Luku 5 päivitetty tehtäviä

22.2.2006 Alkuperäinen versio

549

a) Pisteen $(-5,-2)$ etäisyys suorasta $8x-6y+3=0$ on

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \left| \begin{array}{l} a=8,\ b=-6,\ c=3 \\ x_0=-5,\ y_0=-2 \end{array} \right.$$

$$=\frac{|8\cdot(-5)-6\cdot(-2)+3|}{\sqrt{8^2-(-6)^2}}=\frac{|-40+12+3|}{\sqrt{64+36}}$$

$$=\frac{25}{10}=2\frac{1}{2}$$

b) Muunnetaan suoran yhtälö yleiseen muotoon.

$$y=\frac{1}{2}x-7 \qquad |\cdot 2$$

$$2y=x-14$$

$$x-2y-14=0$$

Pisteen $(-5,-2)$ etäisyys suorasta $x-2y-14=0$ on

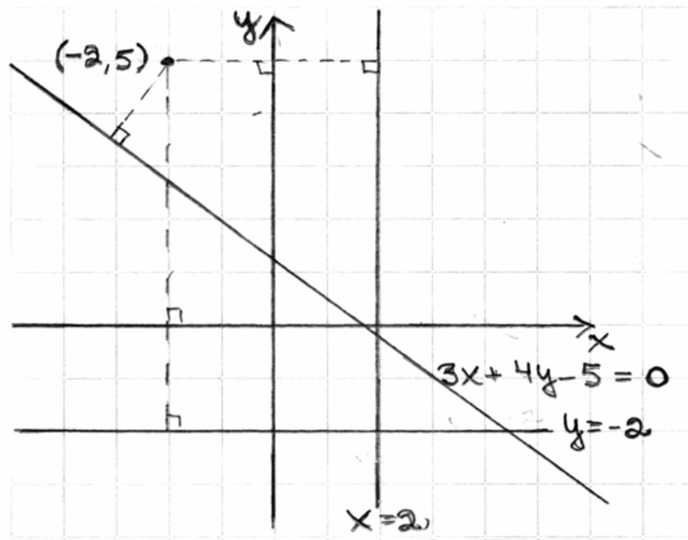
$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \left| \begin{array}{l} a=1,\ b=-2,\ c=-14 \\ x_0=-5,\ y_0=-2 \end{array} \right.$$

$$=\frac{|1\cdot(-5)-2\cdot(-2)-14|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{|-15|}{\sqrt{5}}={}^{\sqrt{5})}\frac{15}{\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{5}}{5}=3\sqrt{5}$$

Vastaus a) Etäisyys on $2\frac{1}{2}$. b) Etäisyys on $3\sqrt{5}$.

550



a) Etäisyys x-akselista on sama kuin pisteen y-koordinaatin itseisarvo $|5|=5$.

b) Etäisyys y-akselista on sama kuin pisteen y-koordinaatin itseisarvo $|-2|=2$.

c) Etäisyys suorasta $x=2$ on lukujen 2 ja -2 erotuksen itseisarvo eli $|\Delta x|=|2-(-2)|=4$.

d) Etäisyys suorasta $y=-2$ on lukujen -2 ja 5 erotuksen itseisarvo eli $|\Delta y|=|-2-5|=7$.

e)

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \left| \begin{array}{l} a=3,\ b=4,\ c=-5 \\ x_0=-2,\ y_0=5 \end{array} \right.$$

$$=\frac{|3\cdot(-2)+4\cdot 5-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$$

Vastaus a) 5 b) 2 c) 4 d) 7 e) $1\frac{4}{5}$

551

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -2x - 3 \end{cases} \qquad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$\begin{aligned} x + 3 &= -2x - 3 \\ 3x &= -6 \\ x &= -2 \qquad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1). \end{aligned}$$

$$y = -2 + 3 = 1$$

Leikkauspiste on siis $(-2,1)$.

Muunnetaan suoran yhtälö yleiseen muotoon.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \qquad \Big| \cdot 2 \\ 2y &= x - 1 \\ x - 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Leikkauspisteen $(-2,1)$ etäisyys suorasta $x - 2y - 1 = 0$ on

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \Bigg| \begin{array}{l} a = 1, \ , b = -2, \ c = -1 \\ x_0 = -2, \ y_0 = 1 \end{array}$$

$$= \frac{|1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = {}^{\sqrt{5})}\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Vastaus Etäisyys on $\sqrt{5}$.

552

Normaali on kohtisuorassa suoraa $y = \frac{1}{3}x + 2$ vastaan, joten

$$k_n \cdot k = -1 \text{ eli } k_n = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$$

Normaalin yhtälö on

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \qquad \Big| \, (x_0, y_0) = (2, -1),\ k = -3 \\ y - (-1) &= -3(x - 2) \\ y + 1 &= -3x + 6 \\ y &= -3x + 5 \\ 3x + y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

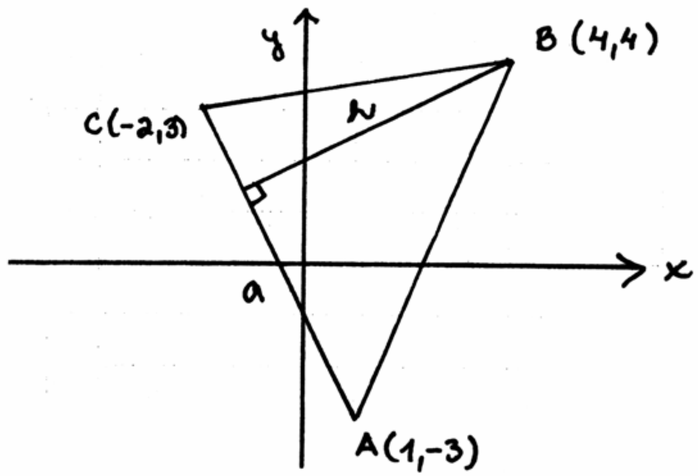
Pisteen $(8,2)$ etäisyys suorasta $3x + y - 5 = 0$ on

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \Big| \begin{array}{l} a = 3,\ b = 1,\ c = -5 \\ x_0 = 8,\ y_0 = 2 \end{array} \\ &= \frac{|3 \cdot 8 + 1 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|21|}{\sqrt{10}} \overset{\sqrt{10})}{=} \frac{21}{\sqrt{10}} = \frac{21\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

Vastaus Etäisyys on $\frac{21\sqrt{10}}{10}$.

553

Piirretään mallikuva.



Valitaan kannaksi sivu $AC = a$. Sivun a pituus on

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ &= \sqrt{(-2-1)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

a) Korkeus h on pisteen B etäisyys kannasta eli pisteiden A ja C kautta kulkevasta suorasta.

Suoran kulmakerroin on $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-(-3)}{-2-1} = \frac{6}{-3} = -2$

Suoran yhtälö on

$$
\begin{aligned}
y - y_0 &= k(x - x_0) \qquad \Big|\ (x_0, y_0) = (-2,3),\ k = -2 \\
y - 3 &= -2(x+2) \\
y - 3 &= -2x - 4 \\
2x + y + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Pisteen $(4,4)$ etäisyys suorasta $2x + y + 1 = 0$ on

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \Big|\ a = 2,\ b = 1,\ c = 1;\ x_0 = 4,\ y_0 = 4$$

$$= \frac{|2 \cdot 4 + 4 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \overset{\sqrt{5})}{=} \frac{13}{\sqrt{5}} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$$

b) Kolmion ABC pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{13}{\sqrt{5}} = \frac{39}{2} = 19\frac{1}{2}$$

Vastaus a) Korkeus on $\frac{13}{\sqrt{5}} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$.

b) Ala on $19\frac{1}{2}$ (pay).

554

Tapa 1

Olkoon (x_0, y_0) piste, jonka etäisyys suorasta $3x + 4y - 4 = 0$ on 2.

Piste (x_0, y_0) toteuttaa yhtälön

$$\frac{|3x_0 + 4y_0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\frac{|3x_0 + 4y_0 - 4|}{5} = 2$$

$$|3x_0 + 4y_0 - 4| = \underbrace{10}_{\geq 0} \qquad \Big|\ \text{Jos } b \geq 0, \text{ niin } |a| = b \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b$$

$$3x_0 + 4y_0 - 4 = 10 \quad \text{tai} \quad 3x_0 + 4y_0 - 4 = -10$$

$$3x_0 + 4y_0 - 14 = 0 \quad \text{tai} \quad 3x_0 + 4y_0 + 6 = 0$$

Ratkaisuna ovat täsmälleen ne pisteet (x_0, y_0), jotka toteuttavat yhtälön $3x_0 + 4y_0 - 14 = 0$ tai $3x_0 + 4y_0 + 6 = 0$.
Jos ratkaisupistettä merkitään (x, y), niin ratkaisuna ovat suorat $3x + 4y - 14 = 0$ ja $3x + 4y + 6 = 0$.

