Pyramidi 4 Luku 5

22.2.2006	Ensimmäinen julkaistu versio
7.5.2006	Korjattu tehtävän 506 vastaus

501

Yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla suorien yhtälöiden muodostama yhtälöpari.

a)

$$\begin{cases} 2x-6y+3=0 \\ -x+3y+2=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases} 2x-6y+3=0 \\ -2x+6y+4=0 \end{cases}$$

$$7=0 \qquad \text{aina epätosi}$$

Yhtälöparilla ei ole ratkaisua, joten suorilla ei ole yhteisiä pisteitä.

b)

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} 6x+2y-12=0 \\ y=-3x+6 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$\begin{aligned} 6x+2(-3x+6)-12&=0 \\ 6x-6x+12-12&=0 \\ 0&=0 \qquad \text{aina tosi} \end{aligned}$$

Suorat ovat sama suora, joten yhteisinä pisteinä ovat kaikki suoran $y=-3x+6$ pisteet eli pisteet (x,y), missä $x\in\mathbb{R}$ ja $y=-3x+6$.

Yhteiset pisteet voidaan esittää myös parametrimuodossa

$$\begin{cases} x=t \\ y=-3t+6 \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

c)

$$\begin{cases} 2x-3y-7=0 \\ 3x+4y-2=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot(-3) \\ \cdot 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases} -6x+9y+21=0 \\ 6x+8y-4=0 \end{cases} \qquad +\begin{cases} 8x-12y-28=0 \\ 9x+12y-6=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 17y+17&=0 \\ y&=-\frac{17}{17} \\ y&=-1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 17x-34&=0 \\ x&=\frac{34}{17} \\ x&=2 \end{aligned}$$

Suorien yhteinen piste on $(2,-1)$.

Vastaus a) ei yhteisiä pisteitä

b) $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=-3x+6 \end{cases}$

c) $(2,-1)$

502

a)

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} y = -3x \\ 14x + 3y = 500 \end{cases} \quad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$\begin{aligned} 14x + 3\cdot(-3x) &= 500 \\ 5x &= 500 \\ x &= 100 \quad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1). \end{aligned}$$

$$y = -3x = -3\cdot 100 = -300$$

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 100 \\ y = -300 \end{cases}$, joten suorien yhteinen piste on $(100, -300)$.

b)

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} x - 4y + 1 = 0 \\ y = \dfrac{1}{4}x - 1 \end{cases} \quad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$\begin{aligned} x - 4\left(\frac{1}{4}x - 1\right) + 1 &= 0 \\ x - x + 4 + 1 &= 0 \\ 5 &= 0 \quad \text{aina epätosi} \end{aligned}$$

Yhtälöparilla ei ole ratkaisua, joten suorilla ei ole yhteisiä pisteitä.

c)

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 2\dfrac{1}{2}x = 1\dfrac{1}{2} - y \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 5x = 3 - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$$

Suorat ovat sama suora, joten yhteisiä pisteitä ovat kaikki suoran $5x + 2y = 3$ pisteet eli pisteet (x, y), missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y = -2\dfrac{1}{2}x + 1\dfrac{1}{2}$.

Yhteiset pisteet voidaan esittää myös parametrimuodossa

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2\dfrac{1}{2}t + 1\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Vastaus
a) $(100, -300)$
b) ei yhteisiä pisteitä
c) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2\dfrac{1}{2}x + 1\dfrac{1}{2} \end{cases}$

503

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ y = -3x \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Koska yhtälöitä on kolme ja muuttujia vain kaksi, muodostetaan yhtälöryhmä valitsemalla siihen esimerkiksi yhtälöt (1) ja (2). Saadaan yhtälöpari

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ y = -3x \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$2x - (-3x) + 5 = 0$$
$$5x + 5 = 0$$
$$x = -\frac{5}{5}$$
$$x = -1 \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$y = -3 \cdot (-1) = 3$$

Tarkistetaan toteuttaako saatu ratkaisu $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ myös yhtälön (3).

Yhtälön (3) $x + y = 2$

vasen puoli on	$-1 + 3 = 2$
oikea puoli on	2

Koska yhtälö (3) toteutuu, on yhtälöryhmän ratkaisu $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$,

joten suorat leikkaavat toisensa pisteessä $(-1, 3)$.

Vastaus Leikkauspiste on $(-1, 3)$.

504

Kolmion kärkipisteiden koordinaatit saadaan määrittämällä suorien leikkauspisteet.

1) Suorien $6x+y+19=0$ ja $y=-x+1$ leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}6x+y+19=0 \\ y=-x+1\end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$\begin{aligned}6x-x+1+19&=0\\5x+20&=0\\x&=-4 \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).\end{aligned}$$

$$y=-(-4)+1=5$$

Suorien leikkauspiste on $(-4,5)$.

2) Suorien $y=-x+1$ ja $3x-2y-8=0$ leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}y=-x+1 \\ 3x-2y-8=0\end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (3).$$

$$\begin{aligned}3x-2(-x+1)-8&=0\\3x+2x-2-8&=0\\5x-10&=0\\x&=2 \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).\end{aligned}$$

$$y=-2+1=-1$$

Suorien leikkauspiste on $(2,-1)$.

3) Suorien $6x+y+19=0$ ja $3x-2y-8=0$ leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}6x+y+19=0 \\ 3x-2y-8=0\end{cases} \quad \begin{vmatrix}\cdot 1\\ \cdot(-2)\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}\cdot 2\\ \cdot 1\end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases}6x+y+19=0\\-6x+4y+16=0\end{cases} \qquad +\begin{cases}12x+2y+38=0\\3x-2y-8=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}5y+35&=0 & \qquad 15x+30&=0\\y&=-7 & x&=-2\end{aligned}$$

Suorien leikkauspiste on $(-2,-7)$.

Vastaus Kolmion kärkipisteet ovat $(-4,5)$, $(2,-1)$ ja $(-2,-7)$.

505

Määritetään suorien leikkauspisteet.

1)

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}y=2x-1\\x-y=0\end{cases}\qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$x-(2x-1)=0$$
$$x-2x+1=0$$
$$x=1 \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$y=2\cdot 1-1=1$$

Suorien leikkauspiste on $A=(1,1)$.

2)

$$\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}y=2x-1\\3x+y+6=0\end{cases}\qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (3).$$

$$3x+2x-1+6=0$$
$$x=-\frac{5}{5}=-1 \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$y=2\cdot(-1)-1=-3$$

Suorien leikkauspiste on $B=(-1,-3)$.

3)

$$+\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}x-y=0\\3x+y+6=0\end{cases}$$
$$\overline{4x\qquad+6=0}$$

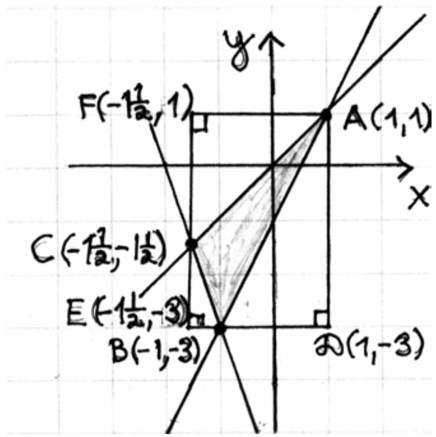
$$x=-\frac{6}{4}=-1\frac{1}{2} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$-1\frac{1}{2}-y=0$$

$$y=-1\frac{1}{2}$$

Suorien leikkauspiste on $C=\left(-1\frac{1}{2},-1\frac{1}{2}\right)$.

Piirretään mallikuva, jossa kolmion *ABC* ympärille on piirretty suorakulmio *AFED*.



Kolmion ABC ala saadaan vähentämällä suorakulmion *AFED* alasta suorakulmaisten kolmioiden *CEB*, *BDA* ja *AFC* alat.

Sivun DA pituus on

$$|DA| = |\triangle y| = |y_A - y_D| = |1-(-3)| = 4$$

Sivun ED pituus on

$$|ED| = |\triangle x| = |x_D - x_E| = \left|1-\left(-1\frac{1}{2}\right)\right| = 2\frac{1}{2}$$

Vastaavasti saadaan

$$|AF| = |ED| = 2\frac{1}{2}$$

$$|FC| = |\triangle y| = \left|1-\left(-1\frac{1}{2}\right)\right| = 2\frac{1}{2}$$

$$|CE| = |\triangle y| = \left|-1\frac{1}{2}-(-3)\right| = 1\frac{1}{2}$$

$$|EB| = |\triangle x| = \left|-1\frac{1}{2}-(-1)\right| = \frac{1}{2}$$

$$|BD| = |\triangle x| = |-1-1| = 2$$

Kolmion ABC ala on

$$A_{ABC} = A_{AFED} - A_{CEB} - A_{BDA} - A_{AFC}$$

$$= 4\cdot 2\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}}{2} - \frac{2\cdot 4}{2} - \frac{2\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{2}}{2}$$

$$= 10 - \frac{3}{8} - 4 - \frac{25}{8} = 6 - \frac{28}{8} = 2\frac{1}{2}$$

Vastaus Kolmion ala on $2\frac{1}{2}$.

506

Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{3-(-2)}{4-(-3)} = \frac{5}{7}$$

ja suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left|\, (x_0, y_0) = (-3,-2),\ k = \frac{5}{7}\right.$$

$$y + 2 = \frac{5}{7}(x+3)$$

$$y + 2 = \frac{5}{7}x + \frac{15}{7}$$

$$y = \frac{5}{7}x + \frac{1}{7}$$

Pisteiden C ja D kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{7-6}{3-(-5)} = \frac{1}{8}$$

ja suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left|\, (x_0, y_0) = (-5,6),\ k = \frac{1}{8}\right.$$

$$y - 6 = \frac{1}{8}(x+5)$$

$$y - 6 = \frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$$

$$y = \frac{1}{8}x + 6\frac{5}{8}$$

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} (1)\quad y = \frac{5}{7}x + \frac{1}{7} \\ (2)\quad y = \frac{1}{8}x + 6\frac{5}{8} \end{cases} \qquad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$\frac{5}{7}x + \frac{1}{7} = \frac{1}{8}x + 6\frac{5}{8}$$

$$^{8)}\frac{5}{7}x - {}^{7)}\frac{1}{8}x = {}^{7)}\frac{53}{8} - {}^{8)}\frac{1}{7}$$

$$\frac{40-7}{56}x = \frac{371-8}{56} \qquad |\cdot 56$$

$$33x = 363$$

$$x = \frac{363}{33} = 11 \qquad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

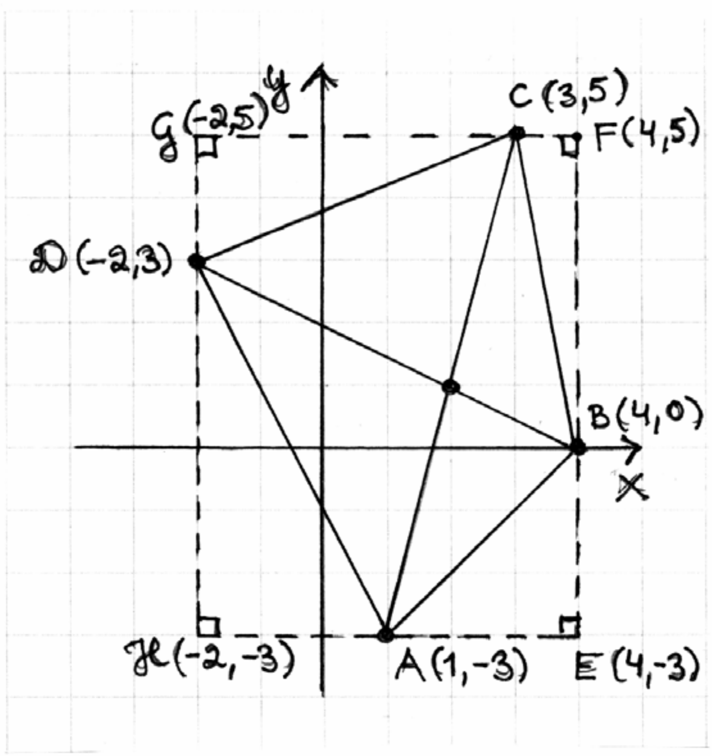
$$y = \frac{1}{8}\cdot 11 + 6\frac{5}{8} = \frac{11}{8} + \frac{53}{8} = \frac{64}{8} = 8$$

Suorat leikkaavat pisteessä $(11,8)$.

Vastaus Suorien leikkauspiste on $(11,8)$.

507

Piirretään mallikuva, jossa on piirrettynä nelikulmion *ABCD* lävistäjät ja nelikulmion ympärille piirretty suorakulmio *EFGH*.



Lävistäjien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla suorien l_{AC} ja l_{BD} yhtälöiden muodostama yhtälöpari.

Määritetään suorien l_{AC} ja l_{BD} yhtälöt.

1) Suoran l_{AC} kulmakerroin on

$$k_{AC}=\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x}=\frac{5-(-3)}{3-1}=4$$

Suoran yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0) \quad \Big| (x_0,y_0)=(3,5),\ k=4$$

$$y-5=4(x-3)$$

$$y=4x-7$$

2) Suoran l_{BD} kulmakerroin on

$$k_{BD}=\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x}=\frac{3-0}{-2-4}=-\frac{1}{2}$$

Suoran yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0) \quad \Big| (x_0,y_0)=(4,0),\ k=-\frac{1}{2}$$

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-4)$$

$$y=-\frac{1}{2}x+2$$

Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}y=4x-7\\ y=-\dfrac{1}{2}x+2\end{cases} \quad \Big| \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$4x-7=-\frac{1}{2}x+2$$

$$4\frac{1}{2}x=9$$

$$x=2 \quad \Big| \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$y=4\cdot 2-7=1$$

Lävistäjien leikkauspiste on siis $(2,1)$.

Nelikulmion *ABCD* ala saadaan vähentämällä suorakulmion *EFGH* alasta suorakulmaisten kolmioiden *AEB*, *BFC*, *CGD* ja *DHA* alat.

