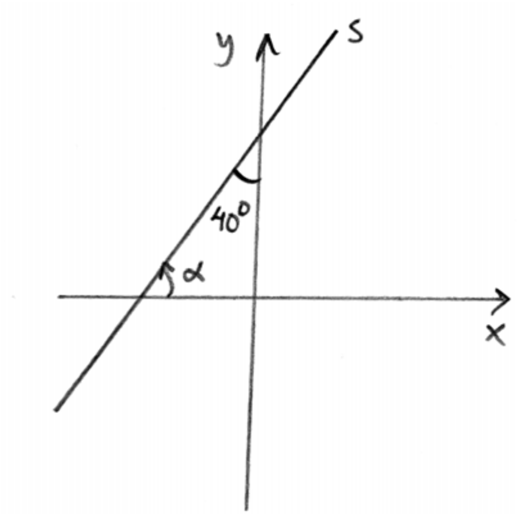


$$\beta = 180^\circ - 120^\circ \quad | \text{ vieruskulmat}$$
$$= 60^\circ$$

Koska suora s on laskeva, on suuntakulma $\alpha < 0$.
Siis

$$\alpha = -\beta = -60^\circ$$

b)



Koska suora s on nouseva, on suuntakulma $\alpha > 0$.

$$\alpha = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ$$
$$= 50^\circ$$

Vastaus Suoran s suuntakulma on

a) -60° b) 50°

409

a) Pisteet $(0,0)$ ja $(-5,10)$

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{10-0}{-5-0}=-2$$

b) Pisteet $(0,0)$ ja $(5,0)$

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-0}{5-0}=0$$

c) Pisteet $(0,0)$ ja $(0,-5)$

Koska pisteillä on sama x-koordinaatti, on suora pystysuora.
Siis kulmakerroin ei ole määritelty.

Vastaus a) –2 b) 0 c) ei kulmakerrointa

410

a)

$$(x_1,y_1)=(3,0)$$
$$(x_2,y_2)=(5,-2)$$
$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-0}{5-3}=\frac{-2}{2}=-1<0$$

Koska $k<0$, on suora laskeva.

b)

$$(x_1,y_1)=(-4,3)$$
$$(x_2,y_2)=(0,3)$$
$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-3}{0-(-4)}=0$$

Koska $k=0$, on suora vaakasuora.

c)

$$(x_1,y_1)=(-1,3)$$
$$(x_2,y_2)=(-2,-4)$$
$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-4-3}{-2-(-1)}=\frac{-7}{-1}=7>0$$

Koska $k>0$, on suora nouseva.

d)

$$(x_1,y_1)=(10,-1)$$
$$(x_2,y_2)=(10,2)$$

Koska pisteiden x-koordinaatit ovat samat, on suora pystysuora.

Vastaus a) laskeva b) vaakasuora c) nouseva d) pystysuora

411

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \left| \begin{array}{l} k = \frac{3}{2}, \\ (x_1, y_1) = (-1, 3) \\ (x_2, y_2) = (3, a) \end{array} \right.$$

$$\frac{3}{2} = \frac{a-3}{3-(-1)}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{a-3}{4}$$

$$2(a-3) = 12$$

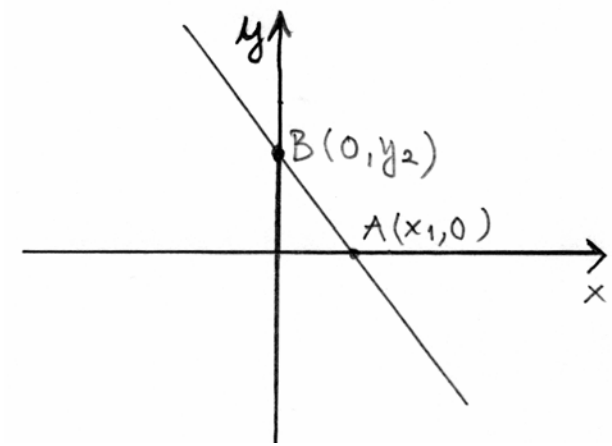
$$a - 3 = 6$$

$$a = 9$$

Vastaus $\quad a = 9$

412

Olkoon suoran ja x-akselin leikkauspisteenä $A = (x_1, 0)$ sekä suoran ja y-akselin leikkauspisteenä $B = (0, y_2)$.



Suoran kulmakerroin

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \left| \begin{array}{l} (x_1, y_1) = (x_1, 0) \\ (x_2, y_2) = (0, y_2) \end{array} \right.$$

$$= \frac{y_2 - 0}{0 - x_1}$$

$$= -\frac{y_2}{x_1}$$

Toisaalta kulmakerroin $k = -\frac{4}{3}$. Siis

$$-\frac{y_2}{x_1} = -\frac{4}{3}$$

$$y_2 = \frac{4}{3} x_1$$

Janan AB pituus on

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \left|\begin{array}{l}(x_1, y_1) = (x_1, 0) \\ (x_2, y_2) = (0, y_2)\end{array}\right.$$

$$= \sqrt{(0 - x_1)^2 + (y_2 - 0)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{4}{3}x_1\right)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + \frac{16}{9}x_1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}x_1^2}$$

$$= \frac{5}{3}|x_1|$$

Siis

$$\frac{5}{3}|x_1| = 15$$

$$|x_1| = \frac{3 \cdot 15}{5}$$

$$|x_1| = 9$$

$$x_1 = \pm 9$$

Kun $x_1 = -9$, niin

$$y_2 = \frac{4}{3} \cdot (-9) = -12$$

Kun $x_1 = 9$, niin

$$y_2 = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$$

Siis

$A = (-9, 0)$ ja $B = (0, -12)$ tai

$A = (9, 0)$ ja $B = (0, 12)$

Vastaus

$A = (-9, 0)$ ja $B = (0, -12)$ tai $A = (9, 0)$ ja $B = (0, 12)$

413

$k = \tan\alpha$, kun $\alpha \neq 90^\circ$

a) $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

b) $k = \tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

c) $k = \tan(-45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

d) $k = \tan 0^\circ = 0$

e) Koska $\alpha = 90^\circ$, niin suoralla ei ole kulmakerrointa.

Vastaus a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) -1 d) 0
e) ei kulmakerrointa

414

a)

$\tan\alpha = 2$

$\alpha = \tan^{-1} 2$

$\alpha = 63{,}434...^\circ \approx 63^\circ$

b)

$\tan\alpha = -3$

$\alpha = \tan^{-1}(-3)$

$\alpha = -71{,}565...^\circ \approx -72^\circ$

c)

$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha = 30^\circ$

d)

$\tan\alpha = -\sqrt{2}$

$\alpha = \tan^{-1}(-\sqrt{2})$

$\alpha = -54{,}735...^\circ \approx -55^\circ$

e)

$\tan\alpha = 0$

$\alpha = 0^\circ$

Vastaus a) 63° b) -72° c) 30° d) -55° e) 0°

415

$\tan\alpha = k, \quad \alpha \neq 90^\circ$

$\tan\alpha = \dfrac{\triangle y}{\triangle x} \qquad \Big|\ \triangle x = -10,\ \triangle y = 7$

$\tan\alpha = \dfrac{7}{-10}$

$\alpha = -34{,}99...^\circ$

$\approx -35^\circ$

Vastaus -35°

416

$(x_1, y_1) = (1, -1)$

$(x_2, y_2) = (\sqrt{2}, 0)$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{0+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\overset{\sqrt{2}+1)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1}$$

$$= \sqrt{2}+1$$

$\tan\alpha = k$

$\tan\alpha = \sqrt{2}+1$

$\alpha = 67{,}5^\circ$

Vastaus $k = \sqrt{2}+1$

Suuntakulma on $67{,}5^\circ$.

417

a) $(x_1, y_1) = (1,0) \qquad (x_2, y_2) = (3,6)$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-0}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\tan\alpha = k$$

$$\tan\alpha = 3$$

$$\alpha = 71{,}56...^\circ$$

$$\alpha \approx 72^\circ$$

b) $(x_1, y_1) = (1, \sqrt{3}) \qquad (x_2, y_2) = (-1, \sqrt{2})$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1-1} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 9{,}02...^\circ$$

$$\alpha \approx 9{,}0^\circ$$

Vastaus a) $k = 3$, suuntakulma on 72°

b) $k = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$, suuntakulma on $9{,}0^\circ$

