701

a)

$$(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$x^2+y^2=\left(\sqrt{7}\right)^2 \quad \big|\text{keskipistemuoto}$$

$$x^2+y^2-7=0 \quad \big|\text{normaalimuoto}$$

b)

$$(x-0)^2+(y-(-5))^2=6^2$$

$$x^2+(y+5)^2=6^2 \quad \big|\text{keskipistemuoto}$$

$$x^2+y^2+10y+25=36$$

$$x^2+y^2+10y-11=0 \quad \big|\text{normaalimuoto}$$

c)

$$(x-3)^2+(y-(-2))^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \quad \big|\text{keskipistemuoto}$$

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \quad \Big|-\frac{2}{3}$$

$$x^2-6x+y^2+4y+13-\frac{2}{3}=0 \quad \big|\cdot 3$$

$$3x^2+3y^2-18x+12y+37=0 \quad \big|\text{normaalimuoto}$$

Vastaus

a) $x^2+y^2=\left(\sqrt{7}\right)^2$

$x^2+y^2-7=0$

b) $x^2+(y+5)^2=6^2$

$x^2+y^2+10y-11=0$

c) $(x-3)^2+(y+2)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

$3x^2+3y^2-18x+12y+37=0$

702

a) Keskipiste on $(0,0)$ ja säde on pisteiden $(0,0)$ ja $(10,0)$ välinen etäisyys eli 10.

$$(x-0)^2+(y-0)^2=10^2$$
$$x^2+y^2=10^2 \quad \Big| \text{keskipistemuoto}$$
$$x^2+y^2-100=0 \quad \Big| \text{normaalimuoto}$$

b) Keskipiste on $(10,0)$ ja säde kuten a)-kohdassa eli 10.

$$(x-10)^2+(y-0)^2=10^2$$
$$(x-10)^2+y^2=10^2 \quad \Big| \text{keskipistemuoto}$$
$$x^2-20x+100+y^2=100 \quad \Big| -100$$
$$x^2+y^2-20x=0 \quad \Big| \text{normaalimuoto}$$

Vastaus a) $x^2+y^2=10^2$
$x^2+y^2-100=0$

b) $(x-10)^2+y^2=10^2$
$x^2+y^2-20x=0$

703

a)

$$(x-2)^2+(y-8)^2=16$$
$$(x-2)^2+(y-8)^2=4^2$$

keskipiste $(2,8)$, säde 4

b)

$$(x+11)^2+\left(y-7\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{3}$$
$$(x-(-11))^2+\left(y-7\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

keskipiste $\left(-11,7\frac{1}{2}\right)$, säde $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Vastaus a) keskipiste $(2,8)$ ja säde 4

b) keskipiste $\left(-11,7\frac{1}{2}\right)$ ja säde $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

704

a)

$$x^2+y^2+4x-6y-12=0$$

$$x^2+4x \qquad +y^2-6y \qquad -12=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot 2 \qquad +y^2-2\cdot y\cdot 3 \qquad -12=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot 2+\underbrace{2^2-2^2}_{=0}+y^2-2\cdot y\cdot 3+\underbrace{3^2-3^2}_{=0}-12=0$$

$$(x+2)^2-2^2+(y-3)^2-3^2-12=0$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=2^2+3^2+12$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=25$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=5^2$$

keskipiste $(-2,3)$, säde 5

b)

$$x^2+y^2-12x-8y-29=0$$

$$x^2-12x \qquad +y^2-8y \qquad -29=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot 6 \qquad +y^2-2\cdot y\cdot 4 \qquad -29=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot 6+\overbrace{6^2-6^2}^{=0}+y^2-2\cdot y\cdot 4+\overbrace{4^2-4^2}^{=0}-29=0$$

$$(x-6)^2-6^2+(y-4)^2-4^2-29=0$$

$$(x-6)^2+(y-4)^2=6^2+4^2+29$$

$$(x-6)^2+(y-4)^2=81$$

$$(x-6)^2+(y-4)^2=9^2$$

keskipiste $(6,4)$, säde 9

Vastaus a) keskipiste $(-2,3)$ ja säde 5
b) keskipiste $(6,4)$ ja säde 9

705

a)

$$x^2+y^2+3x-2y+2=0$$

$$x^2+3x \qquad +y^2-2y \qquad +2=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2} \qquad +y^2-2\cdot y\cdot 1 \qquad +2=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{=0}+y^2-2\cdot y\cdot 1+\underbrace{1^2-1^2}_{=0}+2=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2-1^2+2=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2-2$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{9}{4}-1$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

keskipiste $\left(-\frac{3}{2},1\right)$, säde $\frac{\sqrt{5}}{2}$

b)

$$4x^2+4y^2-4x-12y+6=0 \quad \Big|:4$$

$$x^2+y^2-x-3y+\frac{6}{4}=0$$

$$x^2-x \qquad +y^2-3y \qquad +\frac{3}{2}=0$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2} \qquad +y^2-2\cdot y\cdot\frac{3}{2} \qquad +\frac{3}{2}=0$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{=0}+y^2-2\cdot y\cdot\frac{3}{2}+\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{=0}+\frac{3}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}-{}^{2)}\frac{3}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1^2$$

keskipiste $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, säde 1

Vastaus a) keskipiste $\left(-\frac{3}{2},1\right)$ ja säde $\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) keskipiste $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ ja säde 1

706

a)

$$x^2+y^2+2x-6y+10=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2+y^2-2\cdot y\cdot 3+3^2-3^2+10=0$$

$$(x+1)^2-1^2+(y-3)^2-3^2+10=0 \quad \big| +1^2+3^2-10$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2=1^2+3^2-10$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2=0$$

Keskipiste $(-1,3)$ ja säde 0, joten kyseessä on piste $(-1,3)$.

b)

$$x^2+y^2-5y+7=0$$

$$x^2+y^2-2\cdot y\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+7=0$$

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+7=0 \quad \Big| +\left(\frac{5}{2}\right)^2-7$$

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\frac{28}{4}$$

$$\underbrace{(x-0)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}_{\geq 0}=-\frac{3}{4}<0$$

Epätosi, joten ei ole ympyrä.

c)

$$3x^2+3y^2-3x+15y+18=0 \quad \big| :3$$

$$x^2+y^2-x+5y+6=0$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+2\cdot y\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-{}^{4)}6$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Keskipiste $\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$ ja säde $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d)

$$x^2-y^2+2x=0$$

$$x^2-2x-y^2=0$$

Ei ole ympyrä, koska termien x^2 ja y^2 kertoimet ovat eri merkkiset.