Määritetään sivujen pituudet.

$$|HE|=|\vartriangle x|=|4-(-2)|=6$$

$$|EF|=|\vartriangle y|=|5-(-3)|=8$$

$$|AE|=|\vartriangle x|=|4-1|=3$$

$$|EB|=|\vartriangle y|=|0-(-3)|=3$$

$|BF| = |\triangle y| = |5-0| = 5$

$|FC| = |\triangle x| = |3-4| = 1$

$|GC| = |\triangle x| = |3-(-2)| = 5$

$|DG| = |\triangle y| = |5-3| = 2$

$|HD| = |\triangle y| = |3-(-3)| = 6$

$|HA| = |\triangle x| = |1-(-2)| = 3$

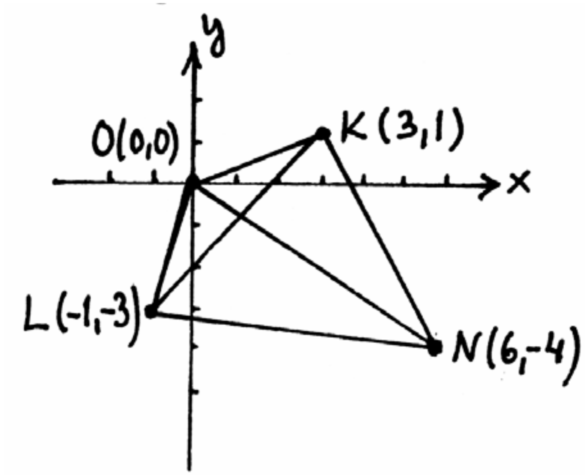
Nelikulmion *ABCD* ala on

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= A_{EFGH} - A_{AEB} - A_{BFC} - A_{CGD} - A_{DHA} \\ &= 6\cdot 8 - \frac{3\cdot 3}{2} - \frac{5\cdot 1}{2} - \frac{5\cdot 2}{2} - \frac{6\cdot 3}{2} \\ &= 48 - 4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} - 5 - 9 = 27 \end{aligned}$$

Vastaus Nelikulmion lävistäjien leikkauspiste on $(2,1)$ ja pinta-ala on 27.

508

Piirretään mallikuva, jossa Onnela valitaan koordinaatiston origoksi ja ruudun sivu vastaa yhtä kilometriä.



Määritetään pisteiden *L* ja *K* sekä pisteiden *O* ja *N* kautta kulkevien suorien yhtälöt.

Suoran l_{LK} kulmakerroin on

$$k = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1-(-3)}{3-(-1)} = 1,$$

Suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \qquad \big|\, (x_0, y_0) = (-1,-3),\ k = 1 \\ y + 3 &= x + 1 \\ y &= x - 2 \end{aligned}$$

Suoran l_{ON} yhtälö on muotoa

$$y = kx \quad \big| (x, y) = (6, -4)$$
$$-4 = k \cdot 6$$
$$k = -\frac{2}{3}$$

Siis suoran yhtälö on

$$y = -\frac{2}{3}x$$

Polut leikkaavat suorien l_{LK} ja l_{ON} leikkauspisteessä.

Määritetään leikkauspisteen koordinaatit ratkaisemalla suorien yhtälöiden muodostama yhtälöpari.

$$\begin{aligned}(1)\ &\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases} && \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2). \\ (2)\ & \end{aligned}$$

$$x - 2 = -\frac{2}{3}x$$
$$x + \frac{2}{3}x = 2$$
$$\frac{5}{3}x = 2 \quad \Big| : \frac{5}{3}$$
$$x = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

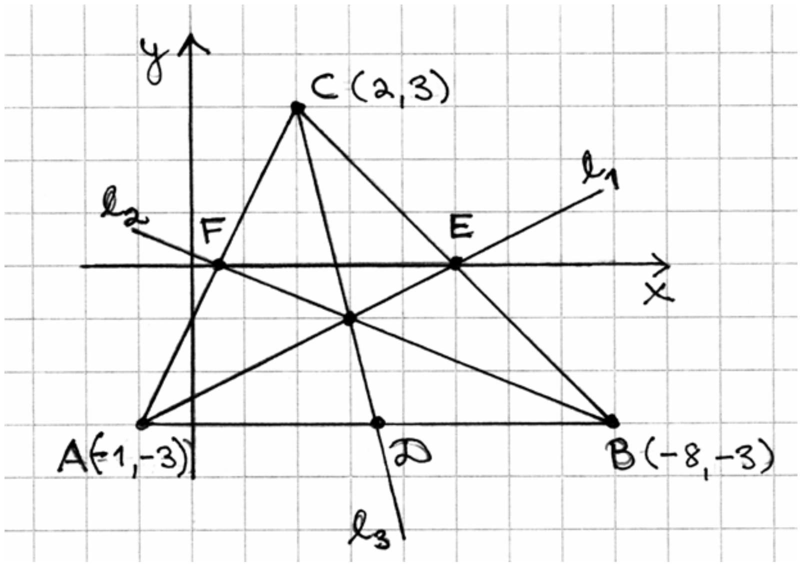
$$y = 1\frac{1}{5} - 2 = -\frac{4}{5}$$

Suorien l_{LK} ja l_{ON} leikkauspiste on $\left(1\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, joten origosta on kuljettava $1\frac{1}{5} = 1,2$ ruutua oikealle ja sitten $\frac{4}{5} = 0,8$ ruutua alas.

Vastaus Polut leikkaavat toisensa pisteessä, joka on Onnelasta 1,2 km itään ja sitten 0,8 km pohjoiseen.

509

Piirretään mallikuva.



Määritetään kolmion sivujen *AB*, *BC* ja *AC* keskipisteet *D*, *E* ja *F*.

Janan *AB* keskipisteen koordinaatit ovat

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+8}{2} = 3\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+(-3)}{2} = -3$$

Siis piste $D = \left(3\frac{1}{2}, -3\right)$.

Janan *BC* keskipisteen koordinaatit ovat

$$x = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{8+2}{2} = 5$$

$$y = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0$$

Siis piste $E = (5,0)$.

Janan *AC* keskipisteen koordinaatit ovat

$$x = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0$$

Siis piste $F = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Määritetään pisteiden *A* ja *E*, *B* ja *F* sekä *C* ja *D* kautta kulkevien suorien l_1, l_2 ja l_3 yhtälöt.

Kulmakertoimet ovat

$$k_{AE}=\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{y_A-y_E}{x_A-x_E}=\frac{-3-0}{-1-5}=\frac{1}{2}$$

$$k_{BF}=\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{y_B-y_F}{x_B-x_F}=\frac{-3-0}{8-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{5}$$

$$k_{CD}=\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D}=\frac{3-(-3)}{2-3\frac{1}{2}}=-4$$

Suorien yhtälöt ovat

$$l_1:\quad y-(-3)=\frac{1}{2}(x-(-1)) \qquad \left| \begin{array}{l} y-y_0=k(x-x_0) \\ k=\frac{1}{2},\ (x_0,y_0)=(-1,-3) \end{array} \right.$$

$$y+3=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \qquad |\cdot 2$$

$$2y+6=x+1$$

$$x-2y-5=0$$

$$l_2:\quad y-(-3)=-\frac{2}{5}(x-8) \qquad \left| \begin{array}{l} y-y_0=k(x-x_0) \\ k=-\frac{2}{5},\ (x_0,y_0)=(8,-3) \end{array} \right.$$

$$y+3=-\frac{2}{5}x+\frac{16}{5} \qquad |\cdot 5$$

$$5y+15=-2x+16$$

$$2x+5y-1=0$$

$$l_3:\quad y-3=-4(x-2) \qquad \left| \begin{array}{l} y-y_0=k(x-x_0) \\ k=-4,\ (x_0,y_0)=(2,3) \end{array} \right.$$

$$y-3=-4x+8$$

$$4x+y-11=0$$

Mediaanien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla suorien yhtälöiden muodostama yhtälöryhmä.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} x-2y-5=0 \\ 2x+5y-1=0 \\ 4x+y-11=0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 2 \end{array} \right.$$

$$+\begin{cases} -2x+4y+10=0 \\ 2x+5y-\ \ 1=0 \end{cases} \qquad +\begin{cases} 5x-10y-25=0 \\ 4x+10y-\ \ 2=0 \end{cases}$$

$$9y\ \ +9=0 \qquad\qquad 9x\ \ -27=0$$

$$y=-1 \qquad\qquad x=3$$

Tarkistetaan, toteuttaako saatu ratkaisu $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ myös yhtälön (3).

Yhtälön (3) $4x+y-11=0$

vasen puoli on $4\cdot 3-1-11=0$
oikea puoli on 0

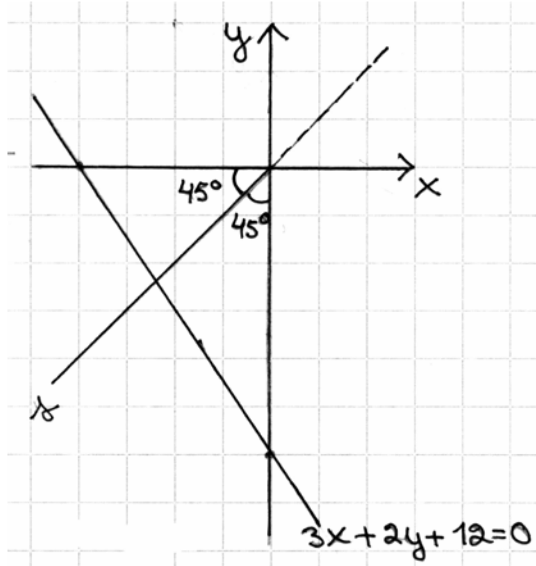
Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$, joten mediaanien leikkauspiste on $(3,-1)$.

Huomautus:
Olisi riittänyt tarkastella vain kahta mediaania, sillä kolmion kaikki mediaanit leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

Vastaus Mediaanien leikkauspiste on $(3,-1)$.

510

Piirretään mallikuva.



Kulmanpuolittajaa jatkamalla saadaan suora s, jonka suuntakulma on 45°. Suoran s kulmakerroin on

$k=\tan 45^\circ=1$.

Suora s kulkee origon kautta, joten sen yhtälö on $y=x$.

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} 3x+2y+12=0 \\ y=x \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$3x+2x+12=0$$
$$5x+12=0$$
$$x=-\frac{12}{5}=-2\frac{2}{5} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$y=-2\frac{2}{5}$$

Vastaus Pisteessä $\left(-2\frac{2}{5},-2\frac{2}{5}\right)$

511

Suoraparven yhteinen piste toteuttaa suoraparven kaikkien suorien yhtälöt.

Tapa 1

Suoraparven suorien yhteinen piste on suoraparven kahden mielivaltaisen suoran leikkauspiste.
Valitaan suoraparvesta kaksi suoraa ja lasketaan niiden leikkauspiste.

Kun $k=0$, saadaan suora $-4y+1=0$ eli $y=\frac{1}{4}$.

Kun $k=1$, saadaan suora $4x-4y+3=0$ eli $y=x+\frac{3}{4}$.

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4} & (1) \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2). \\ y=x+\frac{3}{4} & (2) \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}=x+\frac{3}{4}$$
$$x=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$$

Leikkauspiste on $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

On vielä osoitettava, että suoraparven kaikki suorat kulkevat pisteen $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, kautta. Osoitetaan, että pisteen $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ koordinaatit toteuttavat suoraparven yhtälön kaikilla parametrin k arvoilla.

Kun $x=-\frac{1}{2}$ ja $y=\frac{1}{4}$ suoraparven yhtälön

vasen puoli on $4\cdot k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-4\cdot\frac{1}{4}+2k+1$
$=-2k-1+2k+1=0$

oikea puoli on 0

Kaikki parven suorat kulkevat siis pisteen $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ kautta.

Tapa 2

Muunnetaan suoraparven yhtälö muotoon, jossa havaitaan sellainen piste (x,y), joka toteuttaa suoraparven yhtälön parametrin k arvosta riippumatta.

$$4kx-4y+2k+1=0$$
$$4kx+2k+1-4y=0$$
$$2k(2x+1)+(1-4y)=0$$

Yhtälö toteutuu kaikilla parametrin k arvoilla vain, kun

$2x+1=0$ ja $1-4y=0$ eli $x=-\frac{1}{2}$ ja $y=\frac{1}{4}$.

Tapa 3
Kun suoran kulmakerroin on k ja suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta, sen yhtälö on $y - y_0 = k(x - x_0)$. Muunnetaan suoraparven yhtälö tähän muotoon.

$$4kx - 4y + 2k + 1 = 0$$
$$-4y + 1 = -4kx - 2k \qquad |:(-4)$$
$$y - \frac{1}{4} = kx + \frac{k}{2}$$
$$y - \frac{1}{4} = k\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Suoraparven suorat kulkevat siis pisteen $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ kautta.

Vastaus Suoraparven suorat kulkevat pisteen $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ kautta.

512

Tapa 1

Todistus
Jos parven suorilla on yhteinen piste, niin se on välttämättä suoraparven kahden mielivaltaisen suoran leikkauspiste. Valitaan suoraparvesta kaksi suoraa ja lasketaan niiden leikkauspiste. Todistetaan lopuksi, että kaikki parven suorat kulkevat tämän pisteen kautta.

Kun $a = 0$, saadaan suora $y = 0 \cdot x - 6 \cdot 0 + 5$ eli $y = 5$.

Kun $a = 1$, saadaan suora $y = 2 \cdot 1 \cdot x - 6 \cdot 1 + 5$ eli $y = 2x - 1$.

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} y = 5 & \text{| Sijoitetaan yhtälöön } (2). \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$5 = 2x - 1 \text{ eli } x = 3$$

Leikkauspiste on $(3, 5)$.

On vielä osoitettava, että suoraparven kaikki suorat kulkevat pisteen $(3, 5)$ kautta. Osoitetaan siis, että pisteen $(3, 5)$ koordinaatit toteuttavat suoraparven yhtälön kaikilla parametrin a arvoilla.

Kun $x = 3$ ja $y = 5$, suoraparven yhtälön

vasen puoli on 5 ja
oikea puoli on $2 \cdot a \cdot 3 - 6a + 5 = 5$.

Kaikki suorat kulkevat siis pisteen $(3,5)$ kautta. □

Tapa 2

Todistus
Muunnetaan suoraparven yhtälö muotoon, josta havaitaan sellainen piste (x, y), joka toteuttaa suoraparven yhtälön parametrin a arvosta riippumatta.

$$\begin{aligned} y &= 2ax - 6a + 5 \\ 2ax - 6a + 5 - y &= 0 \\ a(2x-6) + (5-y) &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälö toteutuu kaikilla parametrin a arvoilla, kun
$2x - 6 = 0$ ja $5 - y = 0$ eli $x = 3$ ja $y = 5$.

Piste $(3,5)$ toteuttaa siis suoraparven yhtälön parametrin a arvosta riippumatta, joten kaikki parven suorat kulkevat pisteen $(3,5)$ kautta. □

Tapa 3

Todistus
Yhtälö $y - y_0 = k(x - x_0)$ esittää aina suoraa, jonka kulmakerroin on k ja joka kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta.

Muunnetaan suoraparven yhtälö tähän muotoon.

$$\begin{aligned} y &= 2ax - 6a + 5 \\ y - 5 &= 2ax - 6a \\ y - 5 &= 2a(x-3) \qquad \Big| \; y - y_0 = k(x - x_0) \end{aligned}$$

Yhtälö esittää suoraa, jonka kulmakerroin on aina $2a$ ja joka kulkee pisteen $(3,5)$ kautta. Koska piste $(3,5)$ ei riipu parametrin a arvosta, kaikki suoraparven suorat kulkevat saman pisteen kautta. □

513

Suorien yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla suorien yhtälöiden muodostama yhtälöpari.

$$+\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} ax + y = 5 \\ x - y = 5a \end{cases}$$

$$(a+1)x = 5 + 5a \qquad \Big| \; :(a+1),\ a \neq -1.$$

Tapaus $a = -1$
on tutkittava erikseen.

$$x = \frac{5+5a}{a+1}$$
$$x = \frac{5(1+a)}{a+1}$$
$$x = 5 \qquad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$
$$a \cdot 5 + y = 5$$
$$y = 5 - 5a$$

1) Jos $a \neq -1$, suorilla on siis vain yksi yhteinen piste.