418

$$k = \tan\alpha \qquad \Big|\ \alpha = -45^\circ$$

$$k = \tan(-45^\circ)$$

$$= -\tan 45^\circ$$

$$= -1$$

Toisaalta

$$k = \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \left|\begin{array}{l}(x_1, y_1) = (-6, -2) \\ (x_2, y_2) = (-a, -8)\end{array}\right.$$

$$= \frac{-8-(-2)}{-a-(-6)}$$

$$= \frac{-8+2}{-a+6}$$

$$= \frac{-6}{6-a}$$

Siis

$$\frac{-6}{6-a} = -1$$

$$-6 = -6 + a$$

$$a = 0$$

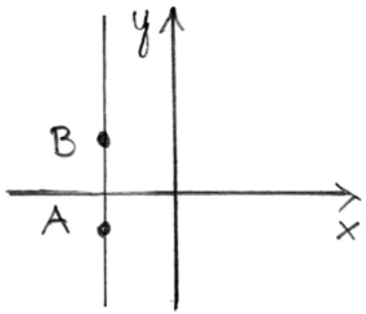
Vastaus $a = 0$

419

$$A=(a-1,-1)$$
$$B=(2a+1,a^2-3)$$

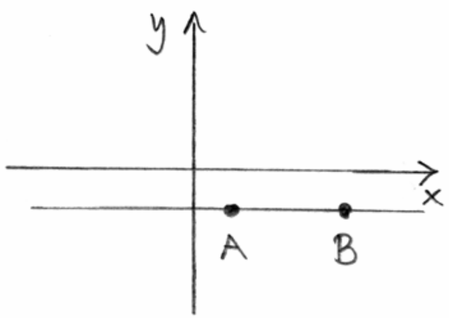
a) Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on pystysuora, jos pisteiden x-koordinaatit ovat yhtä suuret.
Siis

$$a-1=2a+1$$
$$a-2a=1+1$$
$$-a=2$$
$$a=-2$$



b) Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on vaakasuora, jos pisteiden y-koordinaatit ovat yhtä suuret.
Siis

$$a^2-3=-1$$
$$a^2=2$$
$$a=\pm\sqrt{2}$$



Vastaus a) $a=-2$ b) $a=\pm\sqrt{2}$

420

Olkoon

$$(x_1,y_1)=(2,\ a)$$
$$(x_2,y_2)=(1,\ a^2-a-3)$$

Kulmakerroin on

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$=\frac{a^2-a-3-a}{1-2}$$
$$=\frac{a^2-2a-3}{-1}$$
$$=-a^2+2a+3$$

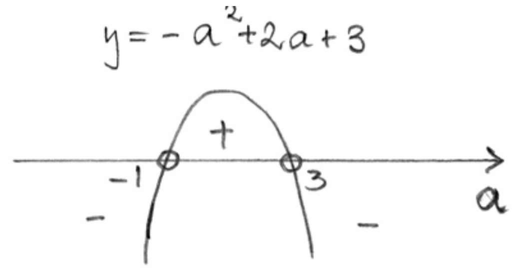
a) Suora on nouseva, jos $k>0$.

$$-a^2+2a+3>0$$

Nollakohdat:

$$-a^2+2a+3=0$$
$$a=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}$$
$$a=\frac{-2\pm 4}{-2}$$
$$a=-1\ \text{ tai }\ a=3$$

Kuvaaja:



Siis $-a^2 + 2a + 3 > 0$, kun $-1 < a < 3$.
Näin ollen suora on nouseva, kun $-1 < a < 3$.

b) Suora on laskeva, jos $k < 0$.

Kuvaajan avulla saadaan, että

$$-a^2 + 2a + 3 < 0, \text{ kun } a < -1 \text{ tai } a > 3$$

Siis suora on laskeva, kun $a < -1$ tai $a > 3$.

Vastaus a) $-1 < a < 3$
b) $a < -1$ tai $a > 3$

421

a)

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| (x_0, y_0) = (0,0),\ k = 3 \right.$$
$$y - 0 = 3(x - 0)$$
$$y = 3x$$

Yhtälö voidaan esittää myös muodossa $3x - y = 0$.

b)

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| (x_0, y_0) = (-1,3),\ k = -\frac{2}{3} \right.$$
$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x - (-1))$$
$$y - 3 = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \qquad | \cdot 3$$
$$3y - 9 = -2x - 2$$
$$2x + 3y - 7 = 0$$

Yhtälö voidaan esittää myös muodossa $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

c)

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| (x_0, y_0) = (19,98),\ k = 0 \right.$$
$$y - 98 = 0(x - 19)$$
$$y - 98 = 0$$
$$y = 98$$

Yhtälö voidaan esittää myös muodossa $y - 98 = 0$.

Vastaus a) $y = 3x$ b) $2x + 3y - 7 = 0$ c) $y = 98$

422

a) Suoran yhtälö on

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right) \qquad \left|\left(x_0,y_0\right)=\left(3,\frac{3}{2}\right),\ k=\frac{1}{2}\right.$$

$$y-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(x-3)$$

$$y-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{1}{2}x$$

Yhtälö voidaan esittää myös yleisessä muodossa

$$y=\frac{1}{2}x \qquad |\cdot 2$$

$$2y=x$$

$$x-2y=0$$

b) Suoran yhtälö on

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right) \qquad \left|\left(x_0,y_0\right)=\left(0,-\frac{1}{2}\right),\ k=\frac{1}{2}\right.$$

$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(x-0)$$

$$y+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

Yhtälö voidaan esittää myös yleisessä muodossa

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \qquad |\cdot 2$$

$$2y=x-1$$

$$x-2y-1=0$$

c) Suoran yhtälö on

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right) \qquad \left|\left(x_0,y_0\right)=(-2a,2a),\ k=\frac{1}{2}\right.$$

$$y-2a=\frac{1}{2}(x-(-2a))$$

$$y-2a=\frac{1}{2}(x+2a)$$

$$y-2a=\frac{1}{2}x+a$$

$$y=\frac{1}{2}x+3a$$

Yhtälö voidaan esittää myös yleisessä muodossa

$$y=\frac{1}{2}x+3a \qquad |\cdot 2$$

$$2y=x+6a$$

$$x-2y+6a=0$$

Vastaus a) $y=\frac{1}{2}x$ b) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ c) $y=\frac{1}{2}x+3a$

423

a) Piste $(x_0, y_0) = (3, -5)$

Koska suora on vaakasuora, on sen yhtälö muotoa

$$y = y_0$$

Siis yhtälö on $y = -5$.

b) Piste $(x_0, y_0) = (3, -5)$

Koska suora on pystysuora, on sen yhtälö muotoa

$$x = x_0$$

Siis yhtälö on $x = 3$.

Vastaus a) $y = -5$ b) $x = 3$

424

a)

$$(x_1, y_1) = (-2, 1)$$

$$(x_2, y_2) = (-1, -4)$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{-1 - (-2)}(x - (-2))$$

$$y - 1 = \frac{-5}{1}(x + 2)$$

$$y - 1 = -5(x + 2)$$

$$y - 1 = -5x - 10 \qquad (y = -5x - 9)$$

$$5x + y + 9 = 0$$

b)

$$(x_1, y_1) = (3,0)$$
$$(x_2, y_2) = (-1,3)$$
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - 0 = \frac{3-0}{-1-3}(x-3)$$
$$y = \frac{3}{-4}(x-3) \qquad \Big| \cdot (-4)$$
$$-4y = 3x - 9 \qquad \left(y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\right)$$
$$3x + 4y - 9 = 0$$

c)

$$(x_1, y_1) = (a,b)$$
$$(x_2, y_2) = (b,a)$$
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - b = \frac{a-b}{b-a}(x-a)$$
$$y - b = \frac{a-b}{-(a-b)}(x-a)$$
$$y - b = -x + a$$
$$x + y - a - b = 0 \qquad (y = -x + a + b)$$

Vastaus a) $5x + y + 9 = 0$ b) $3x + 4y - 9 = 0$ c) $x + y - a - b = 0$

425

a)

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad \Big| \, k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \Big| \begin{array}{l}(x_1, y_1) = (-4,3) \\ (x_2, y_2) = (0,-5)\end{array}$$
$$y - 3 = \frac{-5-3}{0+4}(x+4)$$
$$y - 3 = -\frac{8}{4}(x+4)$$
$$y - 3 = -2(x+4)$$
$$y - 3 = -2x - 8$$
$$2x + y + 5 = 0 \qquad (y = -2x - 5)$$

b) Pisteet ovat $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ja $(-\sqrt{6}, \sqrt{3})$.

Koska pisteiden y-koordinaatit ovat samat, on suora vaakasuora. Siis suoran yhtälö on $y = \sqrt{3}$ $\quad (y - \sqrt{3} = 0)$.

c) Pisteet ovat $(150, -100)$ ja $(150, 200)$.

Koska pisteiden x-koordinaatit ovat samat, on suora pystysuora ja sen yhtälö on $x = 150$ $\quad (x - 150 = 0)$.

Vastaus a) $2x + y + 5 = 0$ b) $y = \sqrt{3}$ c) $x = 150$

426

Origon kautta kulkevan suoran yhtälö on muotoa $y = kx$.

a) Suora ei ole pystysuora, joten suoran kulmakerroin on suuntakulman tangentti.

$$k = \tan\alpha \qquad \big|\ \alpha = 0^\circ$$
$$k = \tan 0^\circ$$
$$k = 0$$

Suoran yhtälö on

$$y = 0x$$
$$y = 0 \quad (x\text{-akselin yhtälö})$$

b) Suora ei ole pystysuora, joten suoran kulmakerroin on suuntakulman tangentti.

$$k = \tan\alpha \qquad \big|\ \alpha = 30^\circ$$
$$k = \tan 30^\circ$$
$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Suoran yhtälö on

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \qquad \left(x - \sqrt{3}y = 0\right)$$

c) Koska suora on pystysuora, ei suoralla ole kulmakerrointa. Suoran yhtälö on

$$x = x_0 \qquad \big|\ x_0 = 0$$
$$x = 0 \quad (y\text{-akselin yhtälö})$$

Vastaus a) $y = 0$ b) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ c) $x = 0$

427

Piste $(x_0, y_0) = (1, -2)$

a)

$$k = \tan\alpha \qquad \big|\ \alpha = 45^\circ$$
$$k = \tan 45^\circ \qquad \big|\ \tan 45^\circ = 1$$
$$k = 1$$

Suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y + 2 = 1 \cdot (x - 1)$$
$$y + 2 = x - 1$$
$$x - y - 3 = 0 \qquad (y = x - 3)$$

b)

$$k = \tan\alpha \qquad \big|\ \alpha = -45^\circ$$
$$k = \tan(-45^\circ) \qquad \big|\ \tan(-45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$
$$k = -1$$

Suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y + 2 = -1 \cdot (x - 1)$$
$$y + 2 = -x + 1$$
$$x + y + 1 = 0 \qquad (y = -x - 1)$$

c) Koska suuntakulma $\alpha = 0^\circ$, niin suora on vaakasuora ja sen yhtälö on muotoa $y = y_0$. Siis suoran yhtälö on $y = -2$.