Vastaus a) ei b) ei c) kyllä d) ei

707

a) Säde on pisteiden $(-1,3)$ ja $(-3,1)$ välinen etäisyys.

$$r=\sqrt{(-1-(-3))^2+(3-1)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Ympyrän yhtälö on

$$(x-(-1))^2+(y-3)^2=(\sqrt{8})^2$$
$$x^2+2x+1+y^2-6y+9=8$$
$$x^2+y^2+2x-6y+2=0$$

b)Säde on pisteen $(-1,3)$ etäisyys x-akselista.

$r=3$

Ympyrän yhtälö on

$$(x+1)^2+(y-3)^2=3^2$$
$$x^2+2x+1+y^2-6y+9=9$$
$$x^2+y^2+2x-6y+1=0$$

c)Säde on pisteen $(-1,3)$ etäisyys y-akselista.

$r=1$

Ympyrän yhtälö on

$$(x+1)^2+(y-3)^2=1^2$$
$$x^2+2x+1+y^2-6y+9=1$$
$$x^2+y^2+2x-6y+9=0$$

Vastaus a)

$$(x+1)^2+(y-3)^2=(2\sqrt{2})^2$$
$$x^2+y^2+2x-6y+2=0$$

b)

$$(x+1)^2+(y-3)^2=3^2$$
$$x^2+y^2+2x-6y+1=0$$

c)

$$(x+1)^2+(y-3)^2=1^2$$
$$x^2+y^2+2x-6y+9=0$$

708

Ympyrän halkaisija on $\sqrt{(5-(-3))^2+(-2-4)^2}=\sqrt{64+36}=10$, joten säde on $r=5$.

Keskipiste on $\left(\frac{5-3}{2},\frac{-2+4}{2}\right)=(1,1)$.

Ympyrän yhtälö on

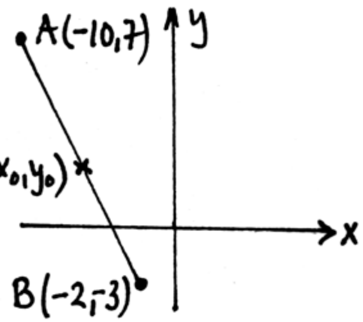
$$(x-1)^2+(y-1)^2=5^2$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=25$$
$$x^2+y^2-2x-2y-23=0$$

Vastaus $(x-1)^2+(y-1)^2=5^2$
(eli $x^2+y^2-2x-2y-23=0$)

709

Olkoon $A=(-10,7)$ ja $B=(-2,-3)$.

Lasketaan janan AB keskipiste.



$$x_0=\frac{-10-2}{2}=-6$$
$$y_0=\frac{7-3}{2}=2$$

Siis ympyrän keskipiste on $P=(x_0,y_0)=(-6,2)$.

Ympyrän säde on $r=\sqrt{(-6+2)^2+(2+3)^2}=\sqrt{41}$.

Ympyrän yhtälö on

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$
$$(x+6)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{41}\right)^2$$
$$x^2+12x+36+y^2-4y+4=41$$
$$x^2+y^2+12x-4y-1=0$$

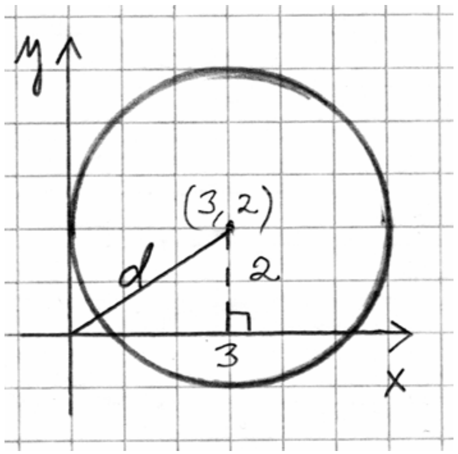
Vastaus $(x+6)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{41}\right)^2$
(eli $x^2+y^2+12x-4y-1=0$)

710

$$x^2+y^2-6x-4y+4=0$$
$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2-2^2+4=0 \quad \Big| +3^2+2^2-4$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=3^2$$

Ympyrän keskipiste on $(3,2)$ ja säde 3.
Lasketaan origon etäisyys ympyrän keskipisteestä.

$$d^2=3^2+2^2$$
$$d^2=13$$
$$d=_{(\pm)}\sqrt{13}$$



Koska $d>3$, niin origo on ympyrän ulkopuolella.
Tällöin ympyrän etäisyys origosta on

$$x=d-3=\sqrt{13}-3\approx 0{,}61$$

Vastaus $\sqrt{13}-3$

711

$$x^2+x+y^2=0$$
$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+y^2=0$$
$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2=0$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2=0 \quad \Big| +\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Ympyrän keskipiste on $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ja säde $\frac{1}{2}$.

Lasketaan pisteen $(1,2)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

$$d=\sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+(2-0)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}$$
$$=\sqrt{\frac{9}{4}+{}^{4)}4}$$
$$=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}>r$$

Pisteen $(1,2)$ etäisyys d ympyrän keskipisteestä on suurempi kuin ympyrän säde, joten piste on ympyrän ulkopuolella. Siten pisteen etäisyys ympyrän kehästä on

$$d-r=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Vastaus Keskipiste on $\left(-\frac{1}{2},0\right)$, säde on $\frac{1}{2}$, etäisyys 2

712

$$x^2+4y^2+16x-20y+1=0 \quad |:4$$

$$x^2+y^2+4x-5y+\frac{1}{4}=0$$

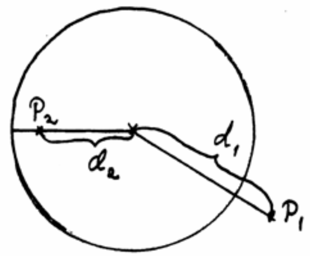
$$x^2+4x+y^2-5y+\frac{1}{4}=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+y^2-2\cdot y\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=0$$

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}+{}^{4)}4+\frac{25}{4}$$

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{40}{4}=10=\left(\sqrt{10}\right)^2$$

Keskipiste on $\left(-2,2\frac{1}{2}\right)$ ja



säde on $r=\sqrt{10}$.

a) Pisteen $P_1(0,0)$ etäisyys keskipisteestä on

$$d_1=\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{41}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}>\sqrt{10}=\sqrt{\frac{40}{4}},$$

joten pisteen P_1 etäisyys ympyrän kehästä on

$$d_1-r=\frac{\sqrt{41}}{2}-\sqrt{10}.$$

b) $P_2 = (1,2)$, keskipiste on $\left(-2, 2\frac{1}{2}\right)$

Pisteen P_2 etäisyys keskipisteestä on

$$d_2 = \sqrt{(1-(-2))^2 + \left(2 - 2\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2} < \sqrt{10}$$

Pisteen P_2 etäisyys ympyrän kehästä on $r - d_2 = \sqrt{10} - \frac{\sqrt{37}}{2}$.