2) Jos $a = -1$, niin alkuperäisistä yhtälöistä saadaan yhtälöpari

$$+\begin{cases} -x + y = 5 \\ x - y = -5 \end{cases}$$
$$0 = 0 \qquad \text{aina tosi}$$

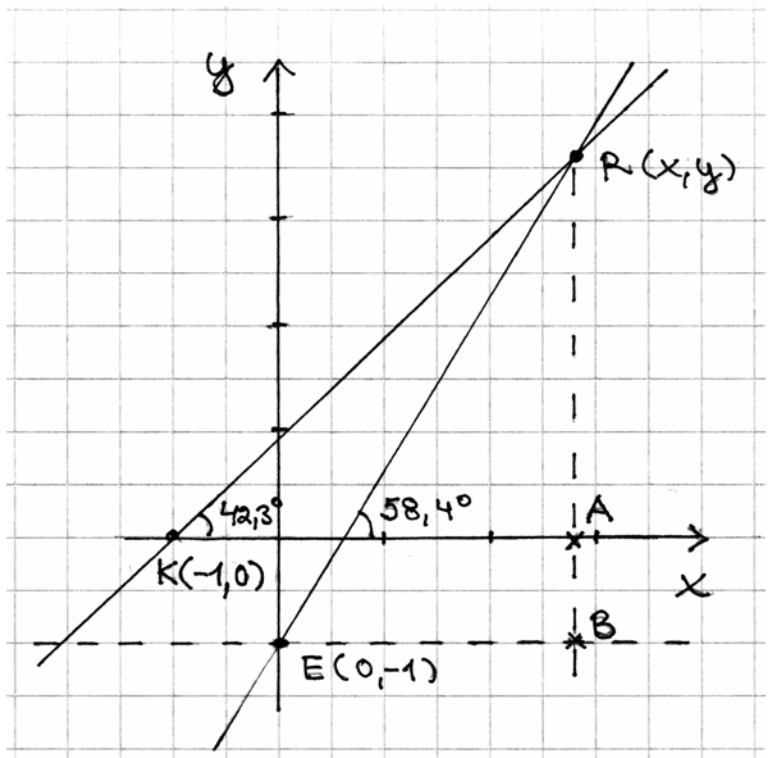
Siis suorat yhtyvät, eli niillä on vähintään kaksi yhteistä pistettä.

Suorilla on siis kaikilla vakion a arvoilla vähintään yksi yhteinen piste.

Vastaus a) ei millään vakion a arvolla
b) $a \neq -1$
c) $a = -1$

514

Piirretään tilanteesta mallikuva.



Suorakulmaisesta kolmiosta *KAR* saadaan

$$\frac{AR}{KA} = \tan 42{,}3^\circ \qquad \Big| A = (x, 0)$$
$$\frac{y-0}{x-(-1)} = \tan 42{,}3^\circ$$
$$y = \tan 42{,}3^\circ \cdot (x+1)$$

Vastaavasti suorakulmaisesta kolmiosta *EBR* saadaan

$$\frac{BR}{EB} = \tan 58{,}4^\circ \qquad \big| B = (x, -1)$$

$$\frac{y-(-1)}{x-0} = \tan 58{,}4^\circ$$

$$y = \tan 58{,}4^\circ \cdot x - 1$$

Suorien leikkauspiste R saadaan suorien yhtälöiden muodostaman yhtälöparin ratkaisuna.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} y = \tan 42{,}3^\circ \cdot (x+1) \\ y = \tan 58{,}4^\circ \cdot x - 1 \end{cases} \qquad \big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$\tan 42{,}3^\circ \cdot (x+1) = \tan 58{,}4^\circ \cdot x - 1$$

$$\tan 42{,}3^\circ \cdot x + \tan 42{,}3^\circ = \tan 58{,}4^\circ \cdot x - 1$$

$$x\left(\tan 42{,}3^\circ - \tan 58{,}4^\circ\right) = -\tan 42{,}3^\circ - 1$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\tan 42{,}3^\circ - 1}{\tan 42{,}3^\circ - \tan 58{,}4^\circ} \\ &= 2{,}66918... \\ &\approx 2{,}67 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Sijoittamalla muuttujan x arvo yhtälöön (2) saadaan

$$\begin{aligned} y &= \tan 58{,}4^\circ \cdot x - 1 \qquad \big| x = 2{,}66918... \\ &= 3{,}33870... \approx 3{,}34 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Leikkauspisteen koordinaattien likiarvot ovat $\begin{cases} x \approx 2{,}67 \\ y \approx 3{,}34 \end{cases}$,

joten rajapyykki sijaitsee likimain pisteessä $(2{,}67; 3{,}34)$.

b) Ketse kulkee matkan

$$|KR| = \sqrt{(x-(-1))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

nopeudella 5 km/h, joten hän käyttää rajapyykille kulkemiseen ajan (yksikkönä tunti)

$$\begin{aligned} t_K &= \frac{|KR|}{5} = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{5} \qquad \Big| \begin{matrix} x \approx 2{,}67 \text{ (km)} \\ y \approx 3{,}34 \text{ (km)} \end{matrix} \\ &\approx 0{,}992 \text{ (h)} \end{aligned}$$

Vastaavasti Eemeliltä kuluu matkaan ER aika

$$\begin{aligned} t_E &= \frac{|ER|}{8} = \frac{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}{8} \qquad \Big| \begin{matrix} x \approx 2{,}67 \text{ (km)} \\ y \approx 3{,}34 \text{ (km)} \end{matrix} \\ &\approx 0{,}637 \text{ (h)} \end{aligned}$$

Koska $t_E < t_K$, ehtii Eemeli rajapyykille ennen Ketseä.

Vastaus a) Rajapyykki on likimain pisteessä $(2{,}67; 3{,}34)$.
b) Eemeli on ensin perillä.

515

Määritetään pisteet, joissa suora $x+2y-3=0$ leikkaa koordinaattiakselit.

1) Suoran ja x-akselin leikkauspiste

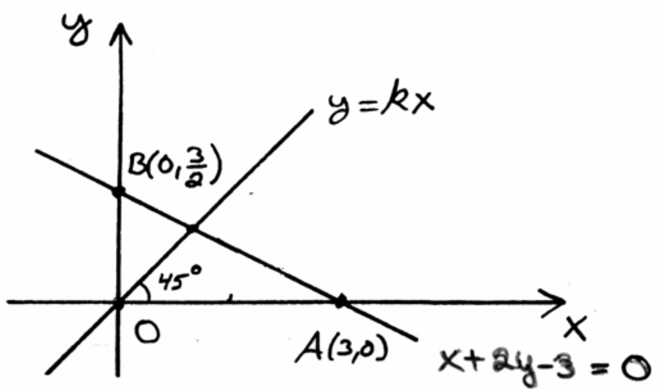
Kun $y=0$, niin $x+2\cdot 0-3=0$ eli $x=3$.
Leikkauspiste on siis $A=(3,0)$.

2) Suoran ja y-akselin leikkauspiste

Kun $x=0$, niin $0+2y-3=0$ eli $y=\frac{3}{2}$.

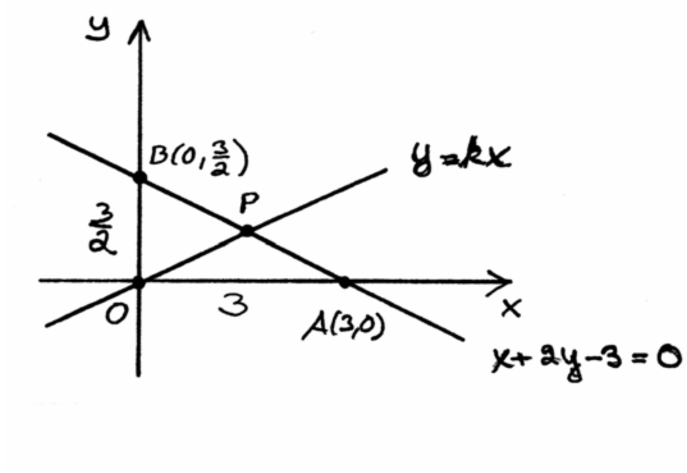
Leikkauspiste on siis $B=\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

a) Piirretään mallikuva.



Kolmio *OAB* on suorakulmainen kolmio, joten suurin kulma on 90°.
Suoran kulman puolittavan suoran yhtälö on muotoa $y=kx$, missä $k=\tan 45^\circ=1$. Suoran yhtälö on siis $y=x$.

b) Piirretään mallikuva



$$|OA|=|\triangle x|=|3-1|=3$$

$$|OB|=|\triangle y|=\left|\frac{3}{2}-0\right|=\frac{3}{2}$$

Kolmion *OAB* ala on

$$A_{OAB}=\frac{3\cdot\frac{3}{2}}{2}=\frac{9}{4}$$

Kolmion *OAP* ala on puolet kolmion *OAB* alasta, joten määritetään suorien $y=kx$ ja $x+2y-3=0$ leikkauspisteen *P* y-koordinaatti, joka on kolmion *OAP* korkeus.

Leikkauspiste P saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x+2y-3=0\\ y=kx\end{cases} \qquad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x+2kx-3=0$$

$$(1+2k)x=3 \qquad \Big| :(1+2k)(\neq 0,\ \text{koska } k>0)$$

$$x=\frac{3}{1+2k} \qquad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$y=k\cdot\frac{3}{1+2k}=\frac{3k}{1+2k}$$

Leikkauspiste on siis $P=\left(\frac{3}{1+2k},\frac{3k}{1+2k}\right)$.

Kolmion OAP kanta on 3 ja korkeus on $\frac{3k}{1+2k}$, joten

$$A_{OAP}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3k}{1+2k}$$

Saadaan yhtälö

$$A_{OAP}=\frac{1}{2}A_{OAB} \qquad \Big| A_{OAB}=\frac{9}{4}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{3k}{1+2k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}$$

$$\frac{3k}{1+2k}=\frac{3}{4}$$

$$12k=3(1+2k)$$

$$12k=3+6k$$

$$6k=3$$

$$k=\frac{1}{2}$$

Suoran yhtälö on siis $y=\frac{1}{2}x$

Vastaus a) $y=x$ b) $y=\frac{1}{2}x$

516

Väite. Suora $(C^2+1)x - C^2y + C^2 - 1 = 0$ kulkee vakion C kaikilla arvoilla saman pisteen kautta.

Tapa 1

Todistus.
Valitaan suoraparvesta kaksi suoraa ja lasketaan niiden leikkauspiste. Todistetaan lopuksi, että kaikki parven suorat kulkevat tämän pisteen kautta.

Kun $C = 0$, saadaan suora

$$\begin{aligned}(0^2+1)x - 0^2y + 0^2 - 1 &= 0\\ x - 1 &= 0\\ x &= 1\end{aligned}$$

Kun $C = 1$, saadaan suora

$$\begin{aligned}(1^2+1)x - 1^2y + 1^2 - 1 &= 0\\ 2x - y &= 0\\ y &= 2x\end{aligned}$$

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x = 1\\ y = 2x\end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$y = 2 \cdot 1 = 2$

Osoitetaan, että kaikki suorat kulkevat pisteen $(1,2)$ kautta.
Kun $x = 1$ ja $y = 2$, suoraparven yhtälön

vasen puoli on
$$\begin{aligned}&(C^2+1)\cdot 1 - C^2 \cdot 2 + C^2 - 1\\ &= C^2 + 1 - 2C^2 + C^2 - 1\\ &= 0\end{aligned}$$

oikea puoli on 0

Siis kaikki suorat kulkevat pisteen $(1,2)$ kautta. □

Tapa 2

Todistus
Muunnetaan suoraparven yhtälö muotoon, josta havaitaan sellainen piste (x, y), joka toteuttaa suoraparven yhtälön parametrin C arvosta riippumatta.

$$\begin{aligned}(C^2+1)x - C^2y + C^2 - 1 &= 0\\ C^2x + x - C^2y + C^2 - 1 &= 0\\ C^2(x - y + 1) + (x - 1) &= 0\end{aligned}$$

Yhtälö toteutuu kaikilla parametrin C arvoilla, kun

$x - y + 1 = 0$ ja $x - 1 = 0$

eli $y = x + 1$ ja $x = 1$

eli $y = 2$ ja $x = 1$

Piste $(1,2)$ toteuttaa siis suoraparven yhtälön parametrin C arvosta riippumatta, joten kaikki parven suorat kulkevat pisteen $(1,2)$ kautta. □

Tapa 3

Todistus
Yhtälö $y-y_0=k(x-x_0)$ esittää aina suoraa, jonka kulmakerroin on k ja joka kulkee pisteen (x_0,y_0) kautta.

Muunnetaan suoraparven yhtälö tähän muotoon.

$$(C^2+1)x-C^2y+C^2-1=0$$

$$C^2y-C^2=(C^2+1)x-1 \quad \Big| -C^2$$

$$C^2y-2C^2=(C^2+1)x-C^2-1$$

$$C^2y-2C^2=(C^2+1)x-(C^2+1)$$

$$C^2y-2C^2=(C^2+1)(x-1)$$

| $:C^2,\ C^2\neq 0.$ Tapaus $C=0$ tutkitaan erikseen.

$$y-2=\frac{(C^2+1)}{C^2}(x-1),\ C\neq 0$$

Yhtälö esittää suoraa, jonka kulmakerroin on aina $\frac{(C^2+1)}{C^2}$ ja joka kulkee pisteen $(1,2)$ kautta.

Koska piste $(1,2)$ ei riipu parametrin C $(C\neq 0)$ arvosta, kaikki suoraparven suorat kulkevat saman pisteen kautta.

Jos $C=0$, suoraparven yhtälö saa muodon

$$(0^2+1)x-0^2y+0^2-1=0$$

$$x-1=0$$

$$x=1$$

eli pisteen $(1,2)$ kautta kulkeva pystysuora suora.

Täten kaikki suoraparven suorat kulkevat saman pisteen kautta □

Vastaus Piste on $(1,2)$.

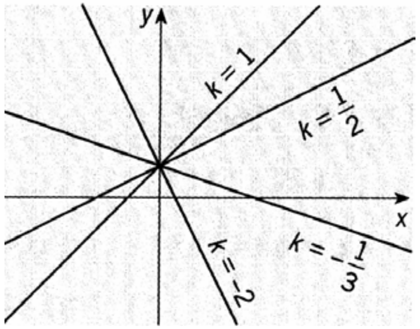
517

Annetaan kulmakertoimelle k esimerkiksi arvot

$$k=-2,\ k=-\frac{1}{3},\ k=\frac{1}{2}\ \text{ ja }\ k=1.$$

Vastaavat suorien yhtälöt ovat

$$y=-2x+1,\ y=-\frac{1}{3}x+1,\ y=\frac{1}{2}x+1\ \text{ ja }\ y=x+1.$$



Muunnetaan suoraparven yhtälö $y=kx+1$ muotoon

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y=kx+1$$
$$y-1=kx$$
$$y-1=k(x-0) \qquad \big|\,(x_0,y_0)=(0,1)$$

Suorat kulkevat siis pisteen $(0,1)$ kautta kulmakertoimen k arvosta riippumatta. Kun kulmakerroin saa kaikki reaaliarvot, saadaan kaikki pisteen $(0,1)$ kautta kulkevat suorat lukuun ottamatta suoraa $x=0$, sillä pystysuoralla suoralla ei ole kulmakerrointa.