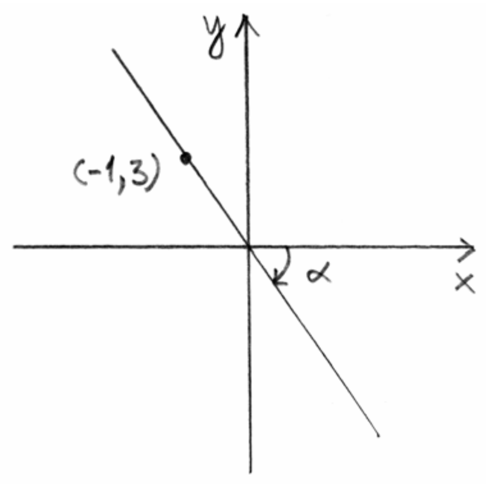
Vastaus a) $x - y - 3 = 0$ b) $x + y + 1 = 0$ c) $y = -2$

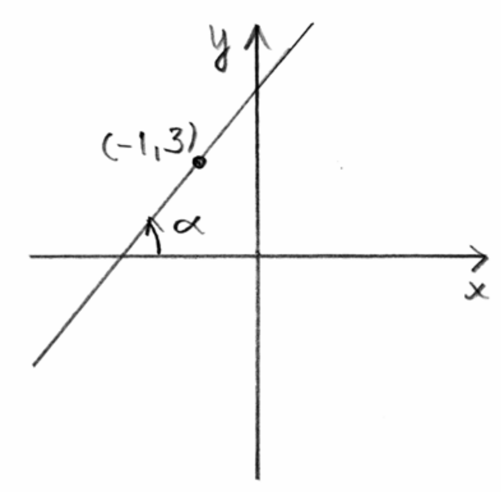
428

Suoran piste on $(-1,3)$.

Suoran ja x-akselin välinen kulma on 60°, joten suoran suuntakulma α on -60° tai 60°.

I **II**





I $\alpha = -60^\circ$

Suoran kulmakerroin on $k = \tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

Suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| k = -\sqrt{3},\ (x_0, y_0) = (-1,3) \right.$$

$$y - 3 = -\sqrt{3}(x+1)$$

$$y = -\sqrt{3}x + 3 - \sqrt{3} \qquad \left(\sqrt{3}x + y - 3 + \sqrt{3} = 0\right)$$

II $\alpha = 60^\circ$

Suoran kulmakerroin on $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

Suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| k = \sqrt{3},\ (x_0, y_0) = (-1,3) \right.$$

$$y - 3 = \sqrt{3}(x+1)$$

$$y = \sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3} \qquad \left(\sqrt{3}x - y + 3 + \sqrt{3} = 0\right)$$

Vastaus $y = \sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3}$ $\quad \left(\sqrt{3}x - y + 3 + \sqrt{3} = 0\right)$

tai

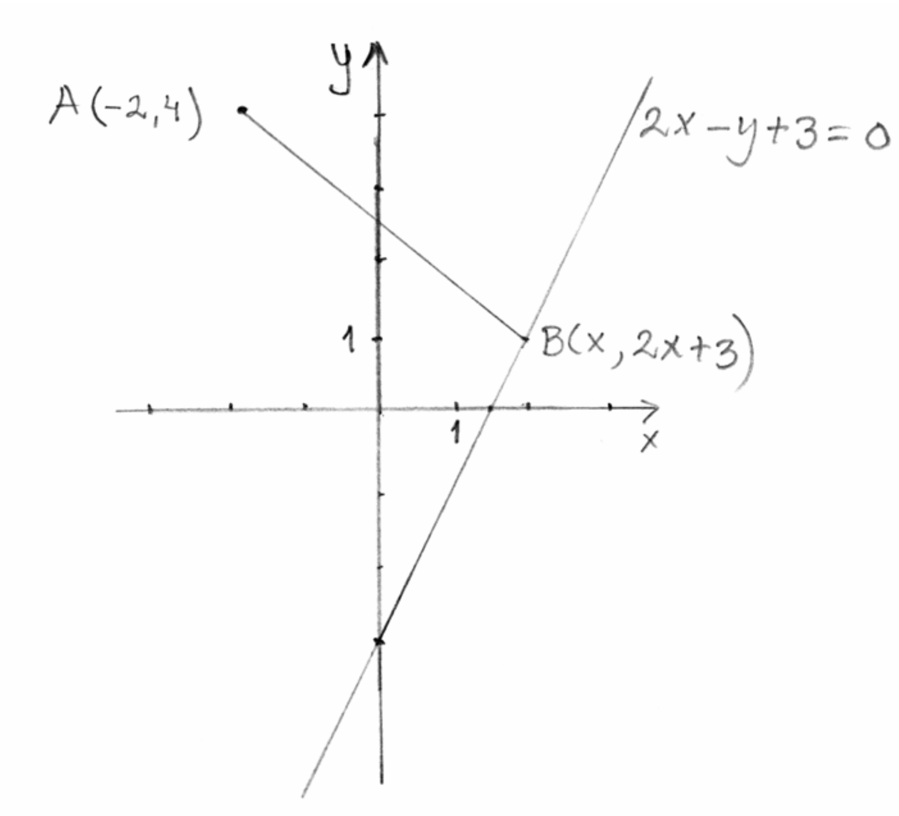
$y = -\sqrt{3}x + 3 - \sqrt{3}$ $\quad \left(\sqrt{3}x + y - 3 + \sqrt{3} = 0\right)$

429

Olkoon $A=(-2,4)$ ja suoralla oleva piste $B=(x,y)$.

Koska piste B on suoralla, niin y-koordinaatti saadaan suoran yhtälöstä

$$2x-y+3=0$$
$$y=2x+3$$



Janan AB pituus on

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \left| \begin{array}{l} |AB|=5\sqrt{2} \\ (x_1,y_1)=(-2,4) \\ (x_2,y_2)=(x,2x+3) \end{array} \right.$$

$$5\sqrt{2}=\sqrt{(x-(-2))^2+(2x+3-4)^2}$$

$$\underbrace{5\sqrt{2}}_{\geq 0}=\underbrace{\sqrt{(x+2)^2+(2x-1)^2}}_{\geq 0} \quad |(\ )^2$$

$$25\cdot 2=(x+2)^2+(2x-1)^2$$

$$50=x^2+4x+4+4x^2-4x+1$$

$$5x^2=45 \quad |:5$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

Kun $x=3$, niin

$$y=2\cdot 3+3=9$$

Kun $x=-3$, niin

$$y=2\cdot(-3)+3=-3$$

Siis piste B on $(3,9)$ tai $(-3,-3)$

Vastaus Suoralla olevat pisteet ovat $(3,9)$ ja $(-3,-3)$.

430

a)

$$y = -2x + 3$$

$$2x + y - 3 = 0$$

b)

$$x = 5$$

$$x - 5 = 0$$

c)

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \qquad \Big| \cdot 6$$

$$6y = 2x + 3$$

$$2x - 6y + 3 = 0$$

Vastaus a) $2x + y - 3 = 0$ b) $x - 5 = 0$ c) $2x - 6y + 3 = 0$

431

a)

$$3x + y - 7 = 0$$

$$y = -3x + 7$$

b)

$$2x - 9y + 8 = 0$$

$$-9y = -2x - 8 \qquad \Big| : (-9)$$

$$y = \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$$

c)

$$y - 6 = 0$$

$$y = 6$$

d)

$$x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

Vastaus a) $y = -3x + 7$ b) $y = \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$ c) $y = 6$ d) $x = -4$

432

a)

$$y=\frac{3+2x}{4}$$
$$y=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}x$$
$$k=\frac{1}{2}$$
$$\tan\alpha=k$$
$$\tan\alpha=\frac{1}{2}$$
$$\alpha=26{,}56...^\circ\approx 27^\circ$$

b)

$$2x+3y+9=0$$
$$3y=-2x-9$$
$$y=-\frac{2}{3}x-3$$
$$k=-\frac{2}{3}$$
$$\tan\alpha=-\frac{2}{3}$$
$$\alpha=-33{,}69...^\circ\approx -34^\circ$$

c)

$$6y=7$$
$$y=\frac{7}{6}$$

Suora on x-akselin suuntainen, joten

$$k=0$$
$$\tan\alpha=0$$
$$\alpha=0^\circ$$

d)

$$3+2x=0$$
$$2x=-3$$
$$x=-\frac{3}{2}$$

Suora on y-akselin suuntainen, joten suoralla
ei ole kulmakerrointa.
Koska suora on pystysuora, on suuntakulma $\alpha=90^\circ$.

Vastaus
a) $k=\frac{1}{2}$, $\alpha=27^\circ$
b) $k=-\frac{2}{3}$, $\alpha=-34^\circ$
c) $k=0$, $\alpha=0^\circ$
d) ei kulmakerrointa, $\alpha=90^\circ$

433

Suora $7x-3y-8=0$

a) Sijoitetaan pisteen $(-5,-9)$ koordinaatit suoran $7x-3y-8=0$ yhtälöön.