Vastaus a) $\frac{\sqrt{41}}{2} - \sqrt{10}$

b) $\sqrt{10} - \frac{\sqrt{37}}{2}$

713

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 9 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4^2 + (y+3)^2 - 3^2 + 9 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2 + 3^2 - 9$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Keskipiste on $(4,-3)$ ja säde on $r = 4$.

Lasketaan pisteen P etäisyys keskipisteestä.

a) $P = (1,1)$

$$\sqrt{(1-4)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{9+16} = 5 > 4 = r$$

Piste $(1,1)$ on ympyrän ulkopuolella.

b) $P = (6,-5)$

$$\sqrt{(6-4)^2 + (-5-(-3))^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} < \sqrt{16} = 4 = r$$

Piste $(6,-5)$ on ympyrän sisäpuolella.

c) $P = (0,-3)$

$$\sqrt{(0-4)^2 + (-5-(-3))^2} = \sqrt{16+0} = 4 = r$$

Piste $(0,-3)$ on ympyrän kehällä.

Vastaus

Piste on ympyrän a) ulkopuolella b) sisäpuolella c) kehällä.

714

Ympyrän yhtälön yleinen muoto on

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Kunkin pisteen koordinaatit toteuttavat ympyrän yhtälön.
Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} \text{Piste } (4,-3) \\ \text{Piste } (-3,-2) \\ \text{Piste } (6,1) \end{array} \begin{cases} 4^2+(-3)^2+4a-3b+c=0 \\ (-3)^2+(-2)^2-3a-2b+c=0 \\ 6^2+1^2+6a+b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} 4a-3b+c=-25 \\ -3a-2b+c=-13 \\ 6a+b+c=-37 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \\ \end{array} \quad \begin{array}{|l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$+\begin{cases} -4a+3b-c=25 \\ -3a-2b+c=-13 \end{cases} \qquad +\begin{cases} 3a+2b-c=13 \\ 6a+b+c=-37 \end{cases}$$

$$(4)\quad -7a+b=12 \qquad (5)\quad 9a+3b=-24$$

$$\begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array} \begin{cases} -7a+b=12 \\ 9a+3b=-24 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{array} \qquad +\begin{cases} 21a-3b=-36 \\ 9a+3b=-24 \end{cases}$$

$$30a=-60$$

$$(6)\quad a=-2$$

Sijoitetaan $a=-2$ yhtälöön (4).

$$(4)\, b=12+7a=12+7\cdot(-2)=-2$$

Sijoitetaan $a=-2$ ja $b=-2$ yhtälöön (1).

$$(1)\quad c=-4a+3b-25=-4\cdot(-2)+3\cdot(-2)-25=-23$$

Ympyrän yhtälö on

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x-2y-23&=0 \\ x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2+y^2-2\cdot y\cdot 1+1^2-1^2-23&=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2-1^2-1^2-23&=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2&=5^2 \end{aligned}$$

Vastaus $(x-1)^2+(y-1)^2=5^2$

$(x^2+y^2-2x-2y-23=0)$

715

Ympyrän yhtälön yleinen muoto on

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Kunkin pisteen koordinaatit toteuttavat ympyrän yhtälön.
Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} \text{Piste } (1,3) \\ \text{Piste } (2,-4) \\ \text{Piste } (-5,-5) \end{array} \begin{cases} 1^2+3^2+a+3b+c=0 \\ 2^2+(-4)^2+2a-4b+c=0 \\ (-5)^2+(-5)^2-5a-5b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} a+3b+c=-10 \\ 2a-4b+c=-20 \\ -5a-5b+c=-50 \end{cases} \begin{array}{|l} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \\ \end{array} \begin{array}{|l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$+\begin{cases} -a-3b-c=10 \\ 2a-4b+c=-20 \end{cases}$$

$$(4) \quad a-7b=-10$$

$$+\begin{cases} -2a+4b-c=20 \\ -5a-5b+c=-50 \end{cases}$$

$$(5) \quad -7a-b=-30$$

$$\begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array} \begin{cases} a-7b=-10 \\ -7a-b=-30 \end{cases} \begin{array}{|l} \cdot 7 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$+\begin{cases} 7a-49b=-70 \\ -7a-b=-30 \end{cases}$$

$$-50b=-100$$

$$(6) \quad b=2 \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (4).$$

$$(4)\, a=-10+7b=-10+7\cdot 2=4$$

Sijoitetaan $b=2$ ja $a=4$ yhtälöön (1).

$$(1)\ c=-10-3b-a=-10-3\cdot 2-4=-20$$

Ympyrän yhtälö on

$$\begin{aligned} x^2+y^2+4x+2y-20&=0 \\ x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+y^2-2\cdot y\cdot 1+1^2-1^2-20&=0 \\ (x-2)^2+(y-1)^2-2^2-1^2-20&=0 \\ (x-2)^2+(y-1)^2&=5^2 \end{aligned}$$

Vastaus $(x-2)^2+(y-1)^2=5^2$

$(x^2+y^2+4x+2y-20=0)$

716

Ympyrän yhtälön yleinen muoto on

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Kunkin pisteen koordinaatit toteuttavat ympyrän yhtälön.
Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} \text{Piste } (28,98) \\ \text{Piste } (70,112) \\ \text{Piste } (126,84) \end{array} \begin{cases} 28^2+98^2+28a+98b+c=0 \\ 70^2+112^2+70a+112b+c=0 \\ 126^2+84^2+126a+84b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} 28a+98b+c=-10388 \\ 70a+112b+c=-17444 \\ 126a+84b+c=-22932 \end{cases} \begin{array}{|l} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \\ \\ \end{array} \begin{array}{|l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \begin{cases} -28a-98b-c=10388 \\ 70a+112b+c=-17444 \end{cases} \\ \hline (4)\ 42a+14b=-7056 \end{array} \qquad \begin{array}{l} + \begin{cases} -70a-112b-c=17444 \\ 126a+84b+c=-22932 \end{cases} \\ \hline (5)\ 56a-28b=-5488 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array} \begin{cases} 42a+14b=-7056 \\ 56a-28b=-5488 \end{cases} \begin{array}{|l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \begin{cases} 84a+28b=-14112 \\ 56a-28b=-5488 \end{cases} \\ \hline 140a=-19600 \end{array}$$

$$(6) \qquad a=-140$$

$$(4) \qquad 42a+14b=-7056$$

$$14b=-7056-42a \qquad |\ a=-140$$

$$14b=-7056-42\cdot(-140)$$

$$14b=-1176 \qquad |:14$$

$$b=-84$$

$$(1)\ 28a+98b+c=-10388 \qquad |\ a=-140,\ b=-84$$

$$c=-10388-28\cdot(-140)-98\cdot(-84)$$

$$c=1764$$

Ympyrän yhtälö on

$$x^2+y^2-140x-84y+1764=0$$

$$x^2-2\cdot x\cdot 70+70^2-70^2+y^2-2\cdot y\cdot 42+42^2-42^2+1764=0$$

$$(x-70)^2+(y-42)^2-70^2-42^2+1764=0$$

$$(x-70)^2+(y-42)^2=70^2$$

Ympyrän säde on 70. Tämä vastaa luonnossa matkaa

$$70\cdot 25\text{ m}=1750\text{ m}$$

Vastaus 1750 metriä

717

$$x^2+y^2+2ax-4y-a+16=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot a+a^2-a^2+y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2-2^2-a+16=0$$