Vastaus Suorat kulkevat pisteen $(0,1)$ kautta.
Suora $x=0$ ei kuulu suoraparveen.

518

Tapa 1

Todistus
Jos parven suorilla on yhteinen piste, niin se on välttämättä suoraparven kahden mielivaltaisen suoran leikkauspiste. Valitaan suoraparvesta kaksi suoraa ja lasketaan niiden leikkauspiste. Todistetaan lopuksi, että kaikki parven suorat kulkevat tämän pisteen kautta.

Kun $a=0$, saadaan suora $-x-y=0$ eli $y=-x$.

Kun $a=1$, saadaan suora $x-x-y-y=0$ eli $-2y=0$ eli $y=0$.

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} y=-x & (1) \\ y=0 & (2) \end{cases} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$0=-x$$
$$x=0$$

Leikkauspiste on $(0,0)$.

On vielä osoitettava, että suoraparven kaikki suorat kulkevat pisteen $(0,0)$ kautta. Osoitetaan siis, että pisteen $(0,0)$ koordinaatit toteuttavat suoraparven yhtälön kaikilla parametrin a arvoilla.

Kun $x = 0$ ja $y = 0$, suoraparven yhtälön

vasen puoli on $a^2 \cdot 0 - 0 - a^2 \cdot 0 - 0 = 0$ ja
oikea puoli on 0

Kaikki suorat kulkevat siis pisteen $(0,0)$ kautta. □

Tapa 2

Todistus
Muunnetaan suoraparven yhtälö muotoon, josta havaitaan sellainen piste (x, y), joka toteuttaa suoraparven yhtälön parametrin *a* arvosta riippumatta.

$$a^2x - x - a^2y - y = 0$$
$$a^2x - a^2y - x - y = 0$$
$$a^2(x - y) - (x + y) = 0$$

Yhtälö toteutuu kaikilla parametrin *a* arvoilla, kun

$x - y = 0$ ja $x + y = 0$
eli $x = y$ ja $x = -y$
eli $x = y = 0.$

Piste $(0,0)$ toteuttaa siis suoraparven yhtälön parametrin *a* arvosta riippumatta, joten kaikki parven suorat kulkevat pisteen $(3,5)$ kautta. □

Tapa 3

Todistus
Yhtälö $y - y_0 = k(x - x_0)$ esittää aina suoraa, jonka kulmakerroin on *k* ja joka kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta.

Muunnetaan suoraparven yhtälö tähän muotoon.

$$a^2x - x - a^2y - y = 0$$
$$a^2y + y = a^2x - x$$
$$(a^2 + 1)y = (a^2 - 1)x \qquad \big| : (a^2 + 1) > 0$$
$$y = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}x$$
$$y - 0 = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}(x - 0) \qquad \big| \; y - y_0 = k(x - x_0)$$

Yhtälö esittää suoraa, jonka kulmakerroin on aina $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ ja joka kulkee pisteen $(0,0)$ kautta. Koska piste $(0,0)$ ei riipu parametrin *a* arvosta, kaikki suoraparven suorat kulkevat saman pisteen kautta. □

Suoran kulmakerroin on $\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$.

Kulmakerroin on aina olemassa, sillä $a^2+1\neq 0$ kaikilla parametrin a arvoilla. Suoraparvessa ei siis ole pystysuoria suoria.
Vaakasuora suora saadaan kulmakertoimen arvolla 0, joten suoraparveen kuuluu vaakasuora suora $y=0$ eli x-akseli.

Vastaus Suoraparveen kuuluu vaakasuora suora, mutta ei pystysuoria suoria.

519

Tapa 1

Todistus
Jos parven suorilla on yhteinen piste, niin se on välttämättä suoraparven kahden mielivaltaisen suoran leikkauspiste. Valitaan suoraparvesta kaksi suoraa ja lasketaan niiden leikkauspiste. Todistetaan lopuksi, että kaikki parven suorat kulkevat tämän pisteen kautta.

Kun $k=0$, saadaan suora

$(3+2\cdot 0)x+(0-2)y-8\cdot 0-5=0$ eli $3x-2y-5=0$.

Kun $k=1$, saadaan suora

$(3+2\cdot 1)x+(1-2)y-8\cdot 1-5=0$ eli $5x-y-13=0$.

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases}3x-2y-5=0 \\ 5x-y-13=0\end{cases} \quad \begin{vmatrix}\cdot 1 \\ \cdot(-2)\end{vmatrix}\begin{matrix}\cdot 5 \\ \cdot(-3)\end{matrix}$$

$$+\begin{cases}3x-2y-5=0 \\ -10x+2y+26=0\end{cases}$$
$$-7x+21=0$$
$$x=3$$

$$+\begin{cases}15x-10y-25=0 \\ -15x+3y+39=0\end{cases}$$
$$-7y+14=0$$
$$y=2$$

Leikkauspiste on $(3,2)$.

On vielä osoitettava, että suoraparven kaikki suorat kulkevat pisteen $(3,2)$ kautta. Osoitetaan siis, että pisteen $(3,2)$ koordinaatit toteuttavat suoraparven yhtälön kaikilla parametrin k arvoilla.

Kun $x=3$ ja $y=2$, suoraparven yhtälön

vasen puoli on $\begin{aligned}&(3+2k)\cdot 3+(k-2)\cdot 2-8k-5\\&=9+6k+2k-4-8k-5=0\end{aligned}$

oikea puoli on 0

Kaikki suorat kulkevat siis pisteen $(3,2)$ kautta. □

Tapa 2

Todistus
Muunnetaan suoraparven yhtälö muotoon, josta havaitaan sellainen piste (x,y), joka toteuttaa suoraparven yhtälön parametrin k arvosta riippumatta.

$$\begin{aligned}(3+2k)x+(k-2)y-8k-5&=0\\3x+2kx+ky-2y-8k-5&=0\\(2kx+ky-8k)+(3x-2y-5)&=0\\(2x+y-8)\cdot k+(3x-2y-5)&=0\end{aligned}$$

Yhtälö toteutuu kaikilla parametrin k arvoilla, kun

$$\begin{cases}2x+y-8=0\\3x-2y-5=0\end{cases}\quad\begin{vmatrix}\cdot 2\\\cdot 1\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}\cdot(-3)\\\cdot 2\end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases}4x+2y-16=0\\3x-2y-5=0\end{cases}\qquad +\begin{cases}-6x-3y+24=0\\6x-4y-10=0\end{cases}$$

$$7x-21=0 \qquad -7y+14=0$$

$$x=3 \qquad y=2$$

Piste $(3,2)$ toteuttaa siis suoraparven yhtälön parametrin k arvosta riippumatta, joten kaikki parven suorat kulkevat pisteen $(3,2)$ kautta. □

Muunnetaan suoraparven yhtälö muotoon $y=kx+b$.

$$(3+2k)x+(k-2)y-8k-5=0$$

$$(k-2)y=-(3+2k)x+8k+5 \quad \Big|:(k-2),k\neq 2$$

Tapaus $k=2$ on tutkittava erikseen.

$$y=-\frac{3+2k}{k-2}x+\frac{8k+5}{k-2}$$

Jos $k\neq 2$, niin suoralla on kulmakerroin, joten suora ei voi silloin olla pystysuora.

Jos $k = 2$, suoraparven yhtälö saa muodon

$$\begin{aligned}(3+2\cdot 2)x+(2-2)y-8\cdot 2-5&=0\\ 7x-16-5&=0\\ 7x&=21\\ x&=3\end{aligned}$$

eli saatiin pisteen $(3,2)$ kautta kulkeva pystysuora suora.

Vastaus Pystysuora suora on mukana parvessa.

520

Suorien yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla suorien yhtälöiden muodostama yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}-4x+ay=2\\ ax-y=1\end{cases}\quad\left|\begin{array}{l}\cdot 1\\ \cdot a,\ a\neq 0.\\ \text{Tapaus } a=0\\ \text{tutkittava erikseen.}\end{array}\right.$$

$$+\begin{cases}-4x+ay=2\\ a^2x-ay=a\end{cases}$$

$$a^2x-4x=a+2$$

$$(a^2-4)x=a+2\quad\left|\begin{array}{l}:(a^2-4),\ a\neq\pm 2.\\ \text{Tapaus } a=\pm 2 \text{ on}\\ \text{tutkittava erikseen.}\end{array}\right.$$

$$x=\frac{a+2}{a^2-4}$$

$$x=\frac{a+2}{(a+2)(a-2)}$$

$$x=\frac{1}{a-2},\ a\neq 0,\ a\neq\pm 2$$

Sijoitetaan $x=\dfrac{1}{a-2}$ yhtälöön (2).

$$a\cdot\frac{1}{a-2}-y=1$$

$$y=\frac{a}{a-2}-1$$

$$y=\frac{a-1(a-2)}{a-2}=\frac{a-a+2}{a-2}=\frac{2}{a-2}$$

Suorien yhteinen piste on $\left(\dfrac{1}{a-2},\dfrac{2}{a-2}\right)$, kun $a\neq 0$, $a\neq \pm 2$.

1) Jos $a\neq 0$, $a\neq\pm 2$, niin suorilla on siis vain yksi yhteinen piste.

2) Jos $a=0$, alkuperäisistä yhtälöistä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases}-4x+0\cdot y=2\\ 0\cdot x-\quad y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4x=2\\ -y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$$

Siis suorilla on vain yksi yhteinen piste $\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$, jos $a=0$.

3) Jos $a=2$, niin saadaan

$$\begin{cases}-4x+2y=2 & \Big|\cdot 1\\ 2x-y=1 & \Big|\cdot 2\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-4x+2y=2\\ 4x-2y=2\end{cases}$$

$$0=4 \quad \text{aina epätosi}$$

Suorat ovat yhdensuuntaiset eivätkä yhdy, joten niillä ei ole yhteisiä pisteitä.

4) Jos $a=-2$, niin saadaan

$$\begin{cases}-4x-2y=2 & \Big|\cdot 1\\ -2x-y=1 & \Big|\cdot(-2)\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-4x-2y=2\\ 4x+2y=-2\end{cases}$$

$$0=0 \quad \text{aina tosi}$$

Siis suorat yhtyvät eli niillä on vähintään kaksi yhteistä pistettä, jos $a=-2$.

Vastaus a) Suorilla on vain yksi yhteinen piste, jos $a\neq\pm 2$.
b) Suorilla vähintään kaksi yhteistä pistettä, jos $a=-2$.
c) Suorilla ei ole yhtään yhteistä pistettä, jos $a=2$.

521

Suorien leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla suorien yhtälöiden muodostama yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x+ty+t^2+1=0\\ tx+y+t+1=0\end{cases}\quad \begin{array}{|l}\cdot 1\\ \cdot(-t),\ t\neq 0.\\ \text{Tapaus } t=0 \text{ on}\\ \text{tutkittava erikseen.}\end{array}$$

$$+\begin{cases}x+ty+t^2+1=0\\ -t^2x-ty-t^2-t=0\end{cases}$$

$$x-t^2x \quad +1-t=0$$

$$(1-t^2)x \quad =t-1 \quad \begin{array}{|l}:(1-t^2),\ t\neq\pm 1.\\ \text{Tapaus } t=\pm 1\\ \text{on tutkittava erikseen.}\end{array}$$

$$x=\frac{t-1}{1-t^2}$$

$$x=\frac{-(1-t)}{(1+t)(1-t)}$$

$$x=-\frac{1}{1+t},\quad t\neq 0,\ t\neq\pm 1$$

Sijoitetaan $x=-\frac{1}{1+t}$ yhtälöön (2).

$$t\cdot\left(-\frac{1}{1+t}\right)+y+t+1=0$$

$$y=\frac{t}{1+t}-t-1$$

$$y=\frac{t-t(1+t)-1(1+t)}{1+t}$$

$$y=\frac{t-t-t^2-1-t}{1+t}$$

$$y=\frac{-t^2-t-1}{1+t}$$

Suorien ainoa leikkauspiste on

$$\left(-\frac{1}{1+t},\frac{-t^2-t-1}{1+t}\right),\quad \text{kun } t\neq 0,\ t\neq\pm 1$$

Saatiin siis seuraava tulos

1) Jos $t\neq 0,\ t\neq\pm 1$, suorilla on siis vain yksi leikkauspiste.

Tutkitaan vielä erikseen tapaukset $t=0,\ t=1$ ja $t=-1$.

2) Jos $t=0$, niin alkuperäisestä yhtälöstä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x+0\cdot y+0^2+1=0 \\ 0\cdot x+y+0+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1=0 \\ y+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Siis suorilla on vain yksi yhteinen piste $(-1,-1)$, jos $t=0$.

3) Jos $t=1$, niin saadaan

$$\begin{cases} x+y+1+1=0 & \Big| \cdot 1 \\ x+y+1+1=0 & \Big| \cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} +\begin{cases} x+y+2=0 \\ -x-y-2=0 \end{cases} \\ \hline 0=0 \end{array} \quad \text{aina tosi}$$

Siis suorat yhtyvät eli niillä on vähintään kaksi yhteistä pistettä, jos $t=1$.

4) Jos $t=-1$, niin saadaan

$$\begin{array}{r} +\begin{cases} x-y+1+1=0 \\ -x+y-1+1=0 \end{cases} \\ \hline 2=0 \end{array} \quad \text{aina epätosi}$$

Siis suorilla ei ole yhteisiä pisteitä, jos $t=-1$.

Vastaus a) Suorilla on vain yksi yhteinen piste, jos $t\neq\pm1$
b) Suorilla on vähintään kaksi yhteistä pistettä, jos $t=1$.
c) Suorilla ei ole yhteisiä pisteitä, jos $t=-1$.

Huomautus:

Tutkitaan, sieveneekö yhteisen pisteen $\left(-\dfrac{1}{1+t},\dfrac{-t^2-t-1}{1+t}\right)$ y-koordinaatin lauseke.

Osoittaja on toisen asteen polynomi, jolla ei ole nollakohtia, koska diskriminantti $\mathrm{D}=(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=-3<0$.
Polynomi $-t^2-t-1$ on siis jaoton, joten y-koordinaatin lauseke ei sievene.
Tehtävän ratkaisun kannalta tämä tutkiminen ei ollut oleellista.