Yhtälön vasen puoli on

$$7\cdot(-5)-3\cdot(-9)-8=-35+27-8=-16$$

Yhtälön oikea puoli on $0\neq -16$

Siis piste ei ole suoralla.

b) Sijoitetaan pisteen $(5,9)$ koordinaatit suoran $7x-3y-8=0$ yhtälöön.

Yhtälön vasen puoli on

$$7\cdot 5-3\cdot 9-8=35-27-8=0$$

Yhtälön oikea puoli on 0.

Siis piste on suoralla.

Vastaus a) ei b) on

434

Olkoon $A=(18,-21)$, $B=(-15,-6)$ ja $C=(40,-31)$.

Pisteiden x-koordinaatit ovat erisuuret, joten *A*, *B* ja *C* eivät ole samalla pystysuoralla eivätkä pareittain samalla pystysuoralla.
Pisteet ovat samalla suoralla täsmälleen silloin, kun pisteiden *A* ja *B* sekä *A* ja *C* kautta kulkevien suorien kulmakertoimet ovat samat.
Pisteiden *A* ja *B* kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \left| \begin{array}{l} (x_1,y_1)=A=(18,-21) \\ (x_2,y_2)=B=(-15,-6) \end{array} \right.$$

$$=\frac{-6-(-21)}{-15-18}=\frac{-6+21}{-33}=\frac{15}{-33}^{(3}=-\frac{5}{11}$$

Pisteiden *A* ja *C* kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k_{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \left| \begin{array}{l} (x_1,y_1)=A=(18,-21) \\ (x_2,y_2)=C=(40,-31) \end{array} \right.$$

$$=\frac{-31-(-21)}{40-18}=\frac{-31+21}{22}=-\frac{10}{22}^{(2}=-\frac{5}{11}$$

Koska $k_{AB}=k_{AC}$, ovat pisteet *A*, *B* ja *C* samalla suoralla.

Vastaus ovat

435

a) $P_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}\right)$

Suora kulkee origon kautta, joten yhtälö on muotoa $y = kx$.
Koska suora kulkee myös pisteen P_1 kautta, toteuttavat sen koordinaatit $x = -\frac{2}{3}$ ja $y = -\frac{4}{5}$ yhtälön $y = kx$.

Siis

$$-\frac{4}{5} = k \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$k = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{2}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{6}{5}$$

Suoran yhtälö on

$$y = \frac{6}{5}x \qquad | \text{ ratkaistu muoto}$$

$$6x - 5y = 0 \qquad | \text{ yleinen muoto}$$

b) $P_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$

Lasketaan origon ja pisteen P_2 kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 = 0,\ y_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = \frac{3}{5} \end{array} \right.$$

$$k = \frac{\frac{3}{5} - 0}{-\frac{1}{2} - 0} = -\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 1} = -\frac{6}{5} \neq \frac{6}{5}, \text{ joten ei kulje}$$

Vastaus a) $y = \frac{6}{5}x$ b) ei

436

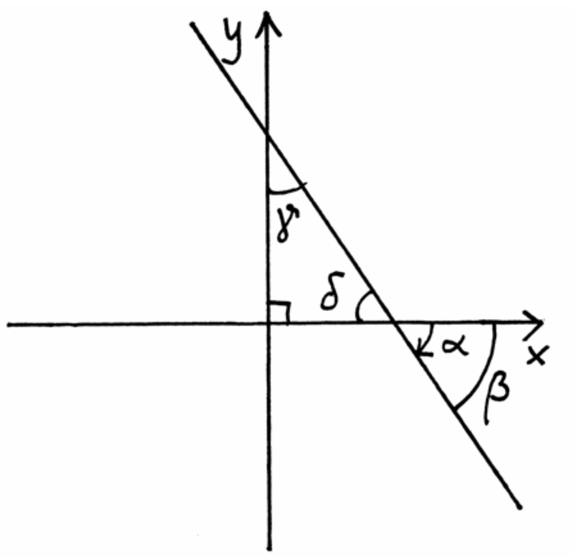
Suoran $2x + y - 3 = 0$ eli $y = -2x + 3$ kulmakerroin on $k = -2$.
Suoran suuntakulma saadaan yhtälöstä

$$k = \tan\alpha \qquad \left| k = -2 \right.$$

$$\tan\alpha = -2$$

$$\alpha = -63{,}43...^\circ$$

Olkoon suoran ja x-akselin välinen kulma β sekä suoran ja y-akselin välinen kulma γ.



Kulma β on

$$\beta = |\alpha| = 63{,}43...^\circ \approx 63^\circ$$

Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \delta \qquad \left| \begin{array}{l} \delta = \beta = 63{,}43...^\circ \\ \text{ristikulmat} \end{array} \right.$$

$$= 180^\circ - 90^\circ - 63{,}43...^\circ$$

$$= 26{,}56...^\circ$$

$$\approx 27^\circ$$

Vastaus x-akselin 63° kulmassa ja
y-akselin 27° kulmassa

437

Olkoon pisteen $(1,-4)$ kautta kulkeva suora l, jonka kulmakerroin $k=\tan\alpha=\frac{3}{2}$.

Tapa 1
Suoran yhtälö:

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad \left|\, x_0=1,\ y_0=-4,\ k=\frac{3}{2}\right.$$

$$y-(-4)=\frac{3}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}-4$$

$$y=\frac{3}{2}x-5\frac{1}{2}$$

Tutkitaan kulkeeko suora l pisteen $(53,74)$ kautta.

Kun $x=53$, niin suoran yhtälöstä saadaan

$$y=\frac{3}{2}\cdot 53-5\frac{1}{2}=74$$

Suora l kulkee siis pisteen $(53,74)$ kautta.

Tapa 2
Lasketaan kulmakerroin suoralle, joka kulkee pisteiden $A=(1,-4)$ ja $B=(53,74)$ kautta.

$$k_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-4-74}{1-53}=\frac{-78}{-52}=\frac{3}{2} \quad \text{eli} \quad k_{AB}=k$$

Suora kulkee siis pisteen $(53,74)$ kautta.

Vastaus on

438

Suora

$$a^2x - ay - 8a - 7 = 0$$

Piste $(-3,-2a)$ on suoralla, joten pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön.

$$a^2 \cdot (-3) - a(-2a) - 8a - 7 = 0$$
$$-3a^2 + 2a^2 - 8a - 7 = 0$$
$$-a^2 - 8a - 7 = 0 \qquad \Big| \cdot (-1)$$
$$a^2 + 8a + 7 = 0$$

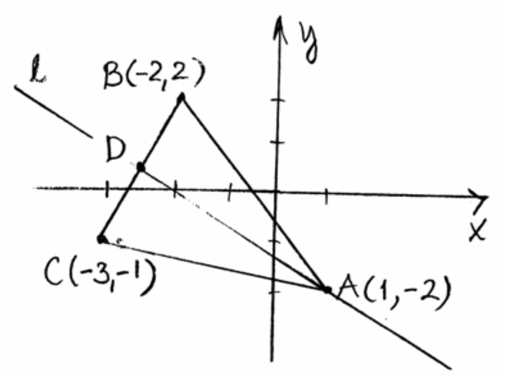
$$a = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$$
$$a = \frac{-8 \pm 6\sqrt{36}}{2}$$
$$a = \frac{-8 \pm 6}{2}$$
$$a = -7 \text{ tai } a = -1$$

Vastaus $\quad a = -7$ tai $a = -1$

439

$A = (1,-2)$, $B = (-2,2)$ ja $C = (-3,-1)$

Sivun BC keskipiste olkoon D.



$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}$$
$$y_k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Siis $D = \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Suoran l yhtälö on

$$y + 2 = \frac{\frac{1}{2} + 2}{-\frac{5}{2} - 1}(x - 1)$$
$$y + 2 = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{7}{2}}(x - 1)$$
$$y + 2 = -\frac{5}{7}(x - 1) \qquad \Big| \cdot 7$$
$$7y + 14 = -5x + 5$$
$$5x + 7y + 9 = 0$$

Vastaus $\quad 5x + 7y + 9 = 0$

440

Esitetään suoran yhtälö ratkaistussa muodossa.

$$k^2x + kx - y + 1 = 0$$

$$(k^2 + k)x - y + 1 = 0$$

$$y = (k^2 + k)x + 1$$

Suoran kulmakerroin on $k^2 + k$.

a) Suora on nouseva, jos kulmakerroin on positiivinen.

$$k^2 + k > 0$$

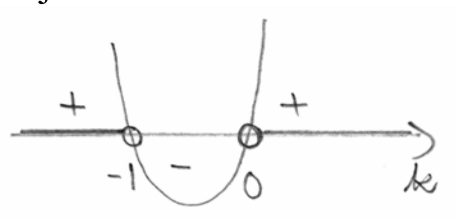
Nollakohdat:

$$k^2 + k = 0$$

$$k(k+1) = 0$$

$$k = 0 \text{ tai } k = -1$$

Kuvaaja:



Siis $k^2 + k > 0$, kun $k < -1$ tai $k > 0$

b) Suora on laskeva, kun kulmakerroin on negatiivinen.
Edellä olevasta kuvaajasta saadaan

$$k^2 + k < 0, \text{ kun } -1 < k < 0$$

c) Suora on vaakasuora, kun kulmakerroin on nolla.

$$k^2 + k = 0$$

$$k(k+1) = 0$$

$$k = 0 \text{ tai } k = -1$$

Vastaus a) $k < -1$ tai $k > 0$
b) $-1 < k < 0$
c) $k = -1$ tai $k = 0$

441

Koska x ilmoittaa fahrenheitasteet ja y celsiusasteet, saadaan koordinaatiston pisteet $(212,100)$ ja $(32,0)$. Näiden pisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-100}{32-212}=\frac{-100}{-180}=\frac{5}{9}$$

Suoran yhtälö:

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad \Big| \; x_1=32,\ y_1=0,\ k=\frac{5}{9}$$

$$y-0=\frac{5}{9}(x-32)$$

$$y=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9}$$

$$y=\frac{5}{9}x-17\frac{7}{9}$$

Kun $x=451$, niin

$$y=\frac{5}{9}\cdot 451-17\frac{7}{9}=\frac{2255}{9}-\frac{160}{9}=\frac{2095}{9}=232\frac{7}{9}$$

Siis $451\,^\circ\mathrm{F}=232\frac{7}{9}\,^\circ\mathrm{C}$

Vastaus $y=\frac{5}{9}x-17\frac{7}{9}$, missä x on lämpötila fahrenheitasteina ja y celsiusasteina.