$$(x+a)^2+(y-2)^2-a^2-2^2-a+16=0$$

$$(x+a)^2+(y-2)^2=a^2+2^2+a-16$$

$$(x+a)^2+(y-2)^2=a^2+a-12$$

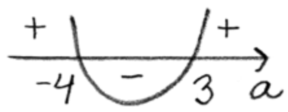
1) Kun $a^2+a-12>0$, niin kuvaaja on ympyrä.
Nollakohdat:

$$a^2+a-12=0$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{-1\pm 7}{2}$$

$$a=\frac{-8}{2}=-4 \quad \text{tai} \quad a=\frac{6}{2}=3$$



Kun $a<-4$ tai $a>3$, kuvaaja on ympyrä, jonka keskipiste on $(-a,2)$ ja säde $\sqrt{a^2+a-12}$.

2) Kun $-4<a<3$, yhtälöllä ei ole kuvaajaa.

3) Kun $a=-4$, kuvaaja on piste $(4,2)$ ja
kun $a=3$, kuvaaja on piste $(-3,2)$.

718

$$x^2+y^2-ax+y=a$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2+2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=a$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=a$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=a+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+a+\frac{1}{4}$$

Yhtälö esittää ympyrää, jos

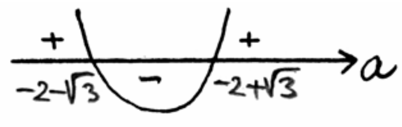
$$\frac{a^2}{4}+a+\frac{1}{4}>0 \qquad |\cdot 4>0$$

$$a^2+4a+1>0$$

Nollakohdat:

$$a^2+4a+1=0$$

$$a=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$$



$$a=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$$

Vastaus $\quad a<-2-\sqrt{3}$ tai $a>-2+\sqrt{3}$

719

$$x^2+4ax+y^2+2y-3=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot 2a+(2a)^2-(2a)^2+y^2+2\cdot y\cdot 1+1^2-1^2-3=0$$

$$(x+2a)^2+(y+1)^2-(2a)^2-1^2-3=0$$

$$(x+2a)^2+(y+1)^2=(2a)^2+1^2+3$$

$$(x+2a)^2+(y+1)^2=4a^2+4$$

Koska $4a^2+4>0$, kuvaaja on ympyrä kaikilla parametrin a arvoilla.
Lasketaan pisteen $(1,2)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $(-2a,-1)$.

$$\sqrt{(1-(-2a))^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{(1+2a)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{1+4a+4a^2+9}$$

$$=\sqrt{4a^2+4a+10}$$

Piste $(1,2)$ on ympyrän ulkopuolella, jos sen etäisyys ympyrän keskipisteestä on sädettä suurempi.

$$\underbrace{\sqrt{4a^2+4a+10}}_{\geq 0}>\underbrace{\sqrt{4a^2+4}}_{\geq 0} \quad \Big|(\ )^2$$

$$4a^2+4a+10>4a^2+4$$

$$4a>-6$$

$$a>-\frac{3}{2}$$

Vastaus Kuvaaja on ympyrä kaikilla a:n arvoilla.
Piste $(1,2)$ ympyrän ulkopuolella, kun $a>-\dfrac{3}{2}$.

720

Ympyrä 1

$x^2+y^2=39$

keskipiste $(0,0)$

säde $r_1=\sqrt{39}$

Ympyrä 2

$$x^2-2ax+y^2+6ay+1=0$$

$$x^2-2\cdot x\cdot a+a^2-a^2+y^2+2\cdot y\cdot 3a+(3a)^2-(3a)^2+1=0$$

$$\left(x^2-2\cdot x\cdot a+a^2\right)+\left(y^2+2\cdot y\cdot 3a+(3a)^2\right)=-1+a^2+(3a)^2$$

$$(x-a)^2+(y+3a)^2=10a^2-1$$

keskipiste $(a,-3a)$

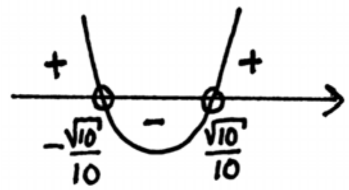
säde $r_2=\sqrt{10a^2-1}$, missä $10a^2-1>0$

nollakohdat:

$10a^2-1=0$

$a^2=\dfrac{1}{10}$

$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$



Siis $a<-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ tai $a>\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

Sama pinta-ala, kun

$$\pi r_1^2 = \pi r_2^2$$
$$r_1^2 = r_2^2$$
$$39 = 10a^2 - 1$$
$$10a^2 = 40$$
$$a^2 = 40$$
$$a^2 = 4$$
$$a = \pm 2$$

$\frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0{,}32 < 2$, joten $-2 < \frac{\sqrt{10}}{10}$ ja $2 > \frac{\sqrt{10}}{10}$

Siis arvot $a = \pm 2$ kelpaavat.

Vastaus $a = \pm 2$

721

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 & \big| \cdot(-1) \\ x^2 + y^2 + 6y - 1 = 0 & \big| \cdot 1 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -x^2 - y^2 + 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6y - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{6y + 25 - 1 = 0}$$
$$6y = -24$$
$$y = -4 \quad \big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x^2 + (-4)^2 - 25 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$

Leikkauspisteet ovat $(-3, -4)$ ja $(3, -4)$

Vastaus $(-3, -4)$ ja $(3, -4)$

722

Yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x^2+y^2+6x+4y+4=0 \\ x^2+y^2-4x-6y-16=0 \end{cases}\begin{cases}\cdot 1 \\ \cdot(-1)\end{cases}$$

$$+\begin{cases} x^2+y^2+6x+4y+4=0 \\ -x^2-y^2+4x+6y+16=0 \end{cases}$$

$$10x+10y+20=0 \quad \big| :10$$

$$x+y+2=0$$

$$y=-x-2$$

Sijoitetaan $y=-x-2$ yhtälöön (1)

$$x^2+(-x-2)^2+6x+4(-x-2)+4=0$$

$$x^2+x^2+4x+4+6x-4x-8+4=0$$

$$2x^2+6x=0$$

$$2x(x+3)=0$$

$$2x=0 \text{ tai } x+3=0$$

$$x=0 \text{ tai } x=-3$$

Sijoittamalla muuttujan x arvot yhtälöön $y=-x-2$ saadaan

$y=-0-2=-2$ tai $y=-(-3)-2=1$

Pisteet ovat $(0,-2)$ ja $(-3,1)$

Vastaus $(0,-2)$ ja $(-3,1)$

723

Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x^2+8x+y^2+6y+9=0 \\ x^2-2x+y^2-4y-21=0 \end{cases} \begin{vmatrix}\cdot 1 \\ \cdot(-1)\end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases} x^2+8x+y^2+6y+9=0 \\ -x^2+2x-y^2+4y+21=0 \end{cases}$$

$$10x+10y+30=0$$

$$y=-x-3 \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x^2+8x+(-x-3)^2+6(-x-3)+9=0$$

$$x^2+8x+x^2+6x+9-6x-18+9=0$$

$$2x^2+8x=0$$

$$2x(x+4)=0$$

$$x=0 \text{ tai } x=-4$$

Jos $x=0$, niin $y=-x-3=-3$.