522

Lasketaan suorien kulmakertoimet ja verrataan niitä keskenään.

a)

$l_1: \quad x-4y=0$

$4y=x$

$y=\frac{1}{4}x$

$k_1=\frac{1}{4}$

$l_2: \quad 4x+y-5=0$

$y=-4x+5$

$k_2=-4$

Koska $k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{4}\cdot(-4)=-1$, suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b)

$l_1: \quad 12x-6y-7=0$

$6y=12x-7$

$y=2x-\frac{7}{6}$

$k_1=2$

$l_2: \quad 8x-4y+7=0$

$4y=8x+7$

$y=2x+\frac{7}{4}$

$k_2=2$

Koska $k_1=k_2$, suorat ovat yhdensuuntaiset.

c)

$l_1: \quad 9x+3y+2=0$

$3y=-9x-2$

$y=-3x-\frac{2}{3}$

$k_1=-3$

$l_2: \quad 15x-5y-2=0$

$5y=15x-2$

$y=3x-\frac{2}{5}$

$k_2=3$

Koska $k_1 \neq k_2$ ja $k_1 \cdot k_2 \neq -1$, niin suorat eivät ole yhdensuuntaiset eivätkä kohtisuorassa toisiaan vastaan.

d)

$l_1: \quad x-4=0$

$x=4$

Suoralla ei ole kulmakerrointa.

$l_2: \quad y+5=0$

$y=-5$

$k_2=0$

Toinen suora on pystysuora ja toinen vaakasuora, joten suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

e)

$l_1: \quad 2x+6=0$

$x=-3$

Suoralla ei ole kulmakerrointa.

$l_2: \quad x=1$

Suoralla ei ole kulmakerrointa.

Molemmat suorat ovat pystysuoria, joten ne ovat yhdensuuntaiset.

Vastaus
a) Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
b) Suorat ovat yhdensuuntaiset.
c) Suorat eivät ole kumpaakaan.
d) Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
e) Suorat ovat yhdensuuntaiset.

523

a)
Suora on suoran $y=-5x+8$ suuntainen, joten sen kulmakerroin on $k=-5$. Suoran yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad \Big| (x_0,y_0)=(-3,2),\ k=-5$$
$$y-2=-5(x+3)$$
$$y-2=-5x-15$$
$$y=-5x-13$$

b)
Suora on suoran $y=-5x+8$ normaali, joten suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja $k_1\cdot k_2=-1$.
Saadaan yhtälö

$$k_n\cdot(-5)=-1$$
$$k_n=\frac{1}{5}$$

Suoran yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad \Big| (x_0,y_0)=(-3,2),\ k=\frac{1}{5}$$
$$y-2=\frac{1}{5}(x-(-3))$$
$$y-2=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$$
$$y=\frac{1}{5}x+\frac{13}{5} \qquad \Big| \cdot 5$$

$$5y=x+13$$
$$x-5y+13=0$$

Vastaus a) $y=-5x-13$

b) $x-5y+13=0$

524

Janan AB keskinormaali n kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa AB vastaan.

Janan keskipisteen koordinaatit ovat

$$x = \frac{x_A + y_B}{2} = \frac{-3-1}{2} = -2$$
$$y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2$$

Keskinormaali n kulkee siis pisteen $P = (-2,2)$ kautta.

Koska $n \perp AB,$ on $k_n \cdot k_{AB} = -1.$

Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{6-(-2)}{-1-(-3)} = \frac{8}{2} = 4,$$

joten saadaan yhtälö

$$k_n \cdot 4 = -1$$
$$k_n = -\frac{1}{4}$$

Keskinormaalin n yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \Big| (x_0, y_0) = (-2,2),\ k = -\frac{1}{4}$$
$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x-(-2))$$
$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x+2)$$
$$y - 2 = -\frac{1}{4}x - \frac{2}{4}$$
$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{6}{4} \qquad \Big| \cdot 4$$

$$4y = -x + 6$$
$$x + 4y - 6 = 0$$

Vastaus Keskinormaalin yhtälö on $x + 4y - 6 = 0$.

525

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-2y+7=0 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} 2x+2y-4=0 \\ x-2y+7=0 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 3x \qquad +3=0 \end{array}$$

$$x=-1 \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x+y-2=0$$
$$-1+y-2=0$$
$$y=3$$

Siis leikkauspiste on $(-1,3)$.

Määritetään suoran $2x-y=0$ kulmakerroin k_1.

$$y=2x$$
$$k_1=2$$

Suoran l kulmakerroin k_2 saadaan yhtälöstä

$$k_1 \cdot k_2=-1$$
$$2 \cdot k_2=-1$$
$$k_2=-\frac{1}{2}$$

Suoran l yhtälö on

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right) \qquad \Big| \left(x_0,y_0\right)=(-1,3),\ k=-\frac{1}{2}$$
$$y-3=k\left(x-x_0\right)$$
$$y-3=-\frac{1}{2}(x-(-1))$$
$$y-3=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}x+y-3+\frac{1}{2}=0 \qquad \Big| \cdot 2$$

$$x+2y-5=0$$

Vastaus $\quad x+2y-5=0$

526

Määritetään suorien kulmakertoimet ja vakiotermit muuntamalla suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$$s_1: \quad 3x - ay + a^2 = 0$$
$$ay = 3x + a^2$$

1) Jos $a \neq 0$, suoran yhtälö voidaan jakaa luvulla a.

$$ay = 3x + a^2 \qquad \Big| :a,\ a \neq 0.$$
Tapaus $a = 0$ on tutkittava erikseen

$$y = \frac{3}{a}x + a \qquad \Big|\ y = kx + b$$
$$k_1 = \frac{3}{a} \text{ ja } b_1 = a$$

$$s_2: \quad -ax + 3y + a + 4 = 0$$
$$3y = ax - (a+4)$$
$$y = \frac{a}{3}x - \frac{a+4}{3} \qquad \Big|\ y = kx + b$$
$$k_2 = \frac{a}{3} \text{ ja } b_2 = -\frac{a+4}{3}$$

Suorat s_1 ja s_2 ovat yhdensuuntaiset, mutta eivät yhdy, kun

$$k_1 = k_2 \quad \text{ja} \quad b_1 \neq b_2$$
$$\frac{3}{a} = \frac{a}{3} \quad \text{ja} \quad a \neq -\frac{a+4}{3}$$
$$a^2 = 9 \quad \text{ja} \quad 3a \neq -(a+4)$$
$$a = \pm 3 \quad \text{ja} \quad 3a \neq -a - 4$$
$$4a \neq -4$$
$$a \neq -1$$

Siis $a = \pm 3$.

Koska $a = \pm 3$ toteuttaa myös ehdon $a \neq 0$, niin arvoilla $a = \pm 3$ suorat ovat yhdensuuntaiset, mutta eivät yhdy.

2) Jos $a = 0$, niin alkuperäisten suorien yhtälöt ovat

$$s_1: \quad 3x = 0 \text{ eli } x = 0$$
$$s_2: \quad 3y + 4 = 0 \text{ eli } y = -\frac{4}{3}$$

Suora s_1 on pystysuora ja suora s_2 on vaakasuora, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset, kun $a = 0$.

Vastaus $\quad a = \pm 3$

527

Määritetään suorien kulmakertoimet muuntamalla suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$l_1: \quad x + ry - s = 0$

$$ry = -x + s$$

1) Jos $r \neq 0$, suoran yhtälö voidaan jakaa luvulla *r*.

$$ry = -x + s \quad \Big| : r,\ r \neq 0. \text{ Tapaus } r = 0 \text{ on tutkittava erikseen.}$$

$$y = -\frac{1}{r}x + \frac{s}{r}$$

$$k_1 = -\frac{1}{r}$$

$l_2: \quad 2x + 3y - 1 = 0$

$$3y = -2x + 1$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$k_2 = -\frac{2}{3}$$

Suorat l_1 ja l_2 ovat yhdensuuntaiset eli $l_1 \parallel l_2$, kun $k_1 = k_2$.
Saadaan yhtälö

$$-\frac{1}{r} = -\frac{2}{3}$$

$$r = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Koska $r = 1\frac{1}{2}$ toteuttaa myös ehdon $r \neq 0$, niin arvolla $r = 1\frac{1}{2}$ suora l_1 on suoran l_2 suuntainen.

2) Jos $r = 0$, niin alkuperäisten suorien yhtälöt ovat

$l_1: \quad x - s = 0$ eli $x = s$

$l_2: \quad 2x + 3y - 1 = 0$ eli $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Suora l_1 on pystysuora ja suora l_2 on vino suora, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset, kun $r = 0$.

Suora l_1 kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta, joten piste toteuttaa suoran yhtälön. Sijoitetaan piste $(-1, 2)$ suoran l_1 yhtälöön.

$$-1 + r \cdot 2 - s = 0$$

$$2r - s - 1 = 0 \quad \Big| r = \frac{3}{2}$$

$$3 - s - 1 = 0$$

$$s = 2$$

Vastaus $\quad r = 1\frac{1}{2}$ ja $s = 2$.

528

Määritetään suorien kulmakertoimet ja vakiotermit muuntamalla suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$$l_1: \quad ax + by - 3 = 0$$
$$by = -ax + 3$$

1) Jos $b \neq 0$, suoran yhtälö voidaan jakaa luvulla *b*.

$$by = -ax + 3 \qquad \Big|\ :b,\ b \neq 0.\ \text{Tapaus } b = 0 \text{ on tutkittava erikseen.}$$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{3}{b}$$

$$k_1 = -\frac{a}{b} \ \text{ ja } \ b_1 = \frac{3}{b}$$

$$l_2: \quad ax - 2y + 1 = 0$$
$$2y = ax + 1$$
$$y = \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}$$
$$k_2 = \frac{a}{2} \ \text{ ja } \ b_2 = \frac{1}{2}$$

Suorat l_1 ja l_2 yhtyvät, kun $k_1 = k_2$ ja $b_1 = b_2$.
Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{2} & (1) \\ \dfrac{3}{b} = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{2} \\ b = 6 \end{cases} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$-\frac{a}{6} = \frac{a}{2} \qquad \Big|\cdot 6$$
$$-a = 3a$$
$$4a = 0$$
$$a = 0$$

Koska $\begin{cases} a = 0 \\ b = 6 \end{cases}$ toteuttaa myös ehdon $b \neq 0$, niin arvoilla $\begin{cases} a = 0 \\ b = 6 \end{cases}$ suorat yhtyvät.

2) Jos $b = 0$, niin alkuperäisten suorien yhtälöt ovat

$$l_1: \quad ax - 3 = 0 \ \text{ eli } \ x = \frac{3}{a}$$

$$l_2: \quad ax - 2y + 1 = 0 \ \text{ eli } \ y = \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}$$

Suorat eivät yhdy millään vakion *a* arvoilla, sillä
- jos $a \neq 0$, on suora l_1 pystysuora ja l_2 on vino suora.
- jos $a = 0$, ei suoraa l_1 ole ja suora l_2 on vaakasuora.

Vastaus Suorat yhtyvät, kun $a = 0$ ja $b = 6$.

529

Määritetään suorien kulmakertoimet ja vakiotermit muuntamalla suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$$l_1: \quad ax + y - ay = 0$$
$$(1-a)y = -ax$$

1) Jos $a \neq 1$, suoran yhtälö voidaan jakaa luvulla $(1-a)$.

$$(1-a)y = -ax \qquad \Big| :(1-a),\ a \neq 1. \text{ Tapaus } a = 1 \text{ on tutkittava erikseen.}$$

$$y = \frac{-a}{1-a}x \qquad \Big| \, y = kx + b$$

$$k_1 = \frac{-a}{1-a} \text{ ja } b_1 = 0$$

$$l_2: \quad 2x + 3y - a = 0$$
$$3y = -2x + a$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{a}{3} \qquad \Big| \, y = kx + b$$
$$k_2 = -\frac{2}{3} \text{ ja } b_2 = \frac{a}{3}$$

2) Jos $a = 1$, niin alkuperäisten suorien yhtälöt ovat

$$l_1: \quad x + y - y = 0 \text{ eli } x = 0$$
$$l_2: \quad 2x + 3y - 1 = 0 \text{ eli } y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Suora l_1 on pystysuora ja suora l_2 on laskeva suora, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset eivätkä toistensa normaaleja.
Siis $a = 1$ ei voi olla tehtävän ratkaisu missään kohdissa a), b) tai c).

a) Suorat l_1 ja l_2 ovat yhdensuuntaiset, mutta eivät yhdy, kun

$$k_1 = k_2 \quad \text{ja} \quad b_1 \neq b_2$$
$$\frac{-a}{1-a} = -\frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad 0 \neq \frac{a}{3}$$
$$3a = 2 - 2a \quad \text{ja} \quad a \neq 0$$
$$a = \frac{2}{5}$$

Ratkaisu $a = \frac{2}{5}$ kelpaa, koska myös ehto $a \neq 1$ toteutuu.

b) Suorat yhtyvät, kun

$$k_1 = k_2 \quad \text{ja} \quad b_1 = b_2$$

$$\frac{-a}{1-a} = -\frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad 0 = \frac{a}{3}$$

$$a = \frac{2}{5} \quad \text{ja} \quad a = 0$$

ei ratkaisua

Siis suorat eivät yhdy millään vakion a arvolla.

c) Suorat l_1 ja l_2 toistensa normaaleja, kun $k_1 \cdot k_2 = -1$.
Saadaan yhtälö

$$\frac{-a}{1-a} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

$$\frac{2a}{3-3a} = -1$$

$$2a = -3 + 3a$$

$$a = 3$$

Ratkaisu $a = 3$ kelpaa, koska myös ehto $a \neq 1$ toteutuu.

Vastaus a) Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun $a = \frac{2}{5}$.
b) Suorat eivät yhdy millään vakion a arvolla.
c) Suorat ovat toistensa normaaleja, kun $a = 3$.

530

a) Lasketaan suorien kulmakertoimet.

$$l_1: \quad y = \frac{1}{2}x + 3 \qquad l_2: \quad 5x + 2y + 1 = 0$$

$$2y = -5x - 1$$

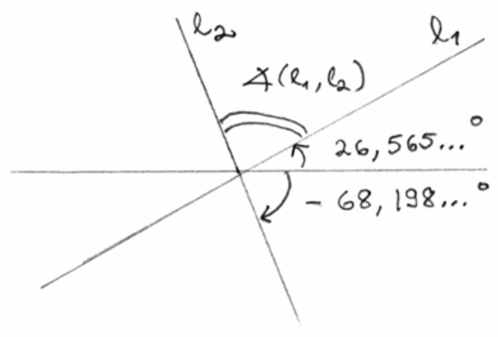
$$y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \qquad k_2 = -\frac{5}{2}$$

Tapa 1
Suorien suuntakulmat saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = k$.

$$\tan\alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \tan\alpha_2 = -\frac{5}{2}$$

$$\alpha_1 = 26{,}565...^\circ \qquad \alpha_2 = -68{,}198...^\circ$$



Suorien välinen kulma on

$$\sphericalangle(l_1,l_2) = 180^\circ - \alpha_1 - |\alpha_2|$$

$$= 180^\circ - 26{,}565...^\circ - 68{,}198...^\circ$$

$$= 85{,}237...^\circ \approx 85^\circ$$

Tapa 2
Suorien välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \qquad \left| k_1 = \frac{1}{2},\ k_2 = -\frac{5}{2}\right.$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)}{1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}\right| = \left|\frac{3}{-\frac{1}{4}}\right| = 12$$

$$\alpha = 85{,}236...^\circ \approx 85^\circ$$

b) Lasketaan suorien kulmakertoimet.

$$l_1:\quad 6x - 8y = 1 \qquad\qquad l_2:\quad 3x - 4y + 7 = 0$$
$$-8y = -6x + 1 \qquad\qquad -4y = -3x - 7$$
$$y = \frac{6}{8}x - \frac{1}{8} \qquad\qquad y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$
$$k_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad\qquad k_2 = \frac{3}{4}$$

Suorien kulmakertoimet ovat samat. Suorat ovat siis yhdensuuntaiset, joten niiden välinen kulma on 0°

Vastaus Suorien välinen kulma on a) 85° b) 0°.