$451\,^\circ\mathrm{F}=232\frac{7}{9}\,^\circ\mathrm{C}$

442

Pisteet A, B ja C eivät ole samalla pystysuoralla suoralla, sillä pisteiden B ja C x-koordinaatit ovat eri suuret.
Oletetaan, että $-t\neq 3$ eli $t\neq -3$.
Merkitään pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerrointa k_{AB} :lla ja pisteiden B ja C kautta kulkevan suoran kulmakerrointa k_{BC} :llä .

$$k_{AB}=\frac{-4-(t-5)}{-t-3}=\frac{-4-t+5}{-t-3}=\frac{1-t}{-(t+3)}=\frac{t-1}{t+3},\ t\neq -3$$

$$k_{BC}=\frac{t-5-(-4)}{3-2}=\frac{t-5+4}{1}=t-1$$

Pisteet ovat samalla suoralla, jos $k_{AB}=k_{BC}$.

Saadaan yhtälö

$$\frac{t-1}{t+3}=t-1 \qquad \big|\, t\neq -3$$

$$t-1=t^2-t+3t-3$$

$$t^2+t-2=0$$

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$$

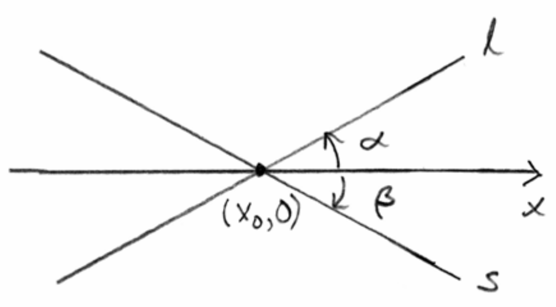
$$t=\frac{-1\pm 3}{2}$$

$t=-2$ tai $t=1$ kelpaavat

Vastaus $t=-2$ tai $t=1$

443

Olkoon suora $l:\ y = ax + b,\ a \neq 0$ ja
suora $s: y = cx + d,\ c \neq 0$.
Koska kulmakertoimet eroavat nollasta, $k_1 = a \neq 0$ ja $k_2 = c \neq 0$,
sekä lisäksi x-akseli puolittaa suorien välisen kulman, on toinen suorista nouseva ja toinen laskeva.
Merkitään suoran *l* suuntakulmaa α:lla ja suoran *s* suuntakulmaa β:lla. Olkoon nousevana suorana suora *l*.



Suuntakulmat toteuttavat ehdon

$$\alpha = -\beta \qquad \left| \begin{array}{l} x\text{-akseli puolittaa} \\ \text{suorien välisen kulman} \end{array} \right.$$

Siis suorien kulmakertoimet ovat toistensa vastalukuja eli

$$k_2 = -k_1 \qquad \left| \begin{array}{l} k_1 = a \\ k_2 = c \end{array} \right.$$

$$c = -a$$

Suorien on lisäksi leikattava x-akselilla eli suorien on kuljettava jonkin pisteen $(x_0, 0)$ kautta.

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 0 = ax_0 + b \\ 0 = cx_0 + d \end{cases} \qquad \Big| \text{ sijoitetaan } c = -a$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} 0 = \ \ ax_0 + b \\ 0 = -ax_0 + d \end{cases} \\ + & \\ \hline & 0 = 0 + b + d \end{array}$$

$$b + d = 0$$

$$d = -b$$

Vastaus $\quad c = -a$ ja $d = -b$

444

$$A=\left(3,-\frac{1}{2}\right)$$

Suora $3x-2y=0$ eli $y=\frac{3}{2}x$.

Olkoon $B=(x_0,y_0)$

Koska piste B on suoralla $3x-2y=0$, niin $y_0=\frac{3}{2}x_0$.

Pisteen B etäisyys origosta on

$$|OB|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{3}{2}x_0\right)^2}=\sqrt{x_0^2+\frac{9}{4}x_0^2}$$

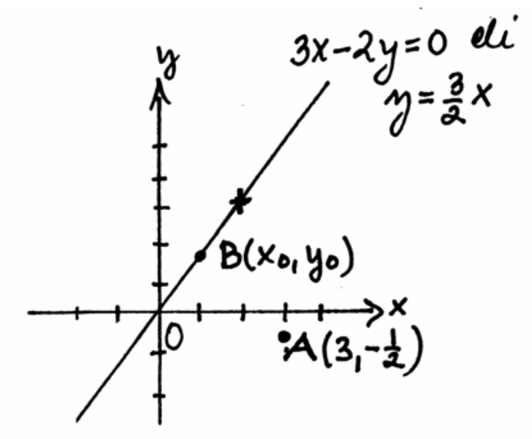
$$=\sqrt{\frac{13}{4}x_0^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}|x_0|$$

Toisaalta $|OB|=\frac{\sqrt{13}}{2}$, joten

$$\frac{\sqrt{13}}{2}|x_0|=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$|x_0|=1$$

$$x_0=\pm 1$$



Koska x_0 on I neljänneksessä, on

$x_0=1$ | sijoitus yhtälöön $y=\frac{3}{2}x$

$$y_0=\frac{3}{2}$$

Siis $B=\left(1,1\frac{1}{2}\right)$.

Suoran l yhtälö on

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad \left|\begin{array}{l}(x_1,y_1)=\left(3,-\frac{1}{2}\right)\\ (x_2,y_2)=\left(1,1\frac{1}{2}\right)\end{array}\right.$$

$$y+\frac{1}{2}=\frac{1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-3}(x-3)$$

$$y+\frac{1}{2}=\frac{2}{-2}(x-3)$$

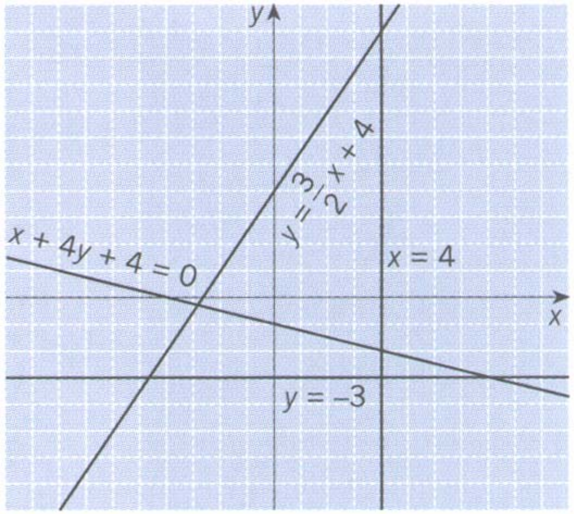
$$y+\frac{1}{2}=-x+3 \qquad |\cdot 2$$

$$2y+1=-2x+6$$

$$2x+2y-5=0$$

Vastaus $2x+2y-5=0$

445



a) Suora $y = \frac{3}{2}x + 4$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0,4)$.

Koska kulmakerroin $k = \frac{3}{2}$, niin x-koordinaatin muutosta $\Delta x = 2$ vastaa y-koordinaatin muutos $\Delta y = 3$.
Siirtymällä pisteestä $(0,4)$ kaksi yksikköä oikealle ja kolme yksikköä ylös saadaan suoran piste $(2,7)$. Suora kulkee siis pisteiden $(0,4)$ ja $(2,7)$ kautta.

b) Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0,-3)$.
Koska $y = -3$ aina, on suora vaakasuora.

c) Määritetään suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

$$x = 0: \quad 0 + 4y + 4 = 0$$
$$4y = -4$$
$$y = -1$$

Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0,-1)$.

$$y = 0: x + 4 \cdot 0 + 4 = 0$$
$$x = -4$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(-4,0)$.
Suora kulkee siis pisteiden $(0,-1)$ ja $(-4,0)$ kautta.

d) Koska $x = 4$ aina, on suora pystysuora.
Se leikkaa x-akselin pisteessä $(4,0)$.

445

b) Suora l: $2x-5y=2000$

Kun $x=0$, niin

$$2\cdot 0-5y=2000$$

$$-5y=2000 \quad |:(-5)$$

$$y=-400$$

Suora l leikkaa y-akselin pisteessä $(0,-400)$.

Kun $y=0$, niin

$$2x-5\cdot 0=2000$$

$$2x=2000 \quad |:2$$

$$x=1000$$

Suora l leikkaa x-akselin pisteessä $(1000,0)$.

Suora s: $x+4y-2000=0$

Kun $x=0$, niin

$$0+4y-2000=0$$

$$4y=2000 \quad |:4$$

$$y=500$$

Suora s leikkaa y-akselin pisteessä $(0,500)$.