Jos $x=-4$, niin $y=-x-3=-(-4)-3=1$

Vastaus Leikkauspisteet ovat $(0,-3)$ ja $(-4,1)$.

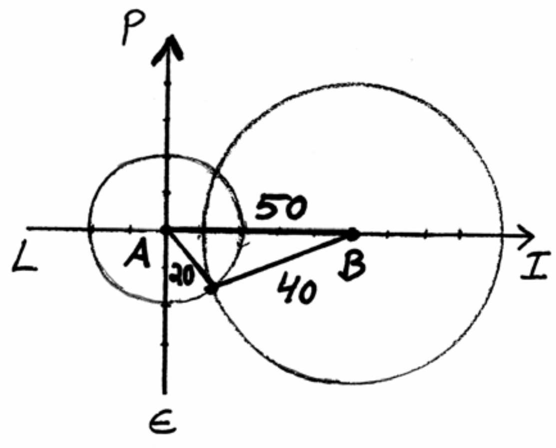
724

Keskipiste $(0,0)$, säde on 20

$(x-0)^2+(y-0)^2=20^2$

Keskipiste $(50,0)$, säde on 40

$(x-50)^2+(y-0)^2=40^2$



Ympyröiden leikkauspisteet:

$$\begin{cases} x^2+y^2=400 \\ (x-50)^2+y^2=1600 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} y^2=400-x^2 & \big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2). \\ (x-50)^2+y^2=1600 \end{cases}$$

$$(x-50)^2+400-x^2=1600$$
$$x^2-100x+2500+400-x^2=1600$$
$$-100x=-1300$$
$$x=13\ (\text{km})$$

Yhtälöstä (1) saadaan

$$y=\overset{(}{\pm}\overset{)}{}\sqrt{400-x^2} \quad \big|\ y<0$$
$$y=-\sqrt{400-13^2}$$
$$y=-\sqrt{231}=-15{,}198...\ (\text{km})$$

Vastaus $\quad (13\text{ km}, -15\text{ km})$

725

Hahmotellaan rajattu alue

1)

$$x^2 + y^2 - 16 < 0$$

$$x^2 + y^2 < 4^2 \qquad \left| \begin{array}{l} \text{keskipiste } (0,0) \\ \text{säde } r = 2 \end{array} \right.$$

Ympyrän sisäpuolinen alue.

2)

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 30 \geq 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 30 \geq 0$$

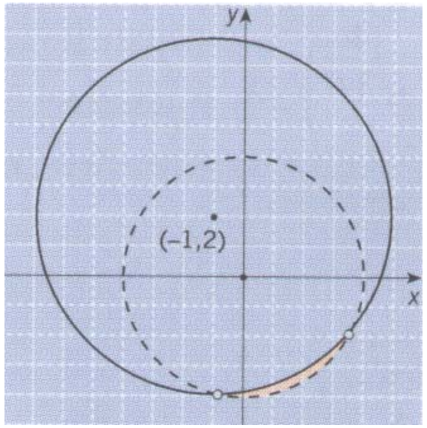
$$(x+1)^2 - 1^2 + (y-2)^2 - 2^2 - 30 \geq 0$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 \geq 1^2 + 2^2 + 30$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 \geq 35$$

keskipiste $(-1,2)$ ja säde $r = \sqrt{35} \approx 5{,}9$

Ympyrän kehä ja ulkopuolinen alue.



Vastaus

Väritetty alue, jonka katkoviivalla piirretty reuna ei kuulu ratkaisualueeseen.

726

Alkuperäinen ympyrä O:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad | r = 3$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Leikkauspisteet akseleilla:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3, \text{joten } O_1 = (3,0) \text{ ja } O_3 = (-3,0)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3, \text{joten } O_2 = (0,3) \text{ ja } O_4 = (0,-3)$$

Ympyröiden yhtälöt:

$$O_1: \quad (x-3)^2 + y^2 = 9$$

$$O_2: \quad x^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$O_3: \quad (x+3)^2 + y^2 = 9$$

$$O_4: \quad x^2 + (y+3)^2 = 9$$

Vastaus Yhteinen alue voidaan ilmoittaa epäyhtälöryhmien avulla seuraavasti:

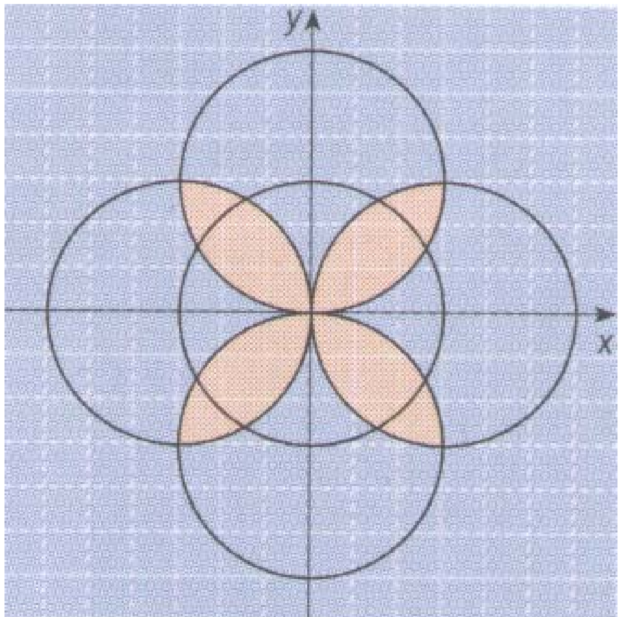
$$\begin{cases}(x-3)^2+y^2\le 3^2\\ x^2+(y-3)^2\le 3^2\end{cases}\ \text{tai}\ \begin{cases}x^2+(y-3)^2\le 3^2\\ (x+3)^2+y^2\le 3^2\end{cases}\ \text{tai}$$

$$\begin{cases}(x+3)^2+y^2\le 3^2\\ x^2+(y+3)^2\le 3^2\end{cases}\ \text{tai}\ \begin{cases}(x-3)^2+y^2\le 3^2\\ x^2+(y+3)^2\le 3^2\end{cases}$$

eli

$$\begin{cases}x^2+y^2-6x\le 0\\ x^2+y^2-6y\le 0\end{cases}\ \text{tai}\ \begin{cases}x^2+y^2-6y\le 0\\ x^2+y^2+6x\le 0\end{cases}\ \text{tai}$$