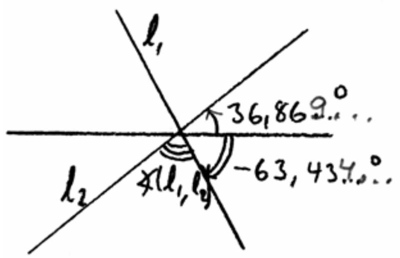
531

a) Lasketaan suorien kulmakertoimet .

$$l_1:\quad y = -2x + 5 \qquad\qquad l_2:\quad 3x - 4y + 7 = 0$$
$$-4y = -3x - 7$$
$$y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$$
$$k_1 = -2 \qquad\qquad k_2 = \frac{3}{4}$$

Tapa 1
Suorien suuntakulmat saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = k$.

$$\tan\alpha_1 = -2 \qquad\qquad \tan\alpha_2 = \frac{3}{4}$$
$$\alpha_1 = -63{,}434...^\circ \qquad\qquad \alpha_2 = 36{,}869...^\circ$$



Suorien välinen kulma on

$$\sphericalangle(l_1, l_2) = 180^\circ - |\alpha_1| - \alpha_2$$
$$= 180^\circ - 63{,}434...^\circ - 36{,}869...^\circ$$
$$= 79{,}697...^\circ \approx 80^\circ$$

Tapa 2
Suorien välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \qquad \left| k_1 = -2,\ k_2 = \frac{3}{4}\right.$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{-2 - \frac{3}{4}}{1 + (-2)\cdot\frac{3}{4}}\right| = \left|\frac{-2\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}}\right| = 5\frac{1}{2}$$

$$\alpha = 79{,}695...^\circ \approx 80^\circ$$

b) Lasketaan suorien kulmakertoimet .

$$l_1:\quad y + 9 = 0 \qquad\qquad l_2:\quad 3x - 4y + 4 = 0$$

$$y = -9 \qquad\qquad -4y = -3x - 4$$

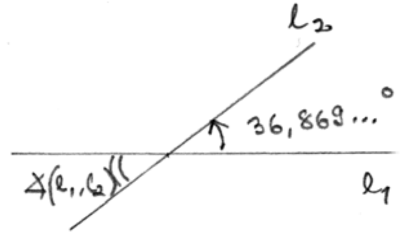
$$y = \frac{3}{4}x + 1$$

$$k_1 = 0 \qquad\qquad k_2 = \frac{3}{4}$$

Tapa 1
Suorien suuntakulmat saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = k$.

$$\tan\alpha_1 = 0 \qquad \tan\alpha_2 = \frac{3}{4}$$

$$\alpha_1 = 0^\circ \qquad \alpha_2 = 36{,}869...^\circ$$



Suorien välinen kulma on

$$\sphericalangle(l_1, l_2) = 36{,}869...^\circ \approx 37^\circ$$

Tapa 2
Suorien välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \qquad \left| k_1 = 0,\ k_2 = \frac{3}{4}\right.$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{0 - \frac{3}{4}}{1 + 0\cdot\frac{3}{4}}\right| = \left|\frac{-\frac{3}{4}}{1}\right| = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = 36{,}869...^\circ \approx 37^\circ$$

Vastaus Suorien välinen kulma on a) 80° b) 37° .

532

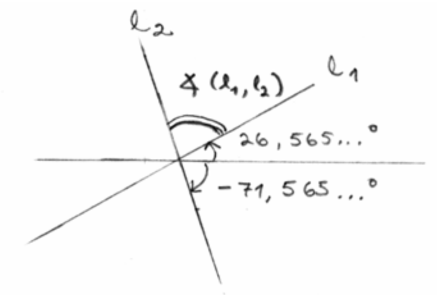
a) Lasketaan suorien kulmakertoimet.

$$l_1: \quad x-2y+1=0 \qquad\qquad l_2: \quad y=-3x+5$$
$$-2y=-x-1$$
$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$
$$k_1=\frac{1}{2} \qquad\qquad k_2=-3$$

Tapa 1

Suorien suuntakulmat saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = k$.

$$\tan\alpha_1=\frac{1}{2} \qquad\qquad \tan\alpha_2=-3$$
$$\alpha_1=26{,}565...^\circ \qquad\qquad \alpha_2=-71{,}565...^\circ$$



Suorien välinen kulma on

$$\sphericalangle(l_1,l_2)=180^\circ-\alpha_1-|\alpha_2|$$
$$=180^\circ-26{,}565...^\circ-71{,}565...^\circ$$
$$=81{,}869...^\circ\approx 82^\circ$$

Tapa 2

Suorien välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| \qquad \Big| \, k_1=\frac{1}{2},\ k_2=-3$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{\frac{1}{2}-(-3)}{1+\frac{1}{2}\cdot(-3)}\right|=\left|\frac{3\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right|=7$$

$$\alpha=81{,}869...^\circ\approx 82^\circ$$

b) Lasketaan suorien kulmakertoimet.

$$l_1: \quad 4-x=0$$
$$x=4$$

Suoralla ei ole kulmakerrointa, sillä suora on pystysuora.

$$l_2: \quad 9x-8y+7=0$$
$$-8y=-9x-7$$
$$y=\frac{9}{8}x+\frac{7}{8}$$
$$k_2=\frac{9}{8}$$

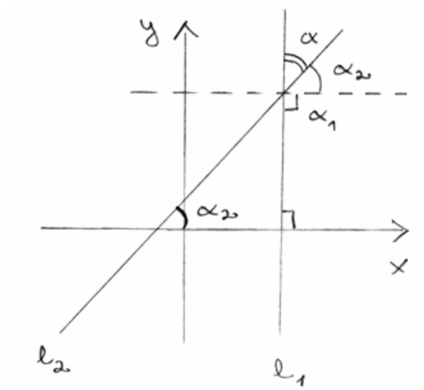
Yhtälöä $\tan\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$ ei voida käyttää, sillä toisella suoralla ei ole kulmakerrointa.

Suorien suuntakulmat ovat

$\alpha_1 = 90^\circ \qquad \tan\alpha_2 = k_2$

$$\tan\alpha_2 = \frac{9}{8}$$

$$\alpha_2 = 48{,}366...^\circ$$



Suorien välinen kulma on

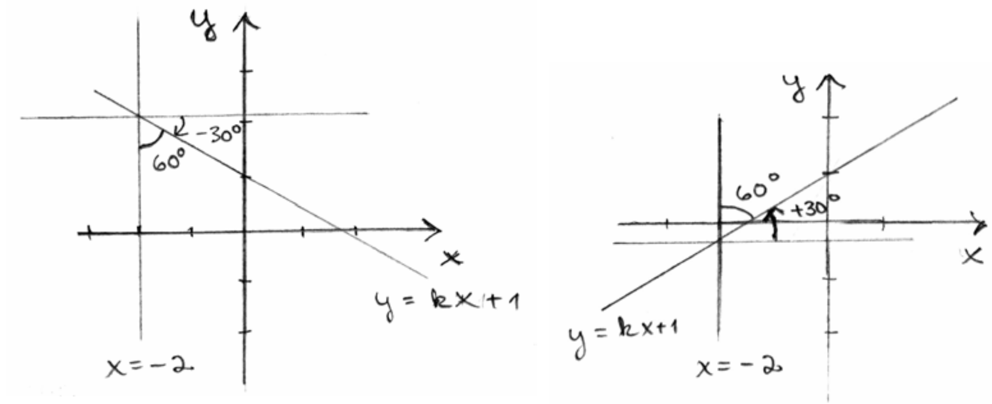
$$\sphericalangle(l_1, l_2) = \alpha = 90^\circ - \alpha_2$$
$$= 90^\circ - 48{,}366...^\circ$$
$$= 41{,}633...^\circ \approx 42^\circ$$

Vastaus Suorien välinen kulma on a) 82° b) 42°

533

Suora $x + 2 = 0$ eli $x = -2$ on pystysuora, joten yhtälöä $\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$ ei voida käyttää.

Piirretään mallikuvat.



Kuvien perusteella suoran $y = kx + 1$ suuntakulman pitää olla joko 30° tai -30°.

Kulmakertoimiksi saadaan

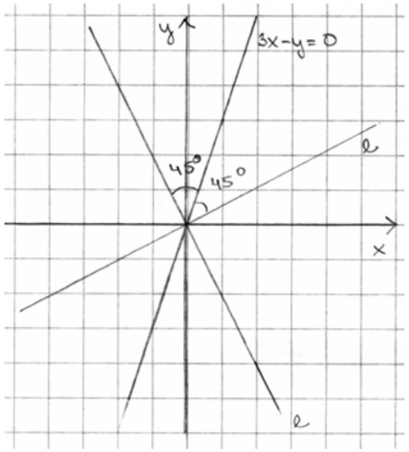
$$k_1 = \tan 30^\circ = \overset{\sqrt{3})}{} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ja}$$

$$k_2 = \tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vastaus $k = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

534

Suora l kulkee origon kautta, joten sen yhtälö on $y = kx$.



Lasketaan suorien kulmakertoimet.

$$s: \quad 3x - y = 0 \qquad\qquad l: \quad y = kx$$
$$y = 3x$$
$$k_1 = 3 \qquad\qquad k_2 = k$$

Suorien välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \qquad \Big| \, k_1 = 3,\ k_2 = k \text{ ja } \alpha = 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ = \left|\frac{3-k}{1+3k}\right| \qquad \Big| \, \tan 45^\circ = 1, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$1 = \frac{|3-k|}{|1+3k|}$$

$$|1+3k| = |3-k| \qquad \Big| \, |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b$$

$$1 + 3k = 3 - k \text{ tai } 1 + 3k = -3 + k$$

$$4k = 2 \quad \text{tai} \quad 2k = -4$$

$$k = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad k = -2$$

Vastaus Suoran yhtälö on $y = \frac{1}{2}x$ tai $y = -2x$.

535

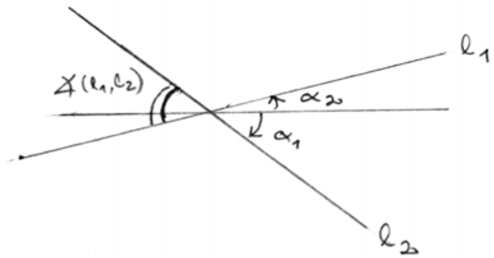
a) Lasketaan suorien kulmakertoimet.

$$l_1: \quad 2x + 3y - 5 = 0 \qquad\qquad l_2: \quad y = \frac{1}{4}x + 2$$
$$3y = -2x + 5$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$
$$k_1 = -\frac{2}{3} \qquad\qquad k_2 = \frac{1}{4}$$

Tapa 1

Suorien suuntakulmat saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = k$.

$$\tan\alpha_1 = -\frac{2}{3} \qquad\qquad \tan\alpha_2 = \frac{1}{4}$$
$$\alpha_1 = -33{,}690...^\circ \qquad\qquad \alpha_2 = 14{,}036...^\circ$$



Suorien välinen kulma on

$$\sphericalangle(l_1, l_2) = \alpha_2 + |\alpha_1|$$
$$= 14{,}036...^\circ + 33{,}690...^\circ$$
$$= 47{,}726...^\circ \approx 48^\circ$$

Tapa 2
Suorien välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \qquad \left| k_1 = -\frac{2}{3},\ k_2 = \frac{1}{4}\right.$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}}\right| = \left|\frac{-\frac{11}{12}}{\frac{5}{6}}\right| = \frac{11}{10}$$

$$\alpha = 47{,}726...^\circ \approx 48^\circ$$

Vastaus Suorien välinen kulma on 48°.

536

Lasketaan suorien kulmakertoimet ja suuntakulmat.

$l_1:\quad x + 3 = 0$

$x = -3$

Suoralla ei ole kulmakerrointa, sillä suora on pystysuora.

$\alpha_1 = 90^\circ$

$l_2:\quad 5x + 6y - 10 = 0$

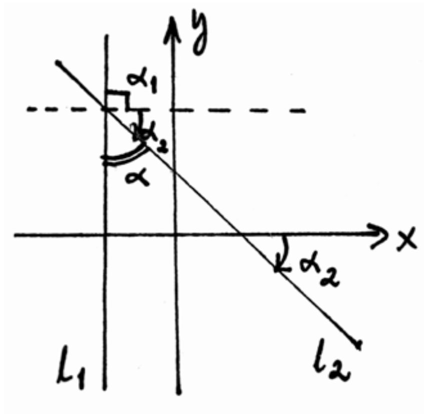
$6y = -5x + 10$

$y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{3}$

$k_2 = -\frac{5}{6}$

$\tan\alpha_2 = -\frac{5}{6}$

$\alpha_2 = -39{,}805...^\circ$

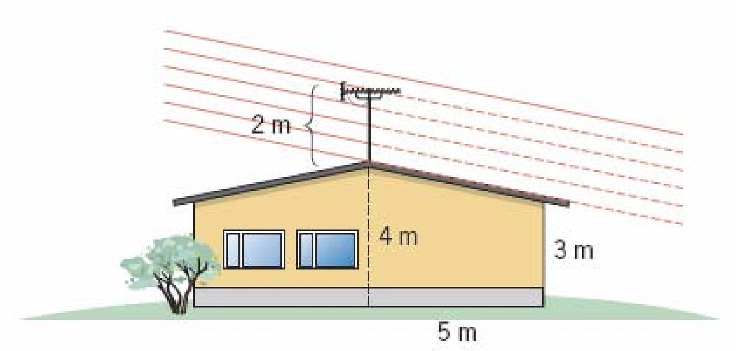


Suorien välinen kulma on

$$\measuredangle(l_1, l_2) = \alpha = 90^\circ - |\alpha_2| = 90^\circ - 39{,}805...^\circ$$
$$= 50{,}194...^\circ \approx 50^\circ$$

Vastaus Suorien välinen kulma on 50°.

537



Piirretään mallikuva, missä talo on sijoitettu koordinaatistoon siten, että y-akseli sijaitsee talon keskellä.