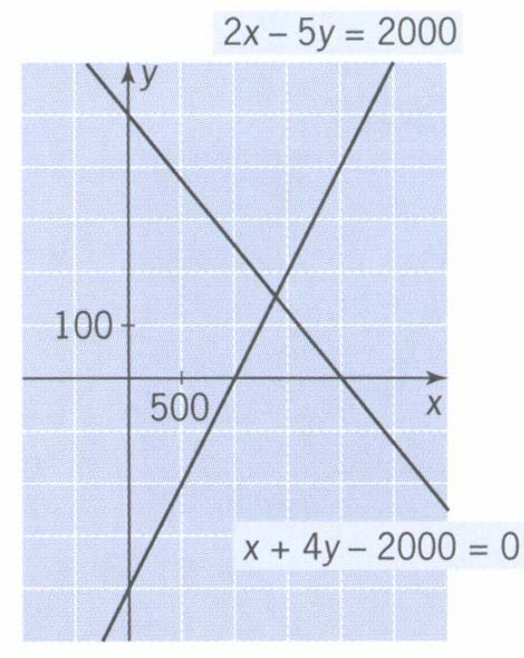
Kun $y=0$, niin

$$x+4\cdot 0-2000=0$$

$$x=2000$$

Suora s leikkaa x-akselin pisteessä $(2000,0)$.

Valitaan koordinaatistossa x-akselille pituusyksiköksi 500 ja y-akselille 100.



446

a)

$$2x + y = 0$$
$$y = -2x$$

Koska suoran yhtälö on muotoa $y = kx$, niin suora kulkee origon kautta.
Suoran jokin toinen piste saadaan antamalla x:lle esimerkiksi arvo $x = -1$. Tällöin $y = -2 \cdot (-1) = 2$.
Siis toinen piste on $(-1, 2)$.

b)

$$2y = -7 - 4x \quad |:2$$
$$y = -2x - \frac{7}{2}$$

Määritetään kaksi suoran pistettä.

x	$y = -2x - \frac{7}{2}$	(x, y)
0	$-2 \cdot 0 - \frac{7}{2} = -3\frac{1}{2}$	$\left(0, -3\frac{1}{2}\right)$
-2	$-2 \cdot (-2) - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$	$\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

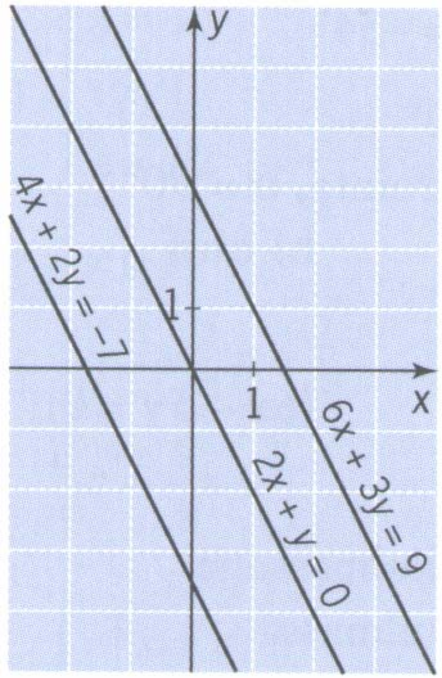
c)

$$6x + 3y = 9$$
$$3y = 9 - 6x \quad |:3$$
$$y = -2x + 3$$

Suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet:

$x = 0$: $\quad y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$ eli piste $(0, 3)$

$y = 0$: $\quad 0 = -2x + 3$
$$2x = 3$$
$$x = 1\frac{1}{2} \text{ eli piste } \left(1\frac{1}{2}, 0\right)$$



Vastaus Suorat ovat yhdensuuntaiset.

447

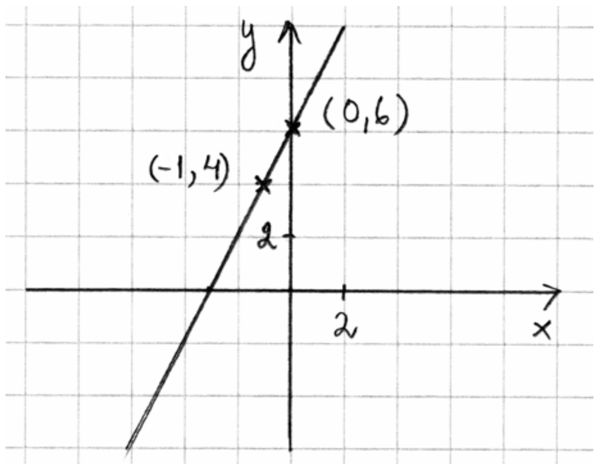
Koska tehtävässä on annettu käyrän tyyppi (suora), ei ole välttämätöntä esittää suoran yhtälöä ratkaistussa tai yleisessä muodossa, sillä suoran piirtämiseen riittää tuntea sen kaksi pistettä.
Suoran yhtälö parametrimuodossa on

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Suoran piirtämistä varten määritetään sen kaksi pistettä.

Kun $t = 0$, niin $x = -1$ ja $y = 4$ eli piste $(-1, 4)$

Kun $t = 1$, niin $x = 0$ ja $y = 6$ eli piste $(0, 6)$



Toinen tapa:
Määritetään suoran yhtälö ratkaistussa muodossa eliminoimalla parametri *t*.

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 4 \end{cases}$$

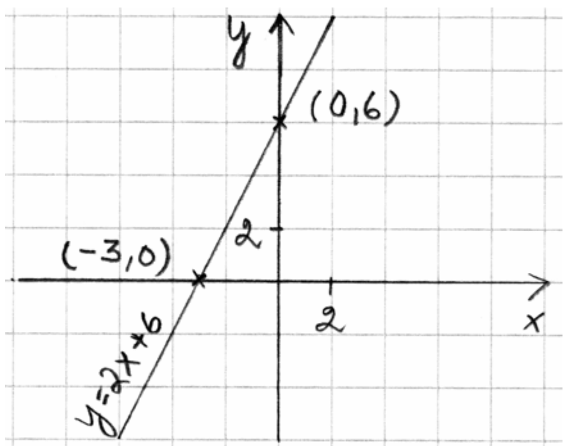
$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} t = x + 1 \\ y = 2t + 4 \end{cases} \quad \Big| \text{ sijoitetaan alempaan yhtälöön}$$

$$y = 2(x + 1) + 4$$
$$y = 2x + 2 + 4$$
$$y = 2x + 6$$

Piirretään suora saadun yhtälön $y = 2x + 6$ avulla.

Kun $x = 0$, niin $y = 6$ eli piste $(0, 6)$.

Kun $y = 0$, niin $x = -3$ eli piste $(-3, 0)$.



448

Koska tehtävässä ei ole ilmoitettu käyrän tyyppiä, ei käyrää voida piirtää antamalla *t*:lle arvoja.
Esitetään parametrimuotoinen käyrän yhtälö yleisessä muodossa eliminoimalla parametri *t*.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x=3t+2\\y=1-6t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$

$$(1)\quad x=3t+2$$

$$3t=x-2 \qquad |:3$$

$$t=\frac{x-2}{3} \qquad |\text{sijoitus yhtälöön } (2)$$

$$y=1-\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{x-2}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$

$$y=1-2(x-2)$$

$$y=1-2x+4$$

$$2x+y-5=0$$

Saatu yhtälö esittää suoraa.
Lasketaan suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

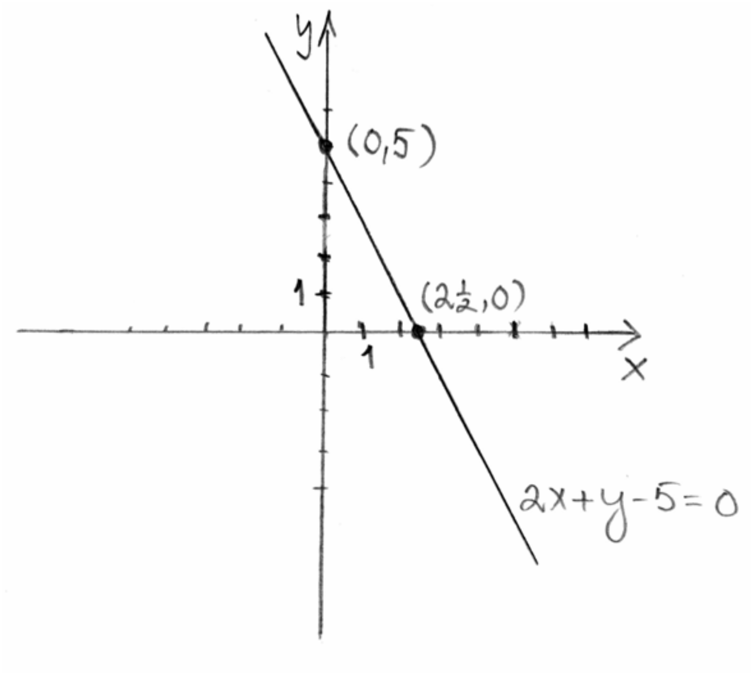
$$x=0:\ 2\cdot0+y-5=0$$

$$y=5 \qquad \text{Piste } (0,5)$$

$$y=0:\quad 2x+0-5=0$$

$$2x=5$$

$$x=2\frac{1}{2} \quad \text{Piste } \left(2\frac{1}{2},0\right)$$



449

a) Poistetaan itseisarvomerkit määritelmän mukaan.