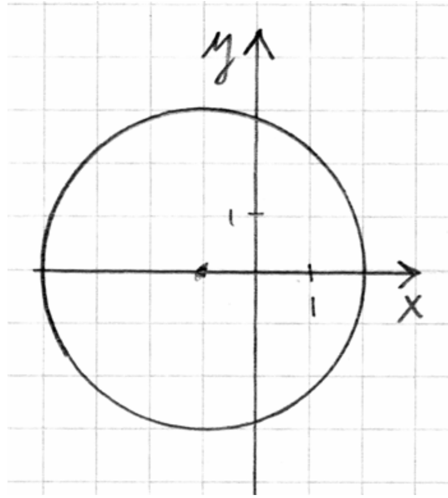
$$\begin{cases}x^2+y^2+6x\le 0\\ x^2+y^2+6y\le 0\end{cases}\ \text{tai}\ \begin{cases}x^2+y^2-6x\le 0\\ x^2+y^2+6y\le 0\end{cases}$$



727

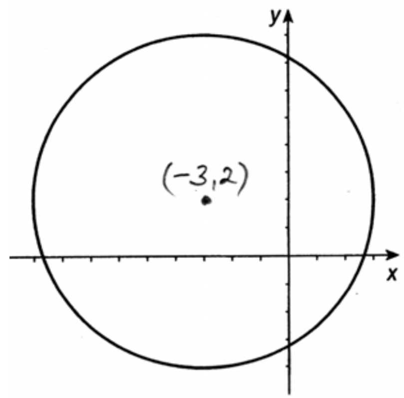
a) Ratkaistaan yhtälö muuttujan y suhteen.

$$x^2+y^2+2x=8$$
$$y^2=-x^2-2x+8$$
$$y=\pm\sqrt{-x^2-2x+8}$$



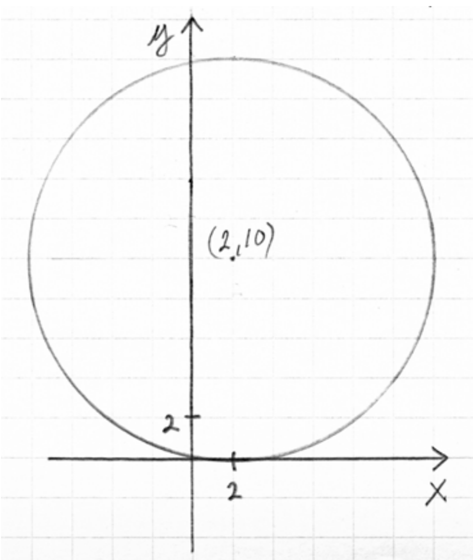
b) Ratkaistaan yhtälö muuttujan y suhteen.

$$x^2+y^2+6x-4y-28=0$$
$$y^2-4y+(x^2+6x-28)=0$$
$$y=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(x^2+6x-28)}}{2\cdot 1}$$
$$y=\frac{4\pm\sqrt{16-4x^2-24x+112}}{2}$$
$$y=\frac{4\pm\sqrt{128-24x-4x^2}}{2}$$
$$y=\frac{4\pm 2\sqrt{32-6x-x^2}}{2}$$
$$y=2\pm\sqrt{32-6x-x^2}$$

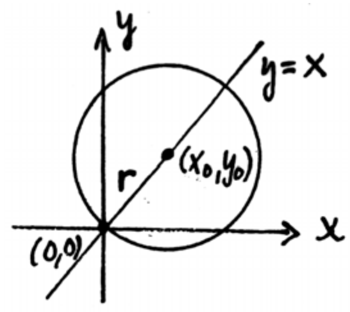


c) Ratkaistaan ympyrän yhtälö muuttujan y suhteen.

$$x^2 + y^2 - 4x - 20y + 4 = 0$$
$$y^2 - 20y + x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$y = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4\cdot 1\cdot(x^2 - 4x + 4)}}{2\cdot 1}$$
$$y = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4x^2 + 16x - 16}}{2}$$
$$y = \frac{20 \pm \sqrt{4(-x^2 + 4x + 96)}}{2}$$
$$y = \frac{20 \pm 2\sqrt{-x^2 + 4x + 96}}{2}$$
$$y = 10 \pm \sqrt{-x^2 + 4x + 96}$$



728



Olkoon (x_0, y_0) ympyrän suoralla $y = x$ oleva keskipiste. Siis $y_0 = x_0$.

Ympyrän säde

$$r = \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2}$$
$$= \sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}} \qquad \Big|\ \text{sijoitetaan } y_0 = x_0$$
$$= \sqrt{x_0^{\,2} + x_0^{\,2}} = \sqrt{2x_0^{\,2}} = \sqrt{2}\,|x_0|$$

Saadaan yhtälö

$$\sqrt{2}\,|x_0| = 5\sqrt{2}$$
$$|x_0| = 5$$
$$x_0 = \pm 5$$

Siis $(x_0, y_0) = (-5, -5)$ tai $(x_0, y_0) = (5, 5)$.

Ympyrän yhtälö

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \left|\ \begin{array}{l}\text{Sijoitetaan}\\ (1)\ x = -5 \text{ ja } y = -5\\ (2)\ x = 5 \text{ ja } y = 5\end{array}\right.$$

(1) $$(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = (\sqrt{2}\cdot 5)^2$$
$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 10y + 25 = 50$$
$$x^2 + y^2 + 10x + 10y = 0$$

(2) $$(x-5)^2+(y-5)^2=(\sqrt{2}\cdot 5)^2$$

$$x^2-10x+25+y^2-10y+25=50$$

$$x^2+y^2-10x-10y=0$$

Vastaus

$$(x+5)^2+(y+5)^2=(\sqrt{2}\cdot 5)^2 \text{ ja } (x-5)^2+(y-5)^2=(\sqrt{2}\cdot 5)^2$$

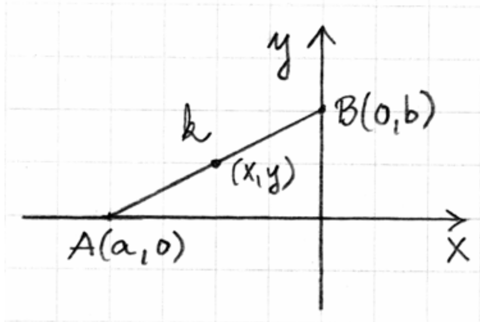
$$\left(x^2+y^2+10x+10y=0 \text{ ja } x^2+y^2-10x-10y=0\right)$$