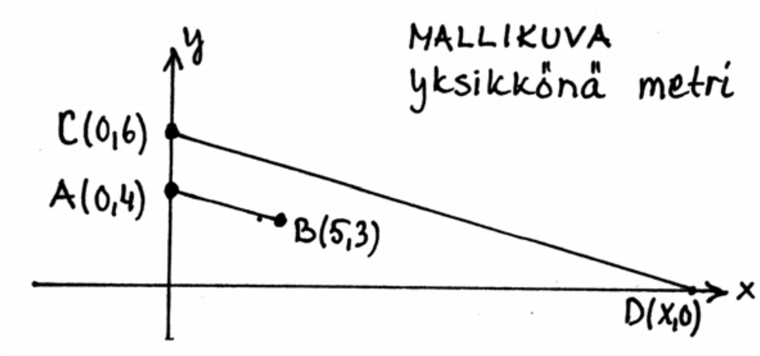
Merkitään

$A=(0,4)$

$B=(5,3)$

$C=(0,6)$

$D=(x,0)$



Pisteiden *A* ja *B* kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k_{AB}=\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{4-3}{0-5}=-\frac{1}{5}$$

Pisteiden *C* ja *D* kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad \Big|\ (x_0,y_0)=(0,6),\ k=-\frac{1}{5}$$

$$y-6=-\frac{1}{5}(x-0) \qquad \Big|\cdot 5$$

$$5y-30=-x$$

$$x+5y-30=0$$

Piste *D* saadaan yhtälöparista

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\begin{cases}x+5y-30=0\\ \qquad\qquad y=0\end{cases} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x-30=0$$

$$x=30$$

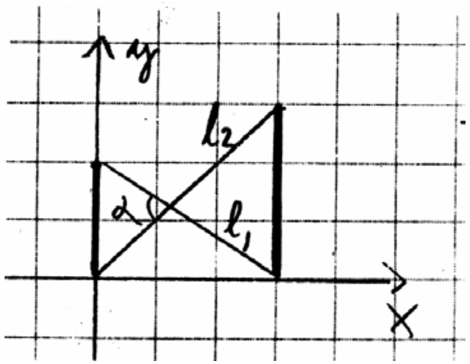
Siis piste $D=(30,0)$

Huipun varjopisteen etäisyys talon seinästä on $30\,\text{m}-5\,\text{m}=25\,\text{m}$.

Vastaus Varjo on 25 metrin päässä seinästä.

538

Piirretään mallikuva koordinaatistoon, jossa yksikkönä on 10 m.



Vaijereita kuvaavat suorat l_1 ja l_2.

Lasketaan suorien l_1 ja l_2 kulmakertoimet.

$$k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-20}{30-0} = -\frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad k_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30-0}{30-0} = 1$$

Tapa 1
Suorien välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \qquad \left| k_1 = -\frac{2}{3},\ k_2 = 1 \right.$$

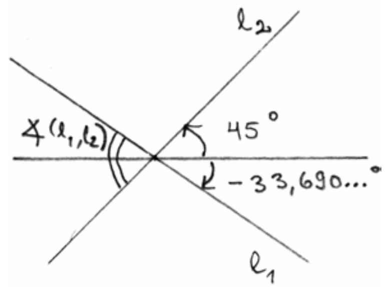
$$\tan\alpha = \left|\frac{-\frac{2}{3} - 1}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 1}\right| = \left|\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}\right| = 5$$

$$\alpha = 78{,}690...^\circ \approx 79^\circ$$

Tapa 2
Suorien suuntakulmat saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = k$.

$$\tan\alpha_1 = -\frac{2}{3} \qquad \tan\alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 = -33{,}690...^\circ \qquad \alpha_2 = 45^\circ$$



Suorien välinen kulma on

$$\sphericalangle(l_1, l_2) = |\alpha_1| + \alpha_2$$
$$= 33{,}690...^\circ + 45^\circ = 78{,}690...^\circ \approx 79^\circ$$

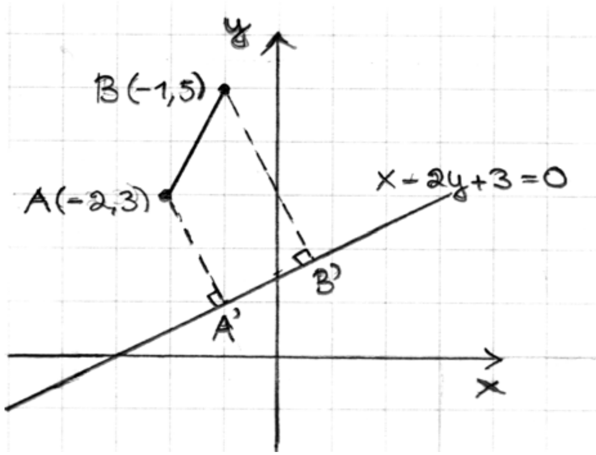
Vastaus Vaijerit leikkaavat toisensa 79° kulmassa.

539

Piirretään mallikuva.

Määritetään suoran $x-2y+3=0$ normaalin kulmakerroin.

$$x-2y+3=0$$
$$-2y=-x-3$$
$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$
$$k=\frac{1}{2}$$



Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten

$$k_n\cdot\frac{1}{2}=-1$$
$$k_n=-2$$

1) Normaalin *AA'* kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0) \quad \Big| (x_0,y_0)=(-2,3),\ k=-2$$
$$y-3=-2(x+2)$$
$$y-3=-2x-4$$
$$y=-2x-1$$

Lasketaan normaalin ja suoran leikkauspiste *A'* ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x-2y+3=0\\y=-2x-1\end{cases} \quad \Big| \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x-2(-2x-1)+3=0$$
$$x+4x+2+3=0$$
$$5x=-5$$
$$x=-1 \quad \Big| \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$
$$y=-2\cdot(-1)-1=1$$

Siis $A'=(-1,1)$

2) Normaalin *BB'* kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0) \quad \Big| (x_0,y_0)=(-1,5),\ k=-2$$
$$y-5=-2(x+1)$$
$$y-5=-2x-2$$
$$y=-2x+3$$

Lasketaan normaalin ja suoran leikkauspiste *B'* ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x-2y+3=0\\y=-2x+3\end{cases} \quad \Big| \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x-2(-2x+3)+3=0$$
$$x+4x-6+3=0$$
$$5x=3$$
$$x=\frac{3}{5} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$y=-2\cdot\frac{3}{5}+3=\frac{9}{5}$$

Siis $B'=\left(\frac{3}{5},\frac{9}{5}\right)$.

Janan *AB* projektio suoralla $x-2y+3=0$ on *A'B'*.

Janan *A'B'* pituus on

$$|A'B'|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{3}{5}-(-1)\right)^2\left(\frac{9}{5}-1\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{64+16}{25}}=\frac{\sqrt{80}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Vastaus Projektion pituus on $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

540

Suorat kulkevat pitkin suorakulmaisen kolmion kateetteja, joten suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Määritetään suorien kulmakertoimet muuntamalla suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$l_1:\ x+3y+a=0$

$$3y=-x-a$$
$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{a}{3}$$
$$k_1=-\frac{1}{3}$$

$l_2:\ ax-y+5a-6=0$

$$y=ax+5a-6$$
$$k_2=a$$

Koska $l_1 \perp l_2$, on $k_1\cdot k_2=-1$.

Saadaan yhtälö

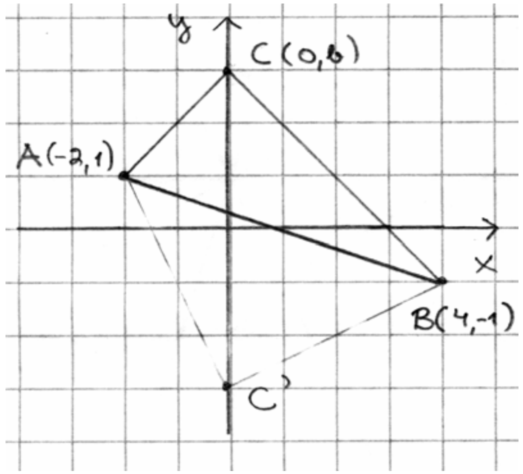
$$-\frac{1}{3}\cdot a=-1$$
$$a=3$$

Vastaus Suorat kulkevat pitkin suorakulmaisen kolmion kateetteja, kun $a=3$.

541

Merkitään kysyttyä pistettä $C=(0,b)$.

Piirretään mallikuva.



Kulma *ACB* on suora, joten pisteiden *A* ja *C* sekä *B* ja *C* kautta kulkevat suorat l_1 ja l_2 ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Määritetään suorien kulmakertoimet.

$$l_1:\quad k_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{b-1}{0-(-2)}$$

$$k_1=\frac{b-1}{2}$$

$$l_2:\quad k_2=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{b-(-1)}{0-4}$$

$$k_2=-\frac{b+1}{4}$$

Koska $l_1\perp l_2$, on $k_1\cdot k_2=-1$. Saadaan yhtälö

$$\frac{b-1}{2}\cdot\left(-\frac{b+1}{4}\right)=-1$$

$$-\frac{(b-1)(b+1)}{8}=-1 \qquad \left|\cdot(-8)\right.$$

$$(b-1)(b+1)=8 \qquad \left|(a+b)(a-b)=a^2-b^2\right.$$

$$b^2-1=8$$

$$b^2=9$$

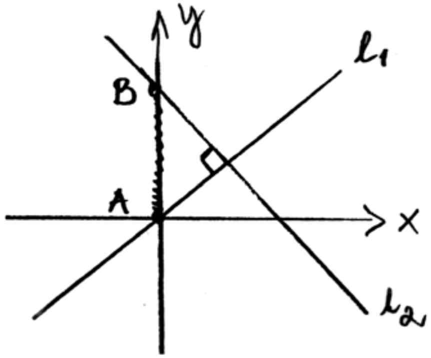
$$b=\pm 3$$

Piste *C* on $(0,-3)$ tai $(0,3)$.

Vastaus Pisteistä $(0,-3)$ ja $(0,3)$.

542

Piirretään mallikuva



Määritetään suorien kulmakertoimet muuntamalla suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$$l_1: \quad kx - y = 0 \qquad\qquad l_2: \quad 2kx + y + t = 0$$
$$y = kx \qquad\qquad y = -2kx - t$$
$$k_1 = k \qquad\qquad k_2 = -2k$$

Suora $y = kx$ kulkee origon kautta, joten janan toinen päätepiste on origo.
Siis $A = (0,0)$.

Suoran l_2 leikkauskohta y-akselilla saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x = 0 \\ y = -2kx - t \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$y = -2k \cdot 0 - t = -t$$

Siis $B = (0, -t)$.

Janan AB pituus on

$$|AB| = |\Delta y| = |-t - 0| = |t|$$

Saadaan yhtälö

$$|t| = 6 \qquad \Big|\ |a| = b,\ b > 0 \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b$$
$$t = \pm 6$$

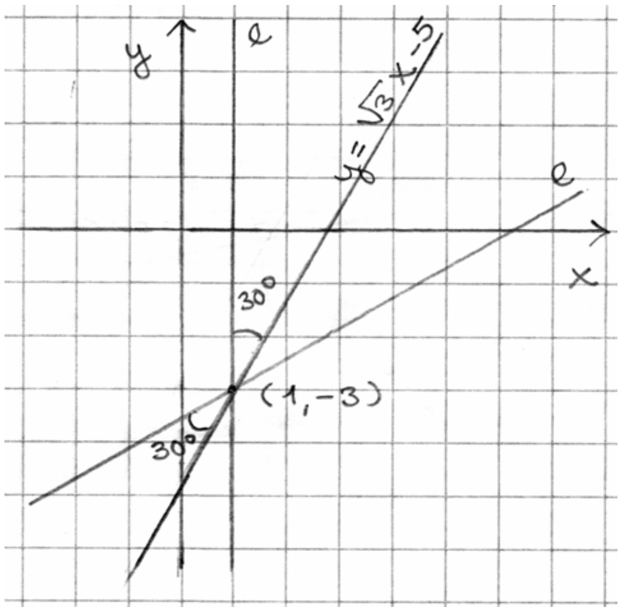
Koska $l_1 \perp l_2$, on $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Saadaan yhtälö

$$k \cdot (-2k) = -1$$
$$-2k^2 = -1$$
$$k^2 = \frac{1}{2}$$
$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vastaus $\quad t = 6$ ja $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ tai $t = -6$ ja $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

543



Merkitään k on suoran l kulmakerroin.

Suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| (x_0, y_0) = (1, -3) \right.$$
$$y + 3 = k(x - 1)$$
$$y = kx - k - 3$$

Suorien välinen kulma saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \qquad \left| k_1 = \sqrt{3},\ k_2 = k \ \text{ ja } \ \alpha = 30^\circ \right.$$

$$\tan 30^\circ = \left| \frac{\sqrt{3} - k}{1 + \sqrt{3} \cdot k} \right| \qquad \left| \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\left|\sqrt{3} - k\right|}{\left|1 + \sqrt{3}k\right|}$$

$$\left|1 + \sqrt{3}k\right| = \sqrt{3}\left|\sqrt{3} - k\right| \qquad \left| \sqrt{3} = \left|\sqrt{3}\right|,\ |a||b| = |ab| \right.$$

$$\left|1 + \sqrt{3}k\right| = \left|3 - \sqrt{3}k\right| \qquad \left| |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \ \text{ tai } \ a = -b \right.$$

$$1 + \sqrt{3}k = 3 - \sqrt{3}k \ \text{ tai } \ 1 + \sqrt{3} = -3 + \sqrt{3}k$$

$$2\sqrt{3}k = 2 \qquad \text{tai} \qquad 0 = -4 \quad \text{aina epätosi}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{tai} \qquad \text{ei ratkaisua}$$

Suoran yhtälö on

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} - 3 \quad \text{tai suora on pystysuora}$$
$$\sqrt{3}y = x - 1 - 3\sqrt{3} \qquad \text{tai} \qquad x = 1$$
$$x - \sqrt{3}y - 1 - 3\sqrt{3} = 0 \quad \text{tai} \qquad x = 1$$

Vastaus $\quad x - \sqrt{3}y - 1 - 3\sqrt{3} = 0$ tai $x = 1$

544

Määritetään suorien kulmakertoimet.

$$k_1 = \tan\alpha$$

$$k_1 = \tan 60^\circ \quad \Big| \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$k_1 = \sqrt{3} \qquad\qquad k_2 = k$$

Suorien välisen kulman tangentti on

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \quad \Big| k_1 = \sqrt{3},\ k_2 = k \text{ ja } \alpha = 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ = \left|\frac{\sqrt{3} - k}{1 + \sqrt{3}\cdot k}\right| \quad \Big| \tan 45^\circ = 1,\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$1 = \left|\frac{\sqrt{3} - k}{1 + \sqrt{3}\cdot k}\right|$$

$$\left|1 + \sqrt{3}k\right| = \left|\sqrt{3} - k\right| \quad \Big| |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b$$

$$1 + \sqrt{3}k = \sqrt{3} - k \quad \text{tai} \quad 1 + \sqrt{3}k = -\left(\sqrt{3} - k\right)$$

$$\sqrt{3}k + k = \sqrt{3} - 1 \quad \text{tai} \quad \sqrt{3}k - k = -\sqrt{3} - 1$$

$$\left(\sqrt{3} + 1\right)k = \sqrt{3} - 1 \quad \text{tai} \quad \left(\sqrt{3} - 1\right)k = -\sqrt{3} - 1$$

$$k = {}^{\sqrt{3}-1)}\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \quad \text{tai} \quad k = {}^{\sqrt{3}+1)}\frac{-\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\sqrt{3} - 1}$$

$$k = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} \quad \text{tai} \quad k = \frac{-\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2}$$

$$k = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} \quad \text{tai} \quad k = \frac{-\left(3 + 2\sqrt{3} + 1\right)}{3 - 1}$$

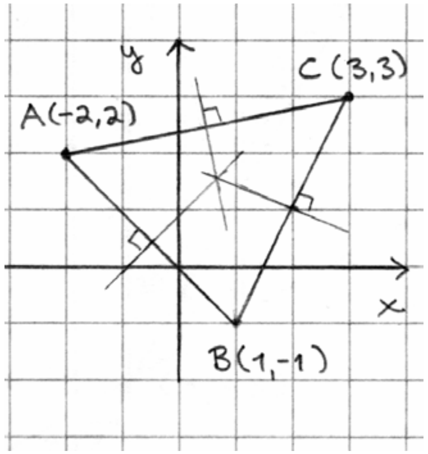
$$k = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \quad \text{tai} \quad k = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 2 - \sqrt{3} \quad \text{tai} \quad k = -2 - \sqrt{3}$$

Vastaus Toisen suoran kulmakerroin on $2 - \sqrt{3}$ tai $-2 - \sqrt{3}$.