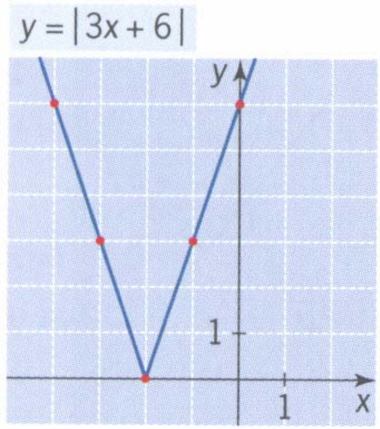
$$y=|3x+6|$$
$$=\begin{cases}3x+6, & \text{kun } 3x+6\geq 0\\ -3x-6, & \text{kun } 3x+6<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}3x+6, & \text{kun } 3x\geq -6\\ -3x-6, & \text{kun } 3x<-6\end{cases}$$
$$=\begin{cases}3x+6, & \text{kun } x\geq -2\\ -3x-6, & \text{kun } x<-2\end{cases}$$

1) Alue $x<-2$
Annetaan x:lle arvoja $x<-2$ ja lasketaan vastaavat y:n arvot. Lisäksi annetaan x:lle arvo $x=-2$, mutta sitä vastaava piste ei kuulu kuvaajaan $y=-3x-6,\ x<-2$.

x	$y=-3x-6$	(x,y)
-2	0	$(-2,0)$
-3	3	$(-3,3)$
-4	6	$(-4,6)$

2) Alue $x\geq -2$
Annetaan x:lle arvoja $x\geq -2$ ja lasketaan vastaavat y:n arvot

x	$y=3x+6$	(x,y)
-2	0	$(-2,0)$
-1	3	$(-1,3)$
0	6	$(0,6)$



b) Poistetaan itseisarvomerkit määritelmän mukaan.

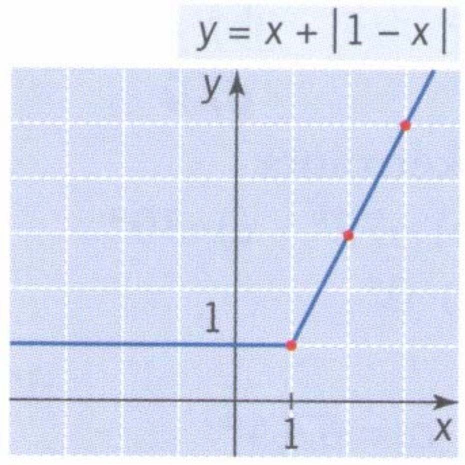
$$y=x+|1-x|$$
$$=\begin{cases}x+1-x, & \text{kun } 1-x\geq 0\\ x-1+x, & \text{kun } 1-x<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, & \text{kun } x\leq 1\\ 2x-1, & \text{kun } x>1\end{cases}$$

1) Alue $x\leq 1$
Yhtälön $y=1$ kuvaajana on puolisuora, jonka päätepisteenä on $(1,1)$.

2) Alue $x > 1$

Annetaan x:lle arvoja, $x > 1$, ja lasketaan vastaavat y:n arvot. Lisäksi annetaan x:lle arvo $x = 1$, mutta sitä vastaava piste ei kuulu kuvaajaan $y = 2x - 1,\ x > 1$.

x	$y = 2x - 1$	(x, y)
1	1	$(1,1)$
2	3	$(2,3)$
3	5	$(3,5)$



c)

$$|x - 3| + y - 2 = 0$$

$$y = -|x - 3| + 2$$

Poistetaan itseisarvomerkit määritelmän mukaan.

$$y = -|x - 3| + 2$$

$$= \begin{cases} -(x-3) + 2, & \text{kun } x - 3 \geq 0 \\ -[-(x-3)] + 2, & \text{kun } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x + 3 + 2, & \text{kun } x \geq 3 \\ x - 3 + 2, & \text{kun } x < 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x + 5, & \text{kun } x \geq 3 \\ x - 1, & \text{kun } x < 3 \end{cases}$$

1) Alue $x < 3$

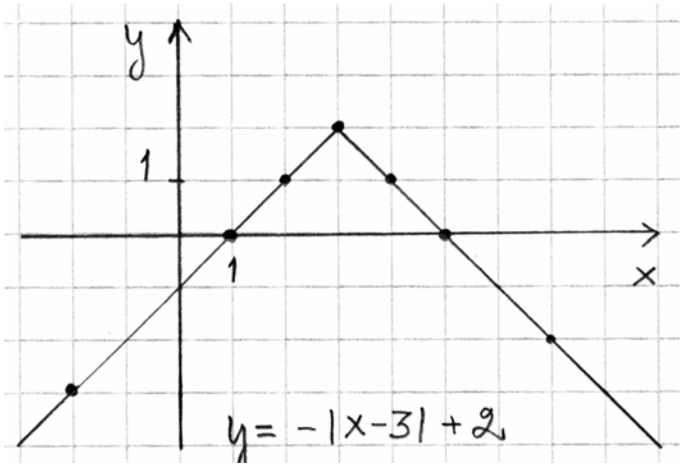
x	$y = x - 1$	(x, y)
3	2	$(3,2)$
2	1	$(2,1)$
1	0	$(1,0)$
–2	–3	$(-2,-3)$

Piste $(3,2)$ ei kuulu kuvaajaan $y = x - 1$, jossa $x < 3$.

2) Alue $x \geq 3$

x	$y = -x + 5$	(x, y)
3	2	$(3,2)$
4	1	$(4,1)$
5	0	$(5,0)$
7	–2	$(7,-2)$

Piste $(3,2)$ kuuluu kuvaajaan $y = -x + 5$, jossa $x \geq 3$.

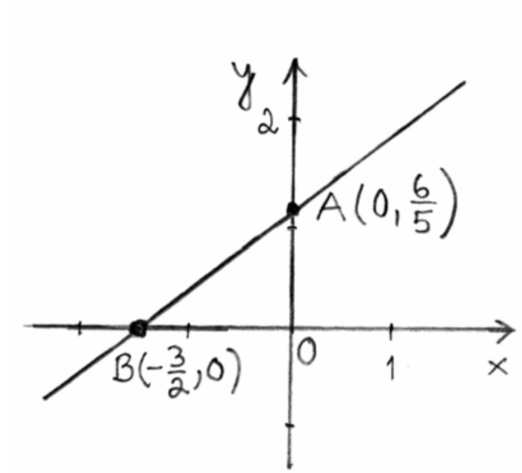


450

Olkoon origo O.
Lasketaan suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet A ja B.
Kun $x=0$, niin

$$\begin{aligned} 4\cdot 0-5y&=0 \\ -5y&=-6 \\ y&=\frac{6}{5} \end{aligned}$$

Siis $A=\left(0,\frac{6}{5}\right)$.



Kun $y=0$, niin

$$\begin{aligned} 4x-5\cdot 0+6&=0 \\ 4x&=-6 \\ x&=-\frac{6}{4} \\ x&=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Siis $B=\left(-\frac{3}{2},0\right)$

Suorakulmaisen kolmion ABO kateetit ovat

$$OA=|y|=\frac{6}{5}$$

$$OB=|x|=\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$$

Kolmion ala on

$$\begin{aligned} \frac{OA\cdot OB}{2}&=\frac{\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{2}}{2} \\ &=\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 3}{5\cdot 2\cdot \cancel{2}} \\ &=\frac{9}{10}=0{,}9\ \left(\mathrm{m}^2\right) \end{aligned}$$

451

Suora

$$kx + y + 3 = 0$$

$$y = -kx - 3,\ k \neq 0$$

Jos $k = 0$, ei muodostu kolmiota.

Leikkauskohta x-akselilla:

$$y = 0$$

$$0 = -kx - 3$$

$$kx = -3$$

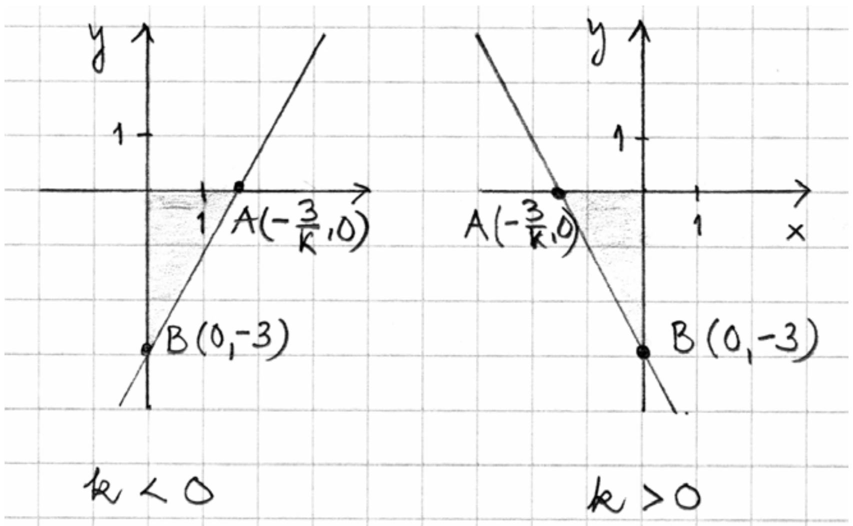
$$x = -\frac{3}{k} \qquad A = \left(-\frac{3}{k}, 0\right)$$

Leikkauskohta y-akselilla:

$$x = 0$$

$$y = -3 \qquad B = (0, -3)$$

Kerroin k voi olla negatiivinen tai positiivinen.