Tapa 2

Pisteet, joiden etäisyys suorasta $3x + 4y - 4 = 0$ on 2, muodostavat kaksi tämän suoran kanssa yhdensuuntaista suoraa. Kaikkien suoran $3x + 4y - 4 = 0$ kanssa yhdensuuntaisten suorien yhtälöt ovat muotoa $3x+4y+c=0,\ c\in\mathbb{R}$, koska niillä on sama kulmakerroin $k=-\dfrac{3}{4}$.

Määritetään sellainen vakio c, että suorien välinen etäisyys on 2.
Valitaan suoralta $3x+4y-4=0$ jokin piste.
Kun $x=0$ niin $y=1$, joten piste $(0,1)$ on suoran piste. Koska pisteen $(0,1)$ etäisyys suorasta $3x+4y+c=0$ on 2, saadaan yhtälö

$$\frac{|3\cdot 0+4\cdot 1+c|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$$\frac{|4+c|}{5}=2$$

$$|4+c|=\underbrace{10}_{\geq 0} \qquad \Big|\ \text{Jos } b\geq 0, \text{ niin } |a|=b \Leftrightarrow a=b \text{ tai } a=-b$$

$$4+c=10 \quad \text{tai} \quad 4+c=-10$$

$$c=6 \quad \text{tai} \quad c=-14$$

Suorien yhtälöt ovat $3x+4y+6=0$ ja $3x+4y-14=0$.

Vastaus Pistejoukko muodostuu kahdesta suorasta, joiden yhtälöt ovat $3x+4y-14=0$ ja $3x+4y+6=0$.

555

Koveran kulman puolittajan mielivaltainen piste (x_0, y_0) on yhtä etäällä kulman kyljistä. Saadaan yhtälö

$$\frac{|8x_0+y_0-1|}{\sqrt{8^2+1^2}}=\frac{|7x_0-4y_0+3|}{\sqrt{7^2+(-4)^2}}$$

$$\frac{|8x_0+y_0-1|}{\sqrt{65}}=\frac{|7x_0-4y_0+3|}{\sqrt{65}} \qquad \Big|\cdot\sqrt{65}$$

$$|8x_0+y_0-1|=|7x_0-4y_0+3| \qquad \Big|\ |a|=|b| \Leftrightarrow a=b \text{ ja } a=-b$$

$$8x_0+y_0-1=7x_0-4y_0+3 \quad \text{tai} \quad 8x_0+y_0-1=-(7x_0-4y_0+3)$$

$$x_0+5y_0-4=0 \quad \text{tai} \quad 15x_0-3y_0+2=0$$

Ratkaisuna ovat täsmälleen ne pisteet (x_0, y_0), jotka toteuttavat yhtälön $x_0+5y_0-4=0$ tai $15x_0-3y_0+2=0$.
Jos ratkaisupistettä merkitään (x, y), niin ratkaisuna ovat suorat $x+5y-4=0$ ja $15x-3y+2=0$.

Vastaus Suorat ovat $x+5y-4=0$ ja $15x-3y+2=0$.

556

Muunnetaan suoran $y=\frac{3}{4}x$ yhtälö yleiseen muotoon.

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{3}{4}x \qquad \big| \cdot 4\\
4y&=3x\\
3x-4y&=0
\end{aligned}
$$

Koveran kulman puolittajan mielivaltainen piste (x_0, y_0) on yhtä etäällä kulman kyljistä. Saadaan yhtälö

$$\frac{|3x_0-4y_0|}{\sqrt{3^2+(-4^2)}}=\frac{|4x_0-3y_0+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

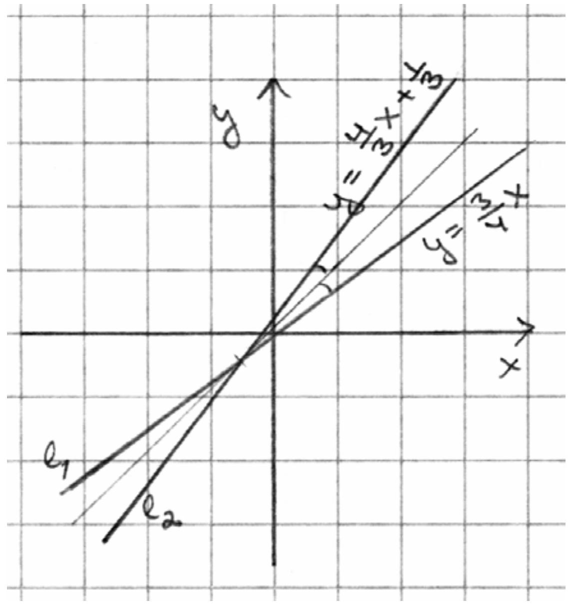
$$\frac{|3x_0-4y_0|}{5}=\frac{|4x_0-3y_0+1|}{5} \qquad \big| \cdot 5$$

$$|3x_0-4y_0|=|4x_0-3y_0+1| \qquad \left|\; \begin{aligned}&|a|=|b| \Leftrightarrow\\ &a=b \text{ tai } a=-b\end{aligned}\right.$$

$$
\begin{aligned}
3x_0-4y_0&=4x_0-3y_0+1 &&\text{tai} \quad 3x_0-4y_0=-(4x_0-3y_0+1)\\
-x_0-y_0-1&=0 &&\text{tai} \quad 7x_0-7y_0+1=0\\
x_0+y_0+1&=0 &&\text{tai} \quad 7x_0-7y_0+1=0
\end{aligned}
$$

Jos ratkaisupistettä merkitään (x, y), niin ratkaisuina ovat suorat $x+y+1=0$ ja $7x-7y+1=0$ eli suorat $y=-x-1$ ja ja $y=x+\frac{1}{7}$.

Suorien välinen kulma on muodostuvista kulmista pienin, joten tutkitaan kumpi saaduista kulmanpuolittajista kelpaa ratkaisuksi. Piirretään mallikuva.



Lasketaan suorien kulmakertoimet.

$l_1: \quad y=\frac{3}{4}x \qquad\qquad l_2: \quad 4x-3y+1=0$

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$$

$k_1=\frac{3}{4} \qquad\qquad k_2=\frac{4}{3}$

Tapa 1

Suorien suuntakulmat saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = k$.

$$\tan\alpha_1 = \frac{3}{4} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{4}{3}$$

$$\alpha_1 = 36{,}869...^\circ \qquad \alpha_2 = 53{,}130...^\circ$$

Suorien välinen kulma on

$$\begin{aligned}\sphericalangle(l_1, l_2) &= \alpha_2 - \alpha_1 = 53{,}130...^\circ - 36{,}869...^\circ \\ &= 16{,}260...^\circ \approx 16^\circ\end{aligned}$$

Tapa 2

Suorien välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| \qquad \left| k_1 = \frac{3}{4},\ k_2 = \frac{4}{3}\right.$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}\right| = \left|\frac{-\frac{7}{12}}{2}\right| = \frac{7}{24}$$

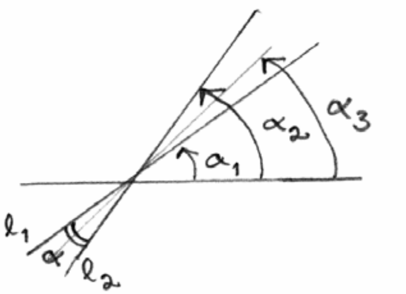
$$\sphericalangle(l_1, l_2) = \alpha = 16{,}260...^\circ \approx 16^\circ$$

Suorien l_1 ja l_2 välinen kulma on muodostuvista kulmista pienin eli $\sphericalangle(l_1, l_2) \approx 16^\circ$.

Pienimmän kulman puolittaja on suora $y = x + \frac{1}{7}$ eli $7x - 7y + 1 = 0$, sillä voidaan päätellä, että kulmanpuolittajan on oltava nouseva suora:

Kulmanpuolittajan suuntakulma α_3 on

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= \alpha_1 + \frac{\sphericalangle(l_1, l_2)}{2} \\ &= 36{,}869...^\circ + 8{,}130...^\circ \\ &= 45^\circ\end{aligned}$$



Toisaalta suoran suuntakulma saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = k$, joten kulmanpuolittajan kulmakerroin on

$$k = \tan\alpha_3$$

$$k = \tan 45^\circ$$

$$k = 1$$

Siis kysytty kulmanpuolittaja on suora $7x - 7y + 1 = 0$

Vastaus Kulmanpuolittaja on $7x - 7y + 1 = 0$.

557

Koveran kulman puolittajan mielivaltainen piste (x_0, y_0) on yhtä etäällä kulman kyljistä. Saadaan yhtälö

$$\frac{|2x_0-2y_0+5|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{|5x_0+5y_0-7|}{\sqrt{5^2+5^2}}$$

$$\frac{|2x_0-2y_0+5|}{\sqrt{8}}=\frac{|5x_0+5y_0-7|}{\sqrt{50}}$$

$$\frac{|2x_0-2y_0+5|}{2\sqrt{2}}=\frac{|5x_0+5y_0-7|}{5\sqrt{2}} \qquad \Big|\cdot 10\sqrt{2}$$

$$5|2x_0-2y_0+5|=2|5x_0+5y_0-7| \qquad \Big|\ |5|=5,\ |2|=2$$

$$|5||2x_0-2y_0+5|=|2||5x_0+5y_0-7| \qquad \Big|\ |a||b|=|ab|$$

$$|10x_0-10y_0+25|=|10x_0+10y_0-14| \qquad \Big|\ |a|=|b| \Leftrightarrow a=\pm b$$

$$10x_0-10y_0+25=\pm(10x_0+10y_0-14)$$

$$-20y_0=-39 \quad \text{tai} \quad 20x_0=-11$$

$$y_0=\frac{39}{20}=1\frac{19}{20} \quad \text{tai} \quad x_0=-\frac{11}{20}$$

Ratkaisuna ovat täsmälleen ne pisteet (x_0, y_0), jotka toteuttavat yhtälön $y_0=1\frac{19}{20}$ tai $x_0=-\frac{11}{20}$. Jos ratkaisupistettä merkitään (x, y), niin ratkaisuna ovat suorat $y=1\frac{19}{20}$ ja $x=-\frac{11}{20}$.

Vastaus Suorat ovat $y=1\frac{19}{20}$ ja $x=-\frac{11}{20}$.

558

Muunnetaan suorien yhtälöt yleiseen muotoon.

$$y=\frac{x+8}{2} \qquad\qquad y=-\frac{1}{2}x+2$$

$$2y=x+8 \qquad\qquad 2y=-x+4$$

$$x-2y+8=0 \qquad\qquad x+2y-4=0$$

Koveran kulman puolittajan mielivaltainen piste (x_0, y_0) on yhtä etäällä kulman kyljistä. Saadaan yhtälö

$$\frac{|x_0-2y_0+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|x_0+2y_0-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} \qquad \Big|\cdot\sqrt{5}$$

$$|x_0-2y_0+8|=|x_0+2y_0-4| \qquad \Big|\ |a|=|b| \Leftrightarrow a=b \ \text{ tai } \ a=-b$$

$$x_0-2y_0+8=x_0+2y_0-4 \quad \text{tai} \quad x_0-2y_0+8=-(x_0+2y_0-4)$$

$$x_0-2y_0+8=x_0+2y_0-4 \quad \text{tai} \quad x_0-2y_0+8=-x_0-2y_0+4$$

$$-4y_0=-12 \quad \text{tai} \quad 2x_0=-4$$

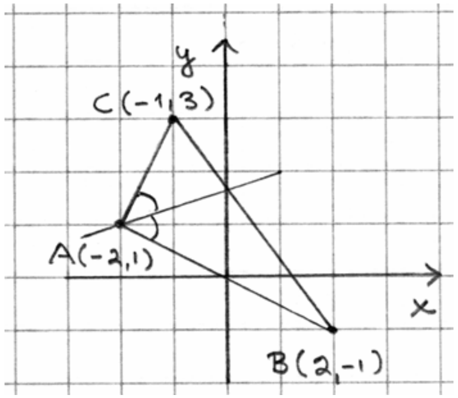
$$y_0=3 \quad \text{tai} \quad x_0=-2$$

Ratkaisuna ovat täsmälleen ne pisteet (x_0, y_0), jotka toteuttavat yhtälön $y_0=3$ tai $x_0=-2$. Jos ratkaisupistettä merkitään (x, y), niin ratkaisuna ovat suorat $y=3$ ja $x=-2$.

Vastaus Kulmien puolittajina ovat suorat $y=3$ ja $x=-2$.

559

Piirretään mallikuva.



Tapa 1

Määritetään pisteiden A ja C sekä pisteiden A ja B kautta kulkevien suorien l_1 ja l_2 yhtälöt.
Suorien kulmakertoimet ovat

$$l_1: \quad k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3-1}{-1-(-2)} = 2$$

$$l_2: \quad k_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-1}{2-(-2)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Suoran l_1 yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| k = 2,\ (x_0, y_0) = (-2,1) \right.$$

$$y - 1 = 2(x - (-2))$$

$$y - 1 = 2(x + 2)$$

$$y = 2x + 4 + 1$$

$$y = 2x + 5$$

$$2x - y + 5 = 0$$

Suoran l_2 yhtälö on

$$\left| \begin{array}{l} y - y_0 = k(x - x_0) \\ k = -\frac{1}{2},\ (x_0, y_0) = (-2,1) \end{array} \right.$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$

$$x + 2y = 0$$

Koveran kulman puolittajien mielivaltainen piste (x_0, y_0) on yhtä etäällä kulman kyljistä. Saadaan yhtälö

$$\frac{|2x_0 - y_0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|x_0 + 2y_0|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \qquad \left| \cdot \sqrt{5} \right.$$

$$|2x_0 - y_0 + 5| = |x_0 + 2y_0| \qquad \left| \, |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b \right.$$

$$2x_0 - y_0 + 5 = x_0 + 2y_0 \text{ tai } 2x_0 - y_0 + 5 = -(x_0 + 2y_0)$$

$$2x_0 - y_0 + 5 = x_0 + 2y_0 \text{ tai } 2x_0 - y_0 + 5 = -x_0 - 2y_0$$

$$x_0 - 3y_0 + 5 = 0 \qquad \text{tai} \quad 3x_0 + y_0 + 5 = 0$$

Suorien l_1 ja l_2 muodostamien kulmien puolittajat ovat siis suorat $x-3y+5=0$ ja $3x+y+5=0$ eli suorat

$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ ja $y=-3x-5$.

Kolmion ABC kulman BAC puolittaja on kolmion sisällä, joten valitaan saaduista kulmanpuolittajista se, jonka kulmakertoimen arvo on suorien l_1 ja l_2 kulmakertoimien arvojen välissä eli välillä $\left]-\frac{1}{2},2\right[$.

$$\frac{1}{3}\in\left]-\frac{1}{2},2\right[\quad \text{ja} \quad -3\notin\left]-\frac{1}{2},2\right[\text{, joten}$$

kulman BAC puolittaja on suora $x-3y+5=0$.

Tapa 2

Määritetään pisteiden A ja C sekä pisteiden A ja B kautta kulkevien suorien l_1 ja l_2 kulmakertoimet.

$$l_1: \quad k_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{3-1}{-1-(-2)}=2$$

$$l_2: \quad k_2=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1-1}{2-(-2)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Koska $k_1\cdot k_2=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$, ovat $l_1\perp l_2$.

Kulman BAC puolittaja muodostaa siis kulman $\frac{90^\circ}{2}=45^\circ$ suorien l_1 ja l_2 kanssa. Merkitään kulmanpuolittajasuoran kulmakerrointa kirjaimella k. Kulmanpuolittajasuoran yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad \left|\, k=k,\ (x_0,y_0)=(-2,1)\right.$$

$$y-1=k(x-(-2))$$

$$y=kx+2k+1$$

$$kx-y+2k+1=0$$

Suorien välisen kulman α tangentti on

$$\tan\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| \qquad \left|\, \alpha=45^\circ,\ k_1=2,\ k_2=k\right.$$

$$\tan 45^\circ=\left|\frac{2-k}{1+2k}\right| \qquad \left|\, \tan 45^\circ=1,\ \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\right.$$

$$1=\frac{|2-k|}{|1+2k|}$$

$$|1+2k|=|2-k| \qquad \left|\, |a|=|b|\Leftrightarrow a=b \text{ tai } a=-b\right.$$

$$1+2k=2-k \quad \text{tai} \quad 1+2k=-(2-k)$$

$$1+2k=2-k \quad \text{tai} \quad 1+2k=-2+k$$

$$3k=1 \quad \text{tai} \quad k=-3$$

$$k=\frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad k=-3$$

Kolmion *ABC* kulman *BAC* puolittaja on kolmion sisällä, joten valitaan saaduista kulmanpuolittajista se, jonka kulmakertoimen arvo on suorien l_1 ja l_2 kulmakertoimien arvojen välissä eli välillä $\left]-\frac{1}{2},2\right[$.

$$\frac{1}{3}\in\left]-\frac{1}{2},2\right[\quad \text{ja} \quad -3\notin\left]-\frac{1}{2},2\right[\text{, joten}$$

kulman *BAC* puolittaja on suora

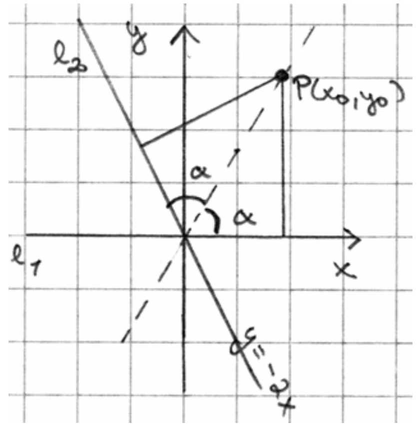
$y=\frac{1}{3}x+2\cdot\frac{1}{3}+1$ eli $x-3y+5=0$.

Vastaus Kulmanpuolittaja on $x-3y+5=0$.

560

Tapa 1

Muunnetaan suorien yhtälöt yleiseen muotoon.



l_1: x – akseli eli suora $y=0$

l_2: $y=-2x$ eli suora $2x+y=0$

Koveran kulman puolittajan mielivaltainen piste (x_0,y_0) on yhtä etäällä kulman kyljistä. Saadaan yhtälö

$$\frac{|2x_0+y_0|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|y_0|}{\sqrt{0^2+1^2}} \qquad \Big|\cdot\sqrt{5}$$

$$|2x_0+y_0|=\sqrt{5}\,|y_0| \qquad \Big|\ \sqrt{5}=|\sqrt{5}|,\ |a||b|=|ab|$$

$$|2x_0+y_0|=|\sqrt{5}y_0| \qquad \Big|\ |a|=|b|\Leftrightarrow a=b \text{ tai } a=-b$$

$$2x_0+y_0=\sqrt{5}y_0 \quad \text{tai} \quad 2x_0+y_0=-\sqrt{5}y_0$$

$$2x_0+y_0-\sqrt{5}y_0=0 \quad \text{tai} \quad 2x_0+y_0+\sqrt{5}y_0=0$$

$$2x_0+\left(1-\sqrt{5}\right)y_0=0 \quad \text{tai} \quad 2x_0+\left(1+\sqrt{5}\right)y_0=0$$

Suorien l_1 ja l_2 muodostamien kulmien puolittajat ovat siis suorat

$$2x+\left(1-\sqrt{5}\right)y=0 \qquad \text{ja} \qquad 2x+\left(1+\sqrt{5}\right)y=0$$

$$y=-\frac{2}{1-\sqrt{5}}x \qquad \text{ja} \qquad y=-\frac{2}{1+\sqrt{5}}x$$

$$y=-\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{1^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}x \qquad \text{ja} \qquad y=-\frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}x$$

$$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x \qquad \text{ja} \qquad y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$$

Kysytty tylpän kulman puolittaja on nouseva suora, joten saaduista kulmanpuolittajista vain $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$ kelpaa, sillä sen kulmakerroin on positiivinen.

Suora $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$ on tylpän kulman vieruskulman puolittaja.

Kulmanpuolittajasuoran kulmakerroin on

$k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}61803...\approx 1{,}62$.

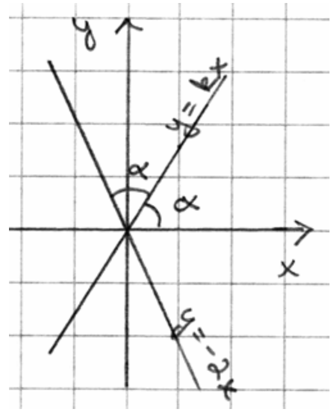
Tapa 2

Merkitään kysyttyä kulmakerrointa kirjaimella k.

Tällöin kulmanpuolittajansuoran yhtälö on

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right) \qquad \left|\, k=k,\ \left(x_0,y_0\right)=(0,0)\right.$$
$$y-0=k(x-0)$$
$$y=kx$$

Piirretään mallikuva.



Olkoon suoran $y=kx$ suuntakulma α. Tällöin $k=\tan\alpha$ ja $k>0$, sillä kysytty tylpän kulman puolittaja on nouseva suora. Suorien $y=kx$ ja $y=-2x$ välinen kulma on myös α, sillä suora $y=kx$ puolittaa tylpän kulman.

Suorien välisen kulman α tangentti on

$$\tan\alpha=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| \qquad \left|\, \begin{array}{l}\tan\alpha=k\\ k_1=k,\ k_2=-2\end{array}\right.$$

$$k=\left|\frac{k-(-2)}{1+k\cdot(-2)}\right|$$

$$|k|=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|$$

$$|k||1-2k|=|k+2| \qquad \left|\ |a||b|=|ab|\right.$$

$$\left|k-2k^2\right|=|k+2| \qquad \left|\ |a|=|b| \Leftrightarrow a=b \ \text{ tai } \ a=-b\right.$$

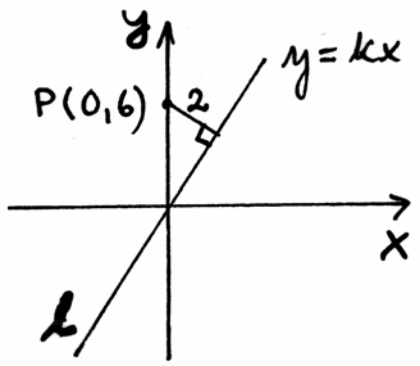
$$k-2k^2=k+2 \quad \text{tai} \quad k-2k^2=-(k+2)$$
$$k-2k^2=k+2 \quad \text{tai} \quad k-2k^2=-k-2$$
$$-2k^2=2 \quad \text{tai} \quad 2k^2-2k-2=0 \quad |:2$$
$$k^2=-1 \quad \text{tai} \quad k^2-k-1=0$$
$$\text{ei ratkaisua} \qquad k=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$$
$$k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0 \text{ kelpaa}$$
$$k=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0 \text{ ei kelpaa}$$

Kulmakerroin on siis $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,61803...\approx1,62$.

Vastaus Kulmakerroin on $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1,62$.

561

Origon kautta kulkevan suoran l yhtälö on



$$y=kx$$
$$kx-y=0$$

Pisteen $P(0,6)$ etäisyys suorasta l on 2, joten saadaan yhtälö

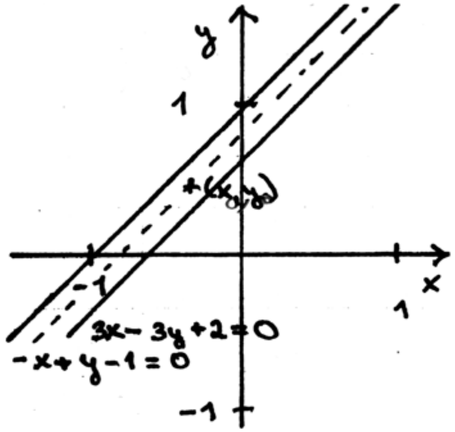
$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \qquad \left| \begin{array}{l} a=k,\ b=-1,\ c=0 \\ x_0=0,\ y_0=6 \end{array}\right.$$
$$\frac{|k\cdot0-1\cdot6+0|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$$
$$\frac{6}{\sqrt{k^2+1}}=2 \qquad |\cdot\sqrt{k^2+1}$$
$$6=2\sqrt{k^2+1} \qquad |:2$$
$$\underbrace{\sqrt{k^2+1}}_{\geq0}=\underbrace{3}_{\geq0} \qquad |(\ )^2$$
$$k^2+1=9$$
$$k^2=8$$
$$k=\pm2\sqrt{2}$$

Vastaus Suorat ovat $y=2\sqrt{2}x$ ja $y=-2\sqrt{2}x$.

562

Olkoon (x_0, y_0) kysytyllä suoralla oleva piste.
Piste on yhtä kaukana suorista

$3x-3y+2=0$ ja $-x+y-1=0$



Saadaan yhtälö

$$\frac{|3x_0-3y_0+2|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}=\frac{|-x_0+y_0-1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}$$

$$\frac{|3x_0-3y_0+2|}{\sqrt{18}}=\frac{|-x_0+y_0-1|}{\sqrt{2}} \qquad \left|\cdot\sqrt{18}\left(=3\sqrt{2}\right)\right.$$

$$|3x_0-3y_0+2|=3|-x_0+y_0-1| \qquad \left|\begin{array}{l}3=|3|\\ |a||b|=|ab|\end{array}\right.$$

$$|3x_0-3y_0+2|=|-3x_0+3y_0-3| \qquad \left|\,|a|=|b|\Leftrightarrow a=b \text{ tai } a=-b\right.$$

$$\begin{array}{rclcl}3x_0-3y_0+2&=&-3x_0+3y_0-3 & \text{tai} & 3x_0-3y_0+2=3x_0-3y_0+3\\ -6y_0&=&-6x_0-5 & \text{tai} & 2=3 \quad \text{aina epätosi}\\ y_0&=&x_0+\dfrac{5}{6} & \text{tai} & \text{ei ratkaisua}\end{array}$$

Ratkaisuna on siis suora $y=x+\dfrac{5}{6}$.

Vastaus Suora on $y=x+\dfrac{5}{6}$.

563

Pisteen $(0,0)$ etäisyys suorasta $(a-3)x+ay+\sqrt{17}=0$ on 1, joten saadaan yhtälö

$$\frac{|(a-3)\cdot 0+a\cdot 0+\sqrt{17}|}{\sqrt{(a-3)^2+a^2}}=1$$

$$\frac{|\sqrt{17}|}{\sqrt{a^2-6a+9+a^2}}=1$$

$$\underbrace{\sqrt{2a^2-6a+9}}_{\geq 0}=\underbrace{|\sqrt{17}|}_{\geq 0} \qquad |(\ )^2$$

$$2a^2-6a+9=17$$

$$2a^2-6a-8=0 \qquad |:2$$

$$a^2-3a-4=0$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}$$

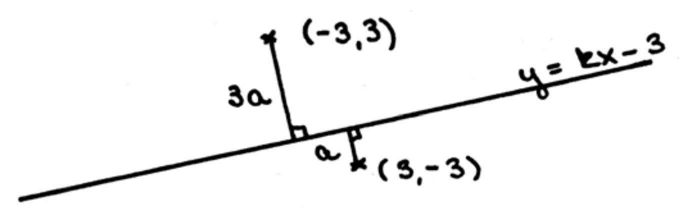
$$a=\frac{3+5}{2}=4 \text{ tai } a=\frac{3-5}{2}=-1$$

Vastaus $a=-1$ tai $a=4$

564

Muunnetaan suoran yhtälö yleiseen muotoon.

$$y = kx - 3$$
$$kx - y - 3 = 0$$



Saadaan yhtälö

$$\frac{|k\cdot(-3)-1\cdot 3-3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 3\cdot\frac{|k\cdot 3-1\cdot(-3)-3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} \qquad \Big|\cdot\sqrt{k^2+1}$$

$$|-3k-6| = 3|3k| \qquad \Big|\; 3=|3|,\; |a||b|=|ab|$$

$$|-3k-6| = |3\cdot 3k| \qquad \Big|\; |a|=|b| \Leftrightarrow a=b \text{ tai } a=-b$$

$$-3k-6 = 9k \quad \text{tai} \quad -3k-6=-9k$$
$$-12k = 6 \quad \text{tai} \quad 6k = 6$$
$$k = -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad k = 1$$

Suoran yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x - 3$ tai $y = 1\cdot x - 3$

Vastaus Suorat ovat $y = -\frac{1}{2}x - 3$ ja $y = x - 3$.

565

Merkitään kysyttyjen suorien kulmakerrointa kirjaimella k.
Suorat kulkevat pisteen $(-1,-2)$ kautta, joten niiden yhtälöt ovat

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \Big|\; k = k,\ (x_0, y_0) = (-1,-2)$$
$$y - (-2) = k(x - (-1))$$
$$y + 2 = kx + k$$
$$kx - y + k - 2 = 0$$

Pisteen $(2,-1)$ etäisyys suorasta on 1. Saadaan yhtälö

$$\frac{|k\cdot 2-1\cdot(-1)+k-2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 1 \qquad \Big|\cdot\sqrt{k^2+1}$$

$$\underbrace{|3k-1|}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{k^2+1}}_{\geq 0} \qquad \Big|(\ )^2$$

$$(3k-1)^2 = \left(\sqrt{k^2+1}\right)^2$$
$$9k^2 - 6k + 1 = k^2 + 1$$
$$8k^2 - 6k = 0$$
$$2k(4k-3) = 0 \qquad \Big|\text{ Tulon nollasääntö}$$
$$2k = 0 \text{ tai } 4k - 3 = 0$$
$$k = 0 \text{ tai } k = \frac{3}{4}$$

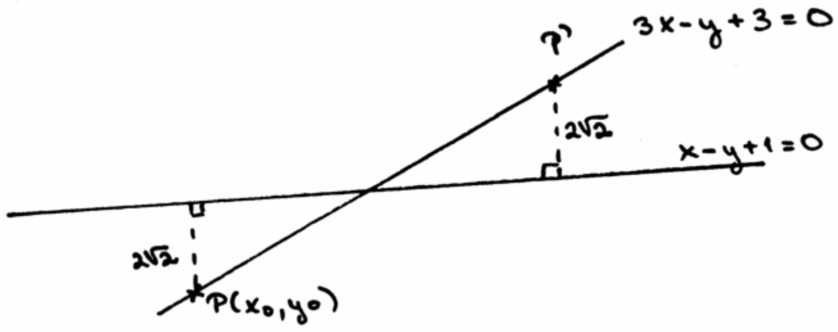
Suorat ovat

$$0\cdot x - y + 0 - 2 = 0 \quad \text{tai} \quad \frac{3}{4}x - y + \frac{3}{4} - 2 = 0 \qquad \Big|\cdot 4$$
$$y = -2 \quad \text{tai} \quad 3x - 4y - 5 = 0$$

Vastaus Suorat ovat $y = -2$ ja $3x - 4y - 5 = 0$.

566

Valitaan suoralta $3x - y + 3 = 0$ mielivaltainen piste $P = (x_0, y_0)$.
Piste P on suoralla, joten sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön $y = 3x + 3$. Siis piste $P = (x_0, 3x_0 + 3)$.



Pisteen P etäisyys suorasta $x - y + 1 = 0$ on $2\sqrt{2}$, joten saadaan yhtälö

$$\frac{|1 \cdot x_0 - 1 \cdot (3x_0 + 3) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{|x_0 - 3x_0 - 3 + 1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \qquad \Big|\cdot\sqrt{2}$$

$$|-2x_0 - 2| = 4 \qquad \Big|\,|a| = b \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b$$

$$-2x_0 - 2 = 4 \quad \text{tai} \quad -2x_0 - 2 = -4$$

$$x_0 = -3 \quad \text{tai} \quad x_0 = 1$$

$$y_0 = 3 \cdot (-3) + 3 = -6 \quad \text{tai} \quad y_0 = 3 \cdot 1 + 3 = 6$$

Piste P on $(-3,-6)$ tai $(1,6)$.

Vastaus Pisteet ovat $(1,6)$ tai $(-3,-6)$.

567

Muunnetaan suoran $y = x + c$ yhtälö yleiseen muotoon.

$$y = x + c$$
$$x - y + c = 0$$

Pisteen etäisyys suorasta –kaavan avulla saadaan epäyhtälö

$$\frac{|1 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} < 2\sqrt{2}$$

$$\frac{|-5 + c|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \qquad \Big|\cdot\sqrt{2}\ (>0)$$

$$|-5 + c| < 2\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$|-5 + c| < 4 \qquad \Big|\,|a| < b,\ b \geq 0 \Leftrightarrow -b < a < b$$

$$-4 < -5 + c < 4 \qquad \Big| + 5$$

$$1 < c < 9$$

Vastaus Arvoilla $1 < c < 9$.

568

Muunnetaan suoran yhtälö yleiseen muotoon.

$$y = 2x + b^2$$

$$2x - y + b^2 = 0$$

Pisteen etäisyys suorasta –kaavan avulla saadaan epäyhtälö

$$\frac{|2\cdot 1 - 1\cdot 1 + b^2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} > \sqrt{5}$$

$$\frac{|1+b^2|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5} \qquad \Big| \cdot \sqrt{5} > 0$$

$$|b^2+1| > 5 \qquad \Big| \; |a| > b,\ b \ge 0 \Leftrightarrow a < -b \text{ tai } a > b$$

$b^2 + 1 < -5$ tai $b^2 + 1 > 5$

$b^2 < -6$ tai $b^2 - 4 > 0$

ei ratkaisua

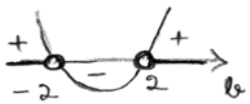
nollakohdat

$$\mathrm{b}^2 - 4 = 0$$

$$b^2 = 4$$

$$b = \pm 2$$

kuvaaja



$b < -2$ tai $b > 2$

Vastaus Arvoilla $b < -2$ tai $b > 2$.

569

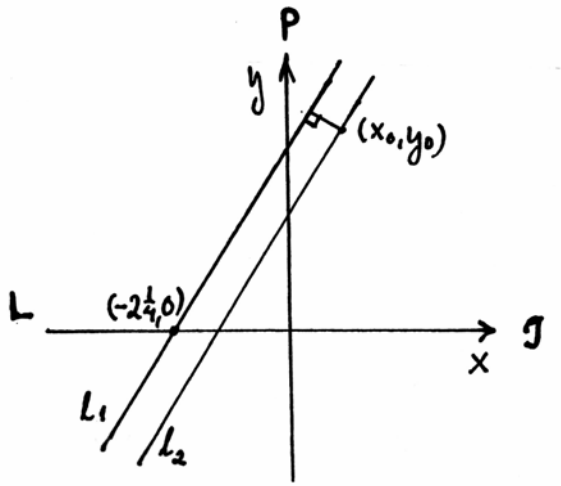
Länsireunaa kuvaa suora l_1: $4x - 3y + 9 = 0$

Suora leikkaa x-akselin kohdassa, missä $y = 0$. Saadaan yhtälö

$$4x + 9 = 0$$

$$x = -\frac{9}{4} = -2\frac{1}{4}$$

Valitaan itäreunaa kuvaavalta suoralta l_2 piste (x_0, y_0).



Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta l_1 on 30 m eli $\frac{30}{100}$ yksikköä, joten saadaan yhtälö

$$\frac{|4x_0 - 3y_0 + 9|}{\sqrt{16+9}} = \frac{30}{100}$$

$$\frac{|4x_0 - 3y_0 + 9|}{5} = \frac{3}{10} \qquad \Big| \cdot 5$$

$$|4x_0 - 3y_0 + 9| = \frac{3}{2} \qquad \Big| \text{ Jos } b \ge 0, \text{ niin } |\mathrm{a}| = b \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b$$

$$4x_0 - 3y_0 + 9 = \frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad 4x_0 - 3y_0 + 9 = -\frac{3}{2}$$

$$4x_0 - 3y_0 + \frac{15}{2} = 0 \quad \text{tai} \quad 4x_0 - 3y_0 + \frac{21}{2} = 0$$

Merkitään $(x_0, y_0) = (x, y)$, sillä ratkaisupisteeksi voidaan valita myös piste (x, y).

Moottoritien itäreunaa kuvaava suora on siis joko

$$s:\ 4x - 3y + 7\frac{1}{2} = 0 \quad \text{tai}$$

$$t:\ 4x - 3y + 10\frac{1}{2} = 0$$

Tutkitaan, kumpi suorista kelpaa vastaukseksi.

Suora *s*:

$$4x - 3y + 7\frac{1}{2} = 0 \qquad |\cdot 2$$

$$8x - 6y + 15 = 0$$

Suora leikkaa *x*-akselin kohdassa, missä $y = 0$. Saadaan yhtälö

$$8x + 15 = 0$$

$$x = -\frac{15}{8}$$

$$x = -1\frac{7}{8} > -2\frac{1}{4}$$

Siis suora *s* on suoran l_1 itäpuolella, joten se kelpaa.

Suora *t*:

$$4x - 3y + 10\frac{1}{2} = 0 \qquad |\cdot 2$$

$$8x - 6y + 21 = 0$$

Suora leikkaa *x*-akselin kohdassa, missä $y = 0$. Saadaan yhtälö

$$8x + 21 = 0$$

$$x = -\frac{21}{8}$$

$$x = -2\frac{5}{8} < -2\frac{1}{4}$$

Siis suora *t* on suoran l_1 länsipuolella, joten se ei kelpaa.

Vastaus Suoran yhtälö on $8x - 6y + 15 = 0$.

570

Valitaan suoralta $y = 2x$ mielivaltainen piste. Esimerkiksi piste $(a, 2a)$ on suoralla, sillä sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön.

Pisteen $(a, 2a)$ etäisyys pisteestä $(-1, 3)$ on

$$\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} = \sqrt{(a-(-1))^2 + (2a-3)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-3)^2}$$

Pisteen $(a, 2a)$ etäisyys suorasta $2x - 3y - 3 = 0$ on

$$\frac{|2 \cdot a - 3 \cdot 2a - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-4a-3|}{\sqrt{13}}$$

Saadaan yhtälö

$$\sqrt{(a+1)^2 + (2a-3)^2} = \frac{|-4a-3|}{\sqrt{13}}$$

$$\sqrt{a^2 + 2a + 1 + 4a^2 - 12a + 9} = \frac{|-4a-3|}{\sqrt{13}} \qquad \Big| \cdot \sqrt{13}$$

$$\underbrace{\sqrt{13}\sqrt{5a^2 - 10a + 10}}_{\geq 0} = \underbrace{|-4a-3|}_{\geq 0} \qquad \Big| (\ )^2$$

$$13(5a^2 - 10a + 10) = 16a^2 + 24a + 9$$

$$65a^2 - 130a + 130 = 16a^2 + 24a + 9$$

$$49a^2 - 154a + 121 = 0$$

$$a = \frac{154 \pm \sqrt{(-154)^2 - 4 \cdot 49 \cdot 121}}{2 \cdot 49} = \frac{154}{98} = \frac{11}{7} = 1\frac{4}{7}$$

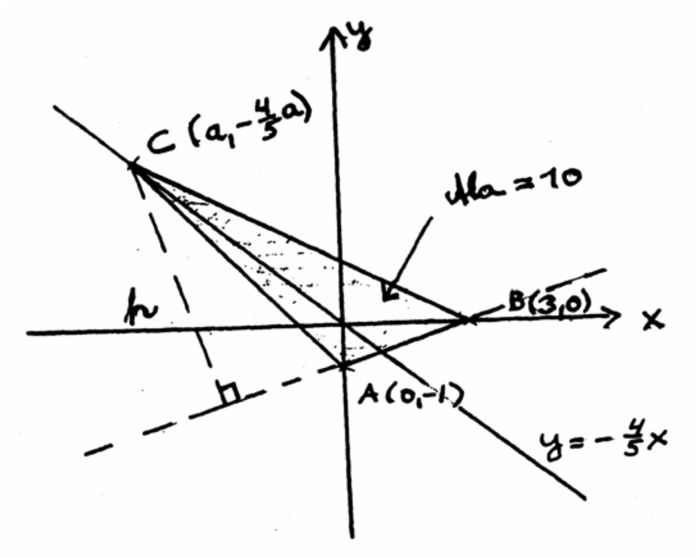
$$2a = 2 \cdot \frac{11}{7} = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$$

Piste on $\left(1\frac{4}{7}, 3\frac{1}{7}\right)$.

Vastaus Piste on $\left(1\frac{4}{7}, 3\frac{1}{7}\right)$.

571

Merkitään piste $C = \left(a, -\frac{4}{5}a\right)$, sillä piste C sijaitsee suoralla $y = -\frac{4}{5}x$. Piirretään mallikuva.



Kolmion *ABC* kanta on

$$|AB| = a = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{10}$$

Määritetään pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran yhtälö.

Kulmakerroin $k_{AB} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{-1-0}{0-3} = \frac{1}{3}$.

Suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| (x_0, y_0) = (3,0),\ k = \frac{1}{3} \right.$$

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x-3)$$

$$y = \frac{1}{3}x - 1 \qquad | \cdot 3$$

$$x - 3y - 3 = 0$$

Kolmion pinta-ala $A = \frac{ah}{2}$, joten korkeus h saadaan yhtälöstä

$$\frac{\sqrt{10} \cdot h}{2} = 10$$

$$h = {}^{\sqrt{10})}\frac{2 \cdot 10}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

Toisaalta korkeus h on pisteen $C = \left(a, -\frac{4}{5}a\right)$ etäisyys suorasta $x - 3y - 3 = 0$, joten saadaan yhtälö

$$\frac{\left|1 \cdot a - 3 \cdot \left(-\frac{4}{5}a\right) - 3\right|}{\sqrt{1 + (-3)^2}} = 2\sqrt{10}$$

$$\frac{\left|\frac{17}{5}a - 3\right|}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \qquad | \cdot \sqrt{10}$$

$$\left|\frac{17}{5}a - 3\right| = 20 \qquad \left| \, |a| = b,\ b \geq 0 \Leftrightarrow a = b \text{ tai } a = -b \right.$$

$$\frac{17}{5}a-3=20 \quad \text{tai} \quad \frac{17}{5}a-3=-20$$

$$\frac{17}{5}a=23 \quad \text{tai} \quad \frac{17}{5}a=-17$$

$$a=\frac{23\cdot 5}{17} \quad \text{tai} \quad a=\frac{-17\cdot 5}{17}$$

$$a=\frac{115}{17}=6\frac{13}{17} \quad \text{tai} \quad a=-5$$

Pisteen y-koordinaatti saadaan sijoittamalla muuttujan *a* arvot lausekkeeseen $-\frac{4}{5}a$.

Pisteen y-koordinaatti on

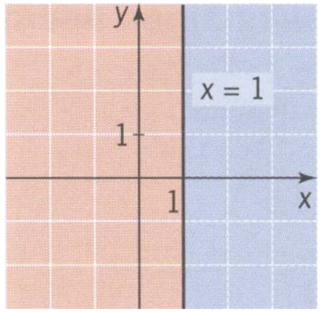
$$y=-\frac{4}{5}\cdot\frac{115}{17}=-\frac{92}{17}=-5\frac{7}{17} \quad \text{tai} \quad y=-\frac{4}{5}\cdot(-5)=4$$

Piste C on siis $(-5,4)$ tai $\left(6\frac{13}{17},-5\frac{7}{17}\right)$

Vastaus Piste C on $(-5,4)$ tai $\left(6\frac{13}{17},-5\frac{7}{17}\right)$.

572

a) Piirretään suora $x=1$.



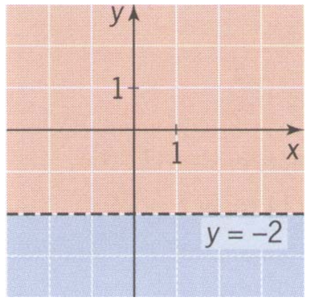
Tapa 1

Epäyhtälön $x\le 1$ toteuttavat ne xy-tason pisteet, jotka ovat suoran $x=1$ vasemmalla puolella tai suoralla.

Tapa 2

Valitaan testipisteeksi origo $(0,0)$. Sijoitetaan koordinaatit epäyhtälöön. Vasen puoli on 0 ja oikea puoli on 1. Koska $0\le 1$, piste toteuttaa epäyhtälön, joten ratkaisuna on se puolitaso suora $x=1$ mukaanlukien, johon origo kuuluu, siis suoran $x=1$ vasemmalle puolelle jäävä alue ja suora $x=1$.

b) Piirretään suora $y=-2$ katkoviivalla, koska suoran pisteet eivät toteuta epäyhtälöä.



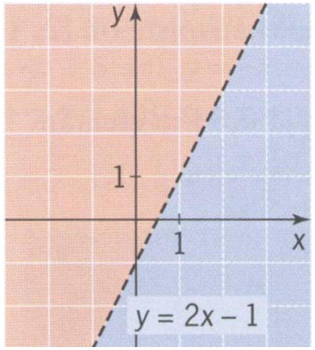
Tapa 1

Piirretään suora $y=-2$ katkoviivalla. Epäyhtälön $y>-2$ toteuttavat ne xy-tason pisteet, jotka ovat tämän suoran yläpuolella.

Tapa 2

Valitaan testipisteeksi origo $(0,0)$. Sijoitetaan koordinaatit epäyhtälöön. Vasen puoli on 0 ja oikea puoli on -2. Koska $0>-2$, niin piste toteuttaa epäyhtälön, joten ratkaisuna on se puolitaso, johon origo kuuluu, siis suoran $y=-2$ yläpuolinen alue.

c) Piirretään suora $y = 2x - 1$ katkoviivalla, koska suoran pisteet eivät toteuta epäyhtälöä.



Tapa 1

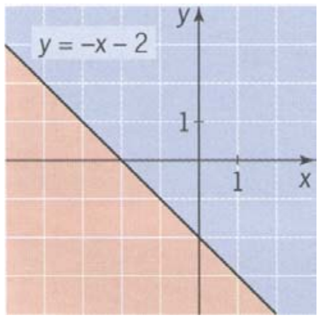
Epäyhtälön $y > 2x - 1$ ratkaisuun kuuluvat kaikki ne xy-tason pisteet, jotka ovat suoran $y = 2x - 1$ yläpuolella.

Tapa 2

Valitaan testipisteeksi origo $(0,0)$. Sijoitetaan koordinaatit epäyhtälöön. Vasen puoli on 0 ja oikea puoli on $2 \cdot 0 - 1 = -1$. Koska $0 > -1$, niin testipiste toteuttaa epäyhtälön, joten epäyhtälön ratkaisuna on se puolitaso, johon origo kuuluu, siis suoran $y = 2x - 1$ yläpuolinen alue.

d) $x + y + 2 \leq 0$ eli $y \leq -x - 2$. Piirretään suora $y = -x - 2$.

Tapa 1



Epäyhtälö $y \leq -x - 2$ toteutuu suoralla $y = -x - 2$ ja sen alapuolisissa tason pisteissä.

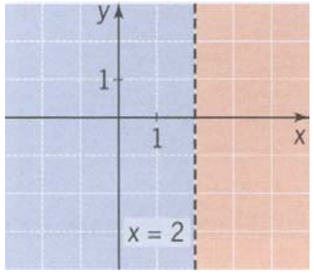
Tapa 2

Valitaan testipisteeksi origo $(0,0)$. Sijoitetaan koordinaatit epäyhtälöön. Vasen puoli on $0 + 0 + 2 = 2$ ja oikea puoli on 0. Koska $2 \leq 0$ on epätosi, niin testipiste ei toteuta epäyhtälöä, joten epäyhtälön ratkaisuna on se puolitaso, joka ei sisällä testipistettä, siis suoran $y = -x - 2$ alapuolinen alue suora mukaan lukien.

573

a) $x - 2 > 0$ eli $x > 2$

Piirretään suora $x - 2 = 0$ eli $x = 2$ katkoviivalla.



Tapa 1

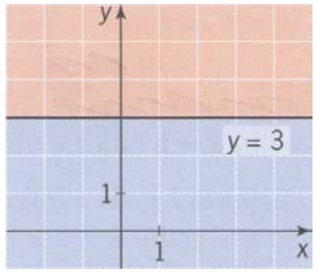
Epäyhtälö toteutuu suoran oikealla puolella olevassa xy-tason osassa.

Tapa 2

Valitaan testipisteeksi origo $(0,0)$. Sijoitetaan koordinaatit epäyhtälöön. Vasen puoli on $0 - 2 = -2$ ja oikea puoli on 0. Koska $-2 > 0$ on epätosi, niin testipiste ei toteuta epäyhtälöä, joten epäyhtälön ratkaisuna on se puolitaso, joka ei sisällä testipistettä, siis suoran $x = 2$ oikella puolella oleva alue.

b) $3 - y \leq 0$ eli $y \geq 3$

Piirretään suora $3 - y = 0$ eli $y = 3$.



Tapa 1

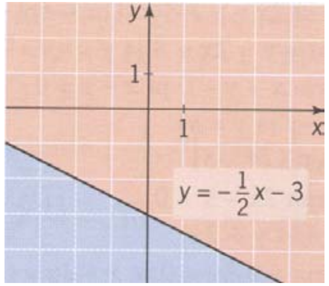
Epäyhtälö toteutuu suoran yläpuolella olevassa xy-tason osassa suora mukaan lukien.

Tapa 2

Valitaan testipisteeksi origo $(0,0)$ ja sijoitetaan koordinaatit epäyhtälöön. Vasen puoli on $3 - 0 = 3$ ja oikea puoli on 0. Koska $3 \leq 0$ on epätosi, niin testipiste ei toteuta epäyhtälöä, joten epäyhtälön ratkaisuna on se puolitaso, joka ei sisällä testipistettä, siis suoran $y = 3$ yläpuolella oleva alue suora mukaan lukien.

c) $x+2y+6\geq 0$ eli $2y\geq -x-6$ eli $y\geq -\frac{1}{2}x-3$

Piirretään suora $y=-\frac{1}{2}x-3$.



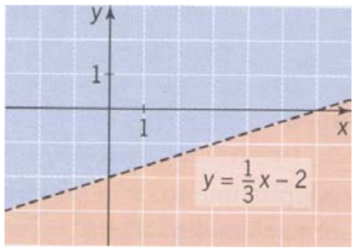
Tapa 1

Epäyhtälö toteutuu suoralla $y=-\frac{1}{2}x-3$ ja sen yläpuolella olevassa xy-tason osassa.

Tapa 2
Valitaan testipisteeksi origo $(0,0)$. Sijoitetaan koordinaatit alkuperäiseen epäyhtälöön. Vasen puoli on $0+2\cdot 0+6=6$ ja oikea puoli on 0. Koska $6>0$, niin testipiste toteuttaa epäyhtälön, joten epäyhtälön ratkaisuna on se puolitaso, joka sisältää testipisteen ja suoran $x+2y+6=0$.

d) $y<\frac{1}{3}x-2$

Piirretään suora $y=\frac{1}{3}x-2$ katkoviivalla.



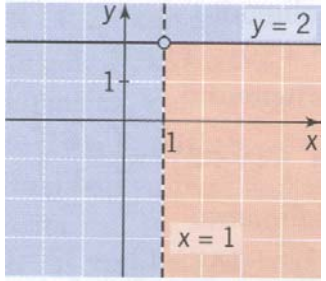
Tapa 1

Epäyhtälö toteutuu suoran alapuolella olevassa xy-tason osassa.

Tapa 2
Valitaan testipisteeksi origo $(0,0)$ ja sijoitetaan koordinaatit alkuperäiseen epäyhtälöön. Vasen puoli on 0 ja oikea puoli on $\frac{1}{3}\cdot 0-2=-2$. Koska $0<-2$ on epätosi, niin testipiste ei toteuta epäyhtälöä, joten epäyhtälön ratkaisuna on se puolitaso, joka ei sisällä testipistettä, siis suoran $y=\frac{1}{3}x-2$ alapuolella oleva alue, mutta suora ei kuulu alueeseen.

574

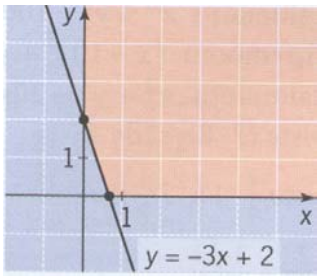
a)



$$\begin{cases} x > 1 \\ y \le 2 \end{cases}$$

Epäyhtälö $x > 1$:
Piirretään suora $x = 1$ katkoviivalla.
Ratkaisualueena on suoran $x = 1$ oikella puolella oleva puolitaso.
Epäyhtälö $y \le 2$:
Piirretään suora $y = 2$. Ratkaisualueena on suoran $y = 2$ pisteet ja sen alapuolella oleva puolitaso.
Epäyhtälöparin ratkaisuna on alue, jossa kumpikin epäyhtälö on voimassa. Alueen reunalla ratkaisuun kuuluvat suoran $y = 2$ pisteet, mutta eivät suoran $x = 1$ pisteet.

b)

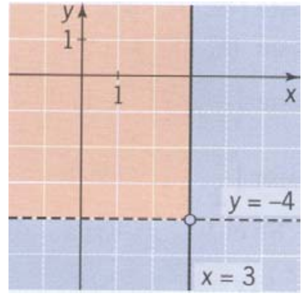


$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \ge -3x + 2 \end{cases}$$

Epäyhtälöt $x \ge 0$ ja $y \ge 0$:
Ratkaisualueena on xy-koordinaatiston I neljännes koordinaattiakseleineen.
Epäyhtälö $y \ge -3x + 2$:
Ratkaisualueena on suora $y = -3x + 2$ ja sen yläpuoliset pisteet.
Epäyhtälön ratkaisuna ovat ne I neljänneksen pisteet, jotka ovat suoralla $y = -3x + 2$ ja sen yläpuolella.

575

a)

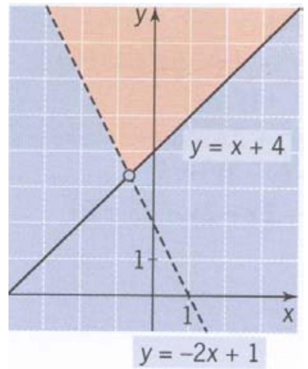


$$\begin{cases} x - 3 \le 0 \\ y + 4 > 0 \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} x \le 3 \\ y > -4 \end{cases}$$

Epäyhtälö $x \le 3$:
Piirretään suora $x = 3$. Ratkaisualueena on suora $x = 3$ ja sen vasemmalla puolella oleva puolitaso.
Epäyhtälö $y > -4$:
Piirretään suora $y = -4$ katkoviivalla. Ratkaisualueena on suoran $y = -4$ yläpuolinen puolitaso. Epäyhtälöparin ratkaisuna on alue, missä molemmat epäyhtälöt toteutuvat. Reuna $x = 3$ kuuluu mukaan, mutta reuna $y = -4$ ei kuulu.

b)

$$\begin{cases} x - y + 4 \le 0 \\ 2x + y - 1 > 0 \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} -y \le -x - 4 \\ y > -2x + 1 \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} y \ge x + 4 \\ y > -2x + 1 \end{cases}$$



Epäyhtälö $y \ge x + 4$:
Ratkaisualueena on suora $y = x + 4$ ja sen yläpuolella olevat pisteet.
Epäyhtälö $y > -2x + 1$:
Ratkaisualueena on suoran $y = -2x + 1$ yläpuolella olevat pisteet.
Epäyhtälöparin ratkaisuna on alue, joka on suorien $y = x + 4$ ja $y = -2x + 1$ yläpuolella.
Reunoista suoran $y = x + 4$ pisteet kuuluvat alueeseen, mutta suoran $y = -2x + 1$ pisteet eivät kuulu.

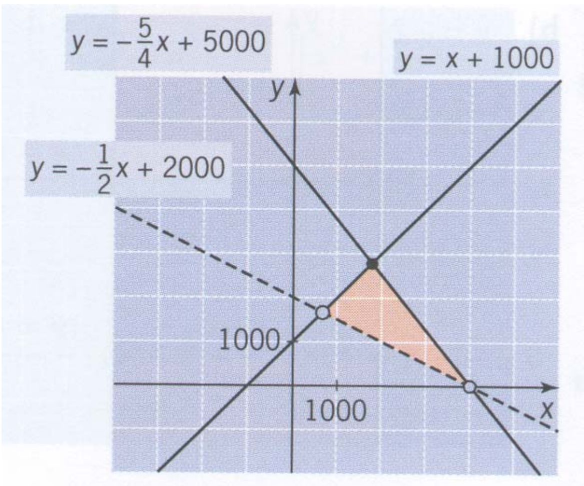
576

$$\begin{cases} x - y + 1000 \geq 0 \\ y > -\frac{1}{2}x + 2000 \\ 5x + 4y \leq 20000 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} y \leq x + 1000 \\ y > -\frac{1}{2}x + 2000 \\ y \leq -\frac{5}{4}x + 5000 \end{cases}$$

Epäyhtälö $y \leq x + 1000$ toteutuu suoran $y = x + 1000$ alapuolisessa puolitasossa suora mukaan lukien.

Epäyhtälö $y > -\frac{1}{2}x + 2000$ toteutuu suoran $y = -\frac{1}{2}x + 2000$ yläpuolisessa puolitasossa.

Epäyhtälö $y \leq -\frac{5}{4}x + 5000$ toteutuu suoran $y = -\frac{5}{4}x + 5000$ alapuolisessa puolitasossa suora mukaan lukien.



577

Sijoittamalla pisteet suoran yhtälöön $7x - 13y + 8 = 0$ saadaan

Piste $(-14,-7)$	$7 \cdot (-14) - 13 \cdot (-7) + 8 = -98 + 91 + 8 = 1 > 0$
Piste $(10,6)$	$7 \cdot 10 - 13 \cdot 6 + 8 = 70 - 78 + 8 = 0$
Piste $(0,3)$	$7 \cdot 0 - 13 \cdot 3 + 8 = 0 - 39 + 8 = -31 < 0$
Piste $(7,4)$	$7 \cdot 7 - 13 \cdot 4 + 8 = 49 - 52 + 8 = 5 > 0$

Siis piste $(10,6)$ on suoralla $7x - 13y + 8 = 0$ ja muut sen ulkopuolella. Pisteet ovat samalla puolella suoraa, jos yllä lasketut arvot ovat saman merkkisiä, joten pisteet $(-14,-7)$ ja $(7,4)$ ovat suoran samalla puolella.

Vastaus Piste $(10,6)$ on tehtävän suoralla. Pisteet $(-14,-7)$ ja $(7,4)$ ovat samalla puolella tätä suoraa.

578

Pisteiden $(6,-3)$ ja $(2,3)$ määräämä suora:

$$k=\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{-3-3}{6-2}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$$

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$$

$$y=-\frac{3}{2}x+6$$

Pisteiden $(-2,-3)$ ja $(2,3)$ määräämä suora:

$$k=\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{-3-3}{-2-2}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$$

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y-3=\frac{3}{2}(x-2)$$

$$y=\frac{3}{2}x$$

Pisteiden $(-2,-3)$ ja $(6,-3)$ määräämä suora:

$$y=-3$$

Vastaus $\begin{cases} y\le -\frac{3}{2}x+6 \\ y<\frac{3}{2}x \\ y\ge -3 \end{cases}$ eli $\begin{cases} 3x+2y\le 12 \\ 3x-2y>0 \\ y\ge -3 \end{cases}$

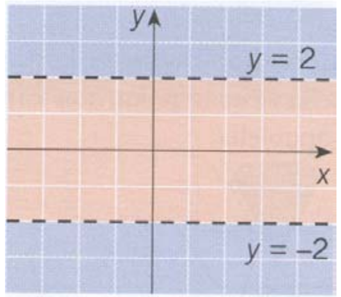
579

a)

$$|y|<2$$

$$-2<y<2$$

Suorien $y=-2$ ja $y=2$ välinen alue, johon suorien pisteet eivät kuulu.



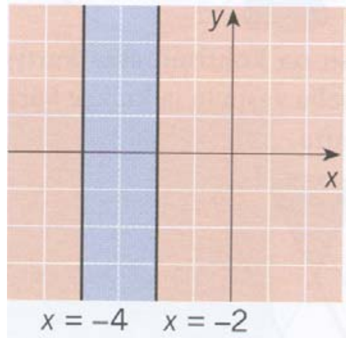
b)

$$|x+3|\ge 1$$

$$x+3\le -1 \text{ tai } x+3\ge 1$$

$$x\le -4 \text{ tai } x\ge -2$$

Alueen muodostavat ne pisteet (x,y), jotka ovat suoran $x=-4$ vasemmalla puolella tai suoran $x=-2$ oikealla puolella. Reunasuorat kuuluvat alueeseen.



580

a)

$|x+y| \leq 4$

$-4 \leq x+y \leq 4$

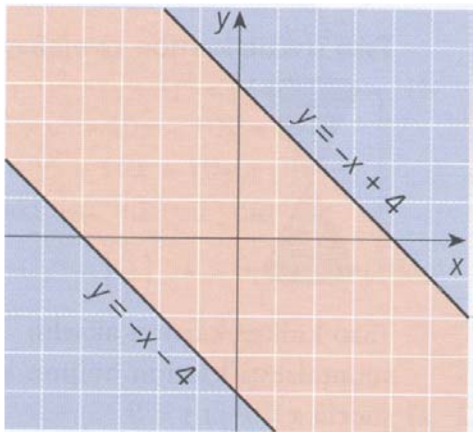
I $-4 \leq x+y$ ja II $x+y \leq 4$

$y \geq -x-4$ ja $y \leq -x+4$

Vastaavat yhtälöt $y=-x-4$ ja $y=-x+4$.

Epäyhtälö I toteutuu suoran $y=-x-4$ yläpuolella ja epäyhtälö II toteutuu suoran $y=-x+4$ alapuolella.

Vastaus Kuvan varjostettu alue, jossa reunaviivat ovat mukana.



b)

$|x-1| \leq 3$ ja $|y+2| > 2$

I $-3 \leq x-1 \leq 3$ ja II $y+2<-2$ tai $y+2>2$

$-3+1 \leq x \leq 3+1$ ja $y \leq -4$ tai $y > 0$

$-2 \leq x \leq 4$

Piirretään suorat $x=-2$, $x=4$, $y=-4$ ja $y=0$.

Epäyhtälö I toteutuu suorien $x=-2$ ja $x=4$ välisessä alueessa.
Epäyhtälö II toteutuu suoran $y=-4$ alapuolella ja suoran $y=0$ yläpuolella.
Epäyhtälöt I ja II ovat yhtä aikaa voimassa kuvan varjostetulla alueella.

Vastaus Kuvan varjostettu alue, jossa reunaviivat $y=-4$ ja $y=0$ eivät ole mukana.