545

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste.
Merkitään keskipistettä $K=(x,y)$ ja kolmion kärkiä $A=(-2,2)$, $B=(1,-1)$ ja $C=(3,3)$.
Piirretään mallikuva.



Määritetään sivujen keskinormaalien yhtälöt.

1) Sivu AB

Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{2-(-1)}{-2-1}=\frac{3}{-3}=-1$$

Janan AB keskipisteen koordinaatit ovat

$$x=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$$

Normaali kulkee siis pisteen $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ kautta.

Normaali $n\perp AB$, joten $k_n\cdot k_{AB}=-1$ eli $k_n=-\frac{1}{k_{AB}}=1$.

Keskinormaalin yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0) \quad \Big| \; k=1,\ (x_0,y_0)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$y-\frac{1}{2}=1\cdot\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$y-\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}$$

$$y=x+1$$

$$x-y+1=0$$

2) Sivu BC

Kulmakerroin on

$$k_{BC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{-1-3}{1-3}=2$$

Keskipiste on

$$x=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

$$y=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$$

Normaali kulkee siis pisteen $(2,1)$ kautta.

Normaalin kulmakerroin on $k_n = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{2}$.

Keskinormaalin yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| k = -\frac{1}{2},\ (x_0, y_0) = (2,1)\right.$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 2)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \qquad | \cdot 2$$

$$x + 2y - 4 = 0$$

3) Sivu AC

Kulmakerroin on

$$k_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{2-3}{-2-3} = \frac{1}{5}$$

Keskipiste on

$$x = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

Normaali kulkee siis pisteen $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ kautta

Normaalin kulmakerroin on $k_n = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{1}{\frac{1}{5}} = -5$.

Keskinormaalin yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| k = -5,\ (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)\right.$$

$$y - \frac{5}{2} = -5 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y - \frac{5}{2} = -5x + \frac{5}{2}$$

$$y = -5x + 5$$

$$5x + y - 5 = 0$$

Sivujen keskinormaalien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \\ 5x + y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{|l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \cdot (-1) \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$+\begin{cases} 2x - 2y + 2 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \qquad +\begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$3x - 2 = 0 \qquad 3y - 5 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \qquad y = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Tarkistetaan toteuttaako saatu ratkaisu myös yhtälön (3).

Kun $x=\frac{2}{3}$ ja $y=1\frac{2}{3}$, yhtälön $5x+y-5=0$

vasen puoli on $5\cdot\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}-5=\frac{10}{3}+\frac{5}{3}-5=0$ ja

oikea puoli on 0

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $x=\frac{2}{3}$ ja $y=1\frac{2}{3}$.

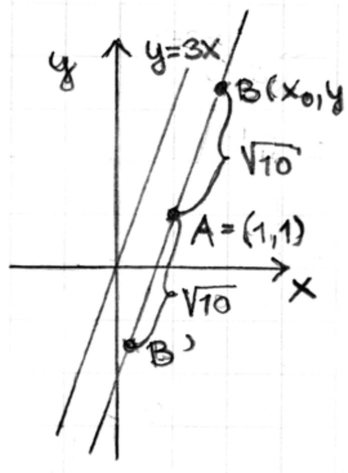
Kolmion *ABC* ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on $\left(\frac{2}{3},1\frac{2}{3}\right)$.

Vastaus Ympyrän keskipiste on $\left(\frac{2}{3},1\frac{2}{3}\right)$.

Huomautus:
Keskipisteen määrittämiseksi olisi riittänyt ratkaista kahden keskinormaalin leikkauspiste, sillä kolmion keskinormaalit leikkaavat toisensa aina samassa pisteessä.

546

Piirretään mallikuva.
Janan *AB* kautta kulkevan suoran kulmakerroin on



$k_{AB}=3$

Pisteiden *A* ja *B* kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad \left|(x_0,y_0)=(1,1),\ k=3\right.$$
$$y-1=3(x-1)$$
$$y=3x-2$$

Piste *B* on suoralla $y=3x-2$, joten pisteen *B* koordinaatit ovat x_1 ja $y_1=3x_1-2$ eli $B=(x_1,3x_1-2)$.

Janan AB pituus on
$$|AB|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+(3x_1-2-1)^2},$$

joten saadaan yhtälö

$$\underbrace{\sqrt{(x_1-1)^2+(3x_1-3)^2}}_{\geq 0}=\underbrace{\sqrt{10}}_{\geq 0} \qquad |(\ )^2$$

$$x_1^2-2x_1+1+9x_1^2-18x_1+9=10$$

$$10x_1^2-20x_1+10=10$$

$$10x_1(x_1-2)=0 \qquad |\text{Tulon nollasääntö}$$

$10x_1=0$ tai $x_1-2=0$

$x_1=0$ tai $x_1=2$ $\quad |y_1=3x_1-2$

$y_1=3\cdot 0-2$ $\quad$ $y_1=3\cdot 2-2$

$y_1=-2$ $\quad$ $y_1=4$

Siis piste B on $(0,-2)$ tai $(2,4)$.

Vastaus Janan loppupiste on $(0,-2)$ tai $(2,4)$.

547

Määritetään suorien kulmakertoimet ja vakiotermit muuntamalla suoran yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$l_1:\quad a^2x-3x-2y+1=0$

$$2y=a^2x-3x+1$$

$$2y=(a^2-3)x+1 \quad |:2$$

$$y=\frac{a^2-3}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$k_1=\frac{a^2-3}{2} \text{ ja } b_1=\frac{1}{2}$$

$l_2:\quad ay+x-2=0$

$$ay=-x+2$$

1) Jos $a\neq 0$, niin suoran l_2 yhtälö voidaan jakaa luvulla a.

$$ay=-x+2 \qquad \left|:a,\ a\neq 0.\right.$$

Tapaus $a=0$ on tutkittava erikseen.

$$y=-\frac{1}{a}x+\frac{2}{a}$$

$$k_2=-\frac{1}{a} \text{ ja } b_2=\frac{2}{a}$$

a)
Suorat l_1 ja l_2 ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun $k_1 \cdot k_2 = -1$. Saadaan yhtälö

$$\frac{a^2-3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -1 \qquad \Big| \cdot (-2a)$$

$$a^2 - 3 = 2a$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$a = -1$ tai $a = 3$

Kelpaavat, koska ehto $a \neq 0$ toteutuu.

Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun $a = -1$ tai $a = 3$.

b)
Suorat l_1 ja l_2 ovat yhdensuuntaiset, mutta eivät yhdy, kun $k_1 = k_2$ ja $b_1 \neq b_2$.

$$\frac{a^2-3}{2} = \frac{1}{a} \qquad \text{ja} \qquad \frac{1}{2} \neq \frac{2}{a}$$

$$a^3 - 3a = -2 \qquad \text{ja} \qquad a \neq 4$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0$$

Etsitään kolmannen asteen yhtälön ratkaisut kokeilemalla.
Kolmannen asteen yhtälöllä on korkeintaan kolme reaaliratkaisua.

Kokeillaan, onko $a = 1$ yhtälön $a^3 - 3a + 2 = 0$ ratkaisu.
Yhtälön
vasen puoli on $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ ja
oikea puoli on 0

Siis $a = 1$ on yhtälön ratkaisu.

Kokeillaan, onko $a = -2$ yhtälön ratkaisu.
Yhtälön
vasen puoli on $(-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 2 = -8 + 6 + 2 = 0$ ja
oikea puoli on 0
Siis $a = -2$ on yhtälön ratkaisu.

Muita reaalijuuria ei löydy helposti, joten yritetään löytää kolmas juuri polynomin tekijöihin jaon avulla.

Kolmannen asteen polynomin $P(a) = a^3 - 3a + 2$ tekijöitä ovat $(a-1)$ ja $(a+2)$, sillä vastaavalle yhtälölle saatiin juuret $a = 1$ ja $a = -2$.

Koska korkeimman asteen termin kerroin on 1, on polynomin kolmas tekijä 1. astetta ja muotoa $a - x$. Siis

$$a^3 - 3a + 2 = (a-1)(a+2)(a-x)$$

$$a^3 - 3a + 2 = (a^2 + a - 2)(a-x)$$

$$a^3 - 3a + 2 = a^3 - a^2x + a^2 - ax - 2a + 2x$$

$$a^3 - 3a + 2 = a^3 + (1-x)a^2 + (-x-2)a + x \cdot 2$$

Yhtälön oikea ja vasen puoli ovat samat, jos termien kertoimet ovat samat. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1-x=0 \\ -x-2=-3 \\ x=1 \end{cases}$$

Kaikki yhtälöryhmän yhtälöt toteutuvat, kun $x=1$.
Siis kolmas tekijä on $(a-1)$ eli yhtälön $a^3-3a+2=0$ ratkaisut ovat $a=1$ ja $a=-2$ ($a=1$ on kaksinkertainen juuri).

Nämä kelpaavat, sillä myös ehdot $a \neq 0$ ja $a \neq 4$ toteutuvat.

Suorat ovat siis yhdensuuntaiset, mutta eivät yhdy, kun $a=1$ tai $a=-2$.

c)
Suorat l_1 ja l_2 yhtyvät, kun $k_1=k_2$ ja $b_1=b_2$.
Kohdan b) mukaan $k_1=k_2$, kun $a=-2$ tai $a=1$.

I Kun $a=-2$, niin $b_1=\dfrac{1}{2}$ ja $b_2=\dfrac{2}{-2}=-1$.
Arvo $a=-2$ ei kelpaa, sillä $b_1 \neq b_2$.

II Kun $a=1$, niin $b_1=\dfrac{1}{2}$ ja $b_2=2$.
Arvo $a=1$ ei kelpaa, sillä $b_1 \neq b_2$.

Suorat eivät siis yhdy millään luvun *a* arvolla.

2) Jos $a=0$, niin alkuperäisten suorien yhtälöt ovat

$$l_1: \quad -3x-2y+1=0$$
$$2y=-3x+1$$
$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$l_2: \quad x-2=0$$
$$x=2$$

Suora l_1 on vino ja suora l_2 on pystysuora, joten mikään kohdista a), b) tai c) ei toteudu.

Vastaus
a) $a=-1$ tai $a=3$
b) $a=-2$ tai $a=1$
c) ei millään luvun *a* arvolla

548

Määritetään suorien kulmakertoimet ja vakiotermit muuntamalla suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$$l_1: \quad ax+3x-by+3=0$$
$$(a+3)x+3=by$$
$$by=(a+3)x+3$$

1) Jos $b \neq 0$ niin suoran yhtälö voidaan jakaa luvulla *b*.

$$by=(a+3)x+3 \qquad \Big| :b,\ b\neq 0.$$
Tapaus b = 0 on tutkittava erikseen.

$$y=\frac{a+3}{b}x+\frac{3}{b} \qquad \Big|\ y=kx+b$$
$$k_1=\frac{a+3}{b} \text{ ja } b_1=\frac{3}{b}$$

$$l_2: \quad 2x-3y-4=0$$
$$2x-4=3y$$
$$y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$$
$$k_2=\frac{2}{3} \text{ ja } b_2=-\frac{4}{3}$$

$$l_3: \quad 6x-by+5=0$$

$$6x+5=by \qquad \Big| :b,\ b\neq 0.$$
Tapaus b = 0 on tutkittava erikseen.

$$y=\frac{6}{b}x+\frac{5}{b}$$
$$k_3=\frac{6}{b} \text{ ja } b_3=\frac{5}{b}$$

Suorat l_1 ja l_2 ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun $k_1 \cdot k_2=-1$. Saadaan yhtälö

$$\frac{a+3}{b}\cdot\frac{2}{3}=-1$$
$$\frac{2a+6}{3b}=-1$$
$$(1) \quad 2a+6=-3b$$

Suorat l_1 ja l_3 ovat yhdensuuntaiset, mutta eivät yhdy, kun $k_1=k_3$ ja $b_1 \neq b_3$. Saadaan yhtälö

$$\frac{a+3}{b}=\frac{6}{b} \quad \text{ja} \quad \frac{3}{b}\neq\frac{5}{b}$$
$$(a+3)b=6b \quad \text{ja} \quad 3b\neq 5b$$
$$ab+3b=6b \quad \text{aina tosi}$$
$$(2) \quad ab-3b=0$$

Ratkaistaan yhtälöiden (1) ja (2) muodostama yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}2a+6=-3b\\ab-3b=0\end{cases} \quad \big| \text{ Ratkaistaan } a.$$

$$\begin{aligned}ab-3b&=0\\ b(a-3)&=0 && \big|\, b\neq 0\\ a-3&=0\\ a&=3 && \big|\text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\cdot 3+6&=-3b\\ 12&=-3b\\ b&=-4\end{aligned}$$

Koska ratkaisu $\begin{cases}a=3\\b=-4\end{cases}$ toteuttaa myös ehdon $b\neq 0$, niin näillä arvoilla suora $l_1 \perp l_2$ ja $l_1 \parallel l_3$.

2) Jos $b=0$, niin alkuperäisten suorien yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}l_1:\quad ax+3x+3&=0\\ (a+3)x&=-3\\ x&=-\frac{3}{a+3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_2:\quad 2x-3y-4&=0\\ y&=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_3:\quad 6x+5&=0\\ x&=-\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Suorat l_1 ja l_3 ovat pystysuoria ja suora l_2 on nouseva suora, joten arvolla $b=0$ ei toteudu $l_1 \perp l_2$ ja $l_1 \parallel l_3$.

Vastaus $\begin{cases}a=3\\b=-4\end{cases}$