729

Voidaan olettaa, että $k>0$, koska se on janan pituus.
Olkoon janan päätepisteet $A=(a,0)$ ja $B=(0,b)$.
Janan keskipiste on

$$(x,y)=\left(\frac{a+0}{2},\frac{0+b}{2}\right)$$

$$(x,y)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$$



Siis $a=2x$ ja $b=2y$.
Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseen mukaan

$$|2x|^2+|2y|^2=k^2$$

$$4x^2+4y^2=k^2 \quad |:4$$

$$x^2+y^2=\frac{k^2}{4}$$

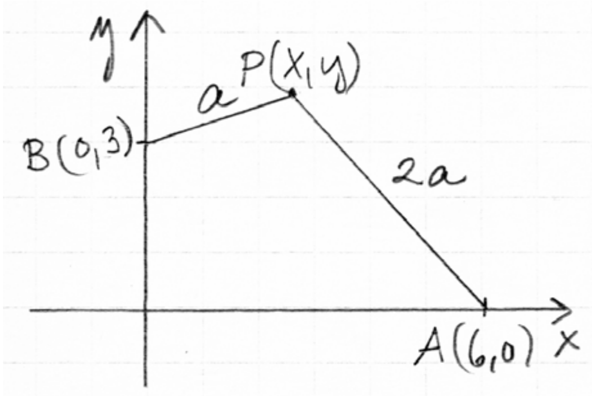
$$(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Origokeskinen ympyrä, jonka säde on $\frac{k}{2}$.

Vastaus Keskipiste liikkuu ympyrän kehää

$x^2+y^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2$, $k>0$, pitkin.

730



Etäisyyksistä saadaan yhtälö

$$AP = 2BP$$

$$\underbrace{\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{2\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}}_{\geq 0} \quad \Big|(\ )^2$$

$$(x-6)^2+(y-0)^2 = 4\left(x^2+(y-3)^2\right)$$

$$x^2-12x+36+y^2 = 4\left(x^2+y^2-6y+9\right)$$

$$x^2-12x+36+y^2 = 4x^2+4y^2-24y+36$$

$$3x^2+3y^2+12x-24y=0 \quad \Big|:3$$

$$x^2+y^2+4x-8y=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+y^2-2\cdot y\cdot 4+4^2-4^2=0$$

$$(x+2)^2-2^2+(y-4)^2-4^2=0$$

$$(x+2)^2+(y-4)^2=2^2+4^2$$

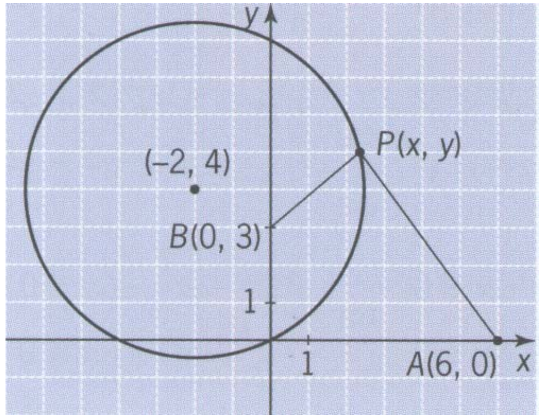
$$(x+2)^2+(y-4)^2=20$$

$$(x+2)^2+(y-4)^2=\left(2\sqrt{5}^2\right) \quad \Big|\ \text{keskipistemuoto}$$

Keskipiste $(-2,4)$, säde $2\sqrt{5}$.

Vastaus

$$(x+2)^2+(y-4)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$$
$$\left(x^2+y^2+4x-8y=0\right)$$

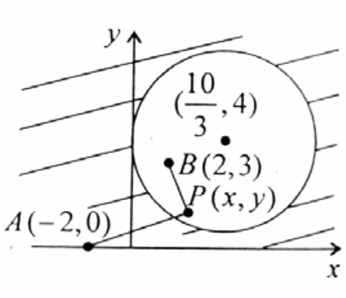


731

$$\left|\overline{AP}\right| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2}$$

$$\left|\overline{BP}\right| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

$$\left|\overline{AP}\right| \le 2\left|\overline{BP}\right|$$



$$\underbrace{\sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2}}_{\ge 0} \le \underbrace{2\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}}_{\ge 0} \quad \left|\,(\ )^2\right.$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 \le 4\left(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9\right)$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 \le 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 - 24y + 36$$

$$3x^2 + 3y^2 - 20x - 24y + 48 \ge 0 \qquad \left|\,:3\right.$$

$$x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x - 8y + 16 \ge 0$$

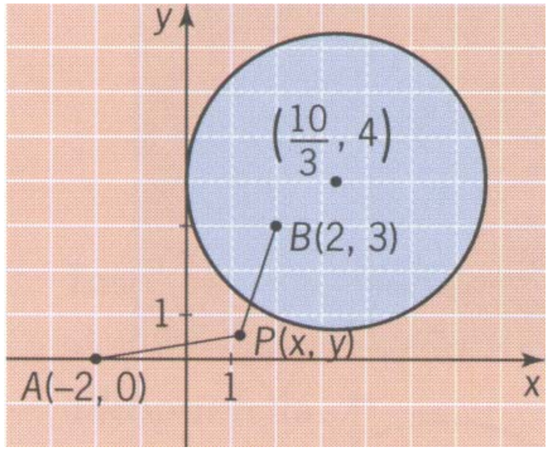
$$x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{10}{3} + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 + y^2 - 2\cdot y\cdot 4 + 4^2 - 4^2 + 16 \ge 0$$

$$\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 + (y-4)^2 - 4^2 + 16 \ge 0$$

$$\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + (y-4)^2 \ge \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

Rajakäyrän $\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2$ kuvaaja on ympyrä, jonka keskipiste on $\left(\frac{10}{3}, 4\right)$ ja säde $r = \frac{10}{3}$.

Vastaus Ympyrä $\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2$ eli $3x^2 + 3y^2 - 20x - 24y + 48 = 0$ ja sen ulkopuolella olevat pisteet.



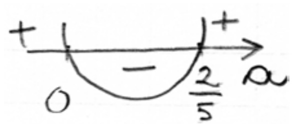
732

Täydennetään ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2+y^2+2ax+4ay+2y+6a+1=0$$
$$x^2+2ax+y^2+(4a+2)y=-6a-1$$
$$x^2+2\cdot x\cdot a+a^2-a^2$$
$$+y^2+2\cdot y\cdot(2a+1)+(2a+1)^2-(2a+1)^2=-6a-1$$
$$(x+a)^2+\left(y+2a+1\right)^2=5a^2-2a$$

Saadussa yhtälössä säteen neliö on $r^2=5a^2-2a$, joten kyseessä on ympyrä, jos $5a^2-2a>0$.
Nollakohdat:

$$5a^2-2a=0$$
$$a(5a-2)=0$$
$$a=0 \text{ tai } a=\frac{2}{5}$$



Siis $a<0$ tai $a>\frac{2}{5}$.

Ympyräparven ympyröiden keskipisteet toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x=-a\\ y=-2a-1\end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$y=2x-1$$

Koska parametri a toteuttaa epäyhtälöt $a<0$ tai $a>\frac{2}{5}$, saadaan

$$a<0 \text{ tai } a>\frac{2}{5} \quad \Big| x=-a \text{ eli } a=-x$$
$$-x<0 \text{ tai } -x>\frac{2}{5}$$
$$x>0 \text{ tai } x<-\frac{2}{5}$$

Vastaus Ympyrä, kun $a<0$ tai $a>\frac{2}{5}$.
Keskipisteiden joukko muodostuu niistä suoran $y=2x-1$ pisteistä, missä $x>0$ tai $x<-\frac{2}{5}$.

733

Selvitetään yhteiset pisteet laskemalla ympyräparven kahden mielivaltaisen ympyrän leikkauspisteet.

Kun $a=0$, saadaan ympyrä $x^2+y^2-4x-1=0$

Kun $a=1$, saadaan ympyrä $x^2+y^2-4x+2y-3=0$

Ympyröiden leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x^2+y^2-4x-1=0 & \big| \cdot 1 \\ x^2+y^2-4x+2y-3=0 & \big| \cdot(-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-1=0 \\ -x^2-y^2+4x-2y+3=0\end{cases}$$

$$-1-2y+3=0$$

$$-2y=-2$$

$$y=1 \qquad \big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x^2+1^2-4x-1=0$$

$$x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0$$

$$x=0 \text{ tai } x=4$$

Ympyräparveen kuuluvat kaksi ympyrää leikkaavat pisteissä $(0,1)$ ja $(4,1)$.

On vielä osoitettava, että ympyräparven kaikki ympyrät kulkevat pisteiden $(0,1)$ ja $(4,1)$ kautta.

Sijoitetaan pisteiden koordinaatit ympyräparven yhtälöön.

Piste $(0,1)$: Vasen puoli on $0^2+1^2-4\cdot 0+2a\cdot 1-2a-1=0$
Oikea puoli on 0
Piste $(0,1)$ on siis jokaisella parven ympyrällä.

Piste $(4,1)$: Vasen puoli on $4^2+1^2-4\cdot 4+2a\cdot 1-2a-1=$
$16+1-16+2a-2a-1=0$
Oikea puoli on 0
Piste $(4,1)$ on siis jokaisella parven ympyrällä.

Piirtämistä varten muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

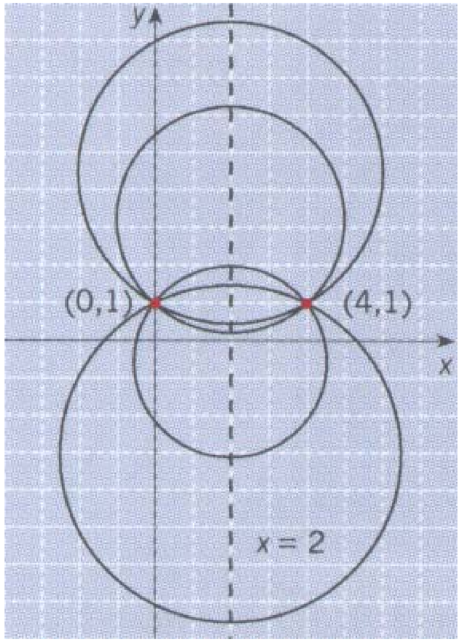
$$x^2+y^2-4x+2ay-2a-1=0$$

$$x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+y^2+2\cdot y\cdot a+a^2-a^2-2a-1=0$$

$$(x-2)^2+(y+a)^2=a^2+2a+5$$

Ympyrän keskipiste on $(2,-a)$ eli keskipiste sijaitsee aina suoralla $x=2$.
Parvi muodostuu ympyröistä, joiden keskipiste on suoralla $x=2$ ja jotka kulkevat pisteiden $(0,1)$ ja $(4,1)$ kautta.

Vastaus $(0,1)$ ja $(4,1)$



734

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x + 4y^2 - 3 \le 0 & \Big| :4 \\ 4x^2 + 4x + 4y^2 - 3 \le 0 & \Big| :4 \\ 4x^2 + 4y^2 - 4y\sqrt{3} - 1 \le 0 & \Big| :4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + y^2 - \dfrac{3}{4} \le 0 \\ x^2 + x + y^2 - \dfrac{3}{4} \le 0 \\ x^2 + y^2 - y\sqrt{3} - \dfrac{1}{4} \le 0 \end{cases}$$

Muunnetaan yhtälöt keskipistemuotoon.

$$\begin{cases} x^2 - 2\cdot x\cdot\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \dfrac{3}{4} \\ x^2 + 2\cdot x\cdot\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \dfrac{3}{4} \\ x^2 + y^2 - 2\cdot y\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4} \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4} \\ x^2 + \left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

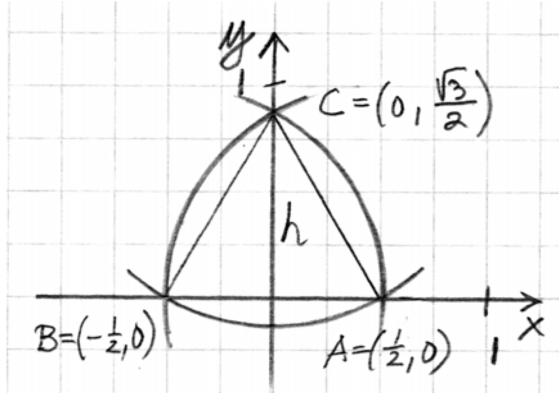
$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le 1^2 & \text{kp } A=\left(\dfrac{1}{2},0\right),\ r=1 \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le 1^2 & \text{kp } B=\left(-\dfrac{1}{2},0\right),\ r=1 \\ x^2 + \left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \le 1^2 & \text{kp } C=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ r=1 \end{cases}$$

Tutkitaan kolmiota *ABC*.

$$AB = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$



Kolmio on tasasivuinen, joten aluetta rajaavat ympyränkaaret ovat 60° kaaria. Vastaavan sektorin ala on $\dfrac{60^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot 1^2 = \dfrac{\pi}{6}$.

Kolmion ABC ala on $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Reuleaux'n kolmion ala saadaan