Kolmion sivujen pituudet ovat

$$OA = \left|-\frac{3}{k} - 0\right| = \left|\frac{3}{k}\right|$$

$$OB = |-3 - 0| = |-3| = 3$$

Kolmion OBA ala on 3, joten saadaan yhtälö

$$\frac{OA \cdot OB}{2} = 3$$

$$\frac{\left|\frac{3}{k}\right| \cdot 3}{2} = 3 \qquad |:3$$

$$\frac{\left|\frac{3}{k}\right|}{2} = 1 \qquad |\cdot 2$$

$$\left|\frac{3}{k}\right| = 2$$

$$\frac{3}{|k|} = 2$$

$$|k| = \frac{3}{2}$$

$$k = \pm\frac{3}{2}$$

I $k=-\dfrac{3}{2}$

Suoran yhtälö on

$$-\frac{3}{2}x+y+3=0 \quad \Big| \cdot(-2)$$
$$3x-2y-6=0$$

II $k=\dfrac{3}{2}$

Suoran yhtälö on

$$\frac{3}{2}x+y+3=0 \quad \Big| \cdot 2$$
$$3x+2y+6=0$$

Vastaus $3x+2y+6=0$ tai $3x-2y-6=0$

452

Suoran yhtälö ratkaistussa muodossa on

$$y=kx+b \quad \Big| k=-1$$
$$y=-x+b$$

Olkoon suoran ja x-akselin leikkauspiste A.

$$y=0: \quad 0=-x+b$$
$$x=b$$

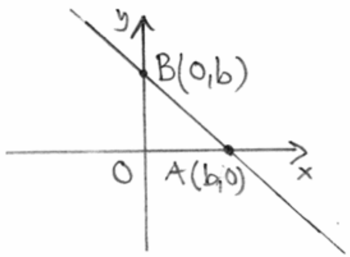
Siis $A=(b,0)$

Olkoon suoran ja y-akselin leikkauspiste B.

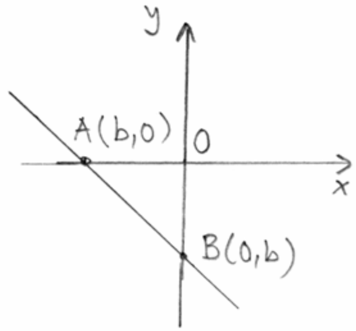
$$x=0: \quad y=0+b=b$$

Siis $B=(0,b)$

Koska $b>0$ tai $b<0$, saadaan kaksi tapausta:



tai



Kummassakin tapauksessa $OA=|b|$ ja $OB=|b|$

Kolmion ala on

$$\frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{|b| \cdot |b|}{2} = \frac{b^2}{2}$$

Siis

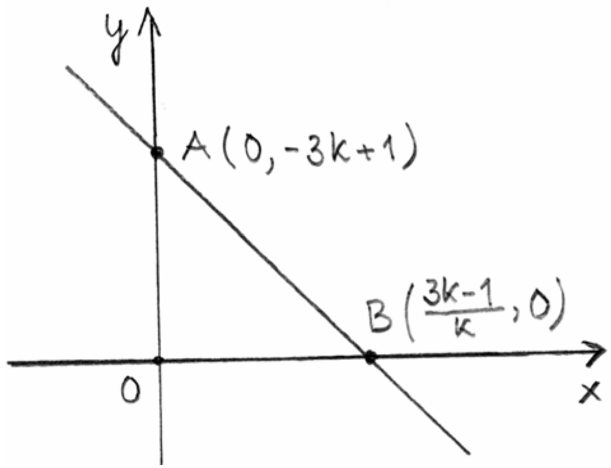
$$\frac{b^2}{2} = 18$$
$$b^2 = 36$$
$$b = \pm 6$$

Suoran yhtälö on

$$y = -x + 6 \text{ tai } y = -x - 6$$
$$(x + y - 6 = 0 \text{ tai } x + y + 6 = 0)$$

Vastaus $y = -x + 6$ tai $y = -x - 6$

453



Pisteen $(3,1)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - 1 = k(x - 3) \qquad |\, k \neq 0$$
$$y = kx - 3k + 1$$

Tapauksessa $k = 0$ ei synny kolmiota.

Lasketaan suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet A ja B.

$x = 0$: $\quad y = k \cdot 0 - 3k + 1$

$\quad y = -3k + 1$

Piste A on $\quad A = (0, -3k + 1)$

$y = 0$: $\quad kx - 3k + 1 = 0$

$$x = \frac{3k - 1}{k}$$

Piste B on $\quad B = \left(\frac{3k - 1}{k}, 0\right)$

Suorakulmaisen kolmion OBA kateetit ovat

$$OA = |-3k+1| \text{ ja } OB = \left|\frac{3k-1}{k}\right|$$

Kolmion pinta-ala on $\frac{OA \cdot OB}{2}$, joten saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2}|-3k+1|\left|\frac{3k-1}{k}\right| = 6 \qquad |\cdot 2$$

$$\left|(-3k+1)\left(\frac{3k-1}{k}\right)\right| = 12$$

$$\left|\frac{-9k^2+6k-1}{k}\right| = 12$$

$$\frac{-9k^2+6k-1}{k} = \pm 12$$

I

$$\frac{-9k^2+6k-1}{k} = 12 \qquad |\cdot k,\ k \neq 0$$

$$-9k^2+6k-1 = 12k$$

$$-9k^2-6k-1 = 0$$

$$k = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot(-9)\cdot(-1)}}{2\cdot(-9)}$$

$$k = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{-18}$$

$$k = -\frac{1}{3}$$

II

$$\frac{-9k^2+6k-1}{k} = -12 \qquad |\cdot k,\ k \neq 0$$

$$-9k^2+18k-1 = 0$$

$$k = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot(-9)\cdot(-1)}}{2\cdot(-9)}$$

$$k = \frac{-18 \pm \sqrt{324-36}}{-18}$$

$$k = \frac{-18 \pm \sqrt{288}}{-18}$$

$$k = \frac{-18 \pm \sqrt{144\cdot 2}}{-18}$$

$$k = \frac{-18 \pm 12\sqrt{2}}{-18}$$

$$k = \frac{-6\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)}{-18}$$

$$k = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$$

Vastaus $\quad k = -\frac{1}{3}$ tai $k = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$

454

Olkoon paine *p* ja syvyys *s*.

Paine on suoraan verrannollinen syvyyteen, joten

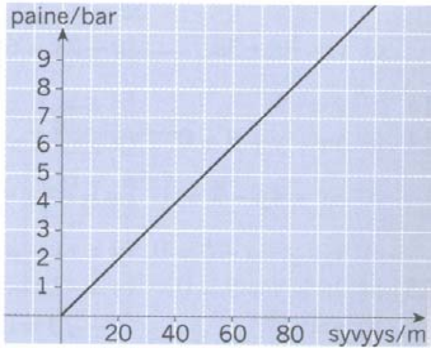
$$p = ks \qquad \big|\, k \neq 0, k \text{ on vakio}$$

$$k = \frac{p}{s} \qquad \big|\, p = 1,\ s = 10$$

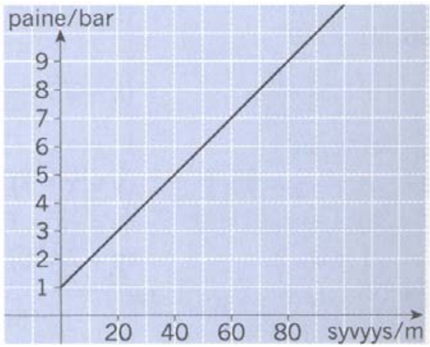
$$k = \frac{1}{10}$$

a) $p = \frac{1}{10}s$ b) $p = \frac{1}{10}s + 1$

a)



b)



455

Ratkaistaan yhtälö y:n suhteen.

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c$$

1) Jos $b \neq 0$, niin saadaan

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Tämä suora on nouseva suora, jos a ja b ovat erimerkkiset.

Tämä suora on laskeva suora, jos a ja b ovat samanmerkkiset.

– Jos ehdon $b \neq 0$ lisäksi $a = 0$, niin saadaan vaakasuora suora

$$y = -\frac{c}{b}$$

– Jos ehdon $b \neq 0$ lisäksi $a \neq 0$ ja $c = 0$, saadaan origon kautta kulkeva suora

$$y = -\frac{a}{b}x$$

2) Jos $b = 0$, niin saadaan

$$0 \cdot y = -ax - c$$

$$ax = -c$$

– Jos ehdon $b = 0$ lisäksi $a \neq 0$, niin saadaan pystysuora suora

$$x = -\frac{c}{a}$$

– Jos ehdon $b = 0$ lisäksi $a = 0$, niin

$$0 \cdot x = -c$$
$$c = 0$$

Tällöin yhtälö $ax + by + c = 0$ on aina tosi, joten yhtälön toteuttavat kaikki tason pisteet.

– Jos ehtojen $b = 0$ ja $a = 0$ lisäksi $c \neq 0$, niin yhtälö $ax + by + c = 0$ on aina epätosi. Siis yhtälöllä ei ole kuvaajaa.

Vastaus Yhtälön kuvaaja on suora

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, kun $b \neq 0$.

Yhtälön kuvaaja on suora

$x = -\frac{c}{a}$, kun $a \neq 0$ ja $b = 0$.

Yhtälöllä ei ole kuvaajaa, kun $a = 0$, $b = 0$ ja $c \neq 0$.

Yhtälön kuvaaja on koko *xy*-taso, kun $a = 0$, $b = 0$ ja $c = 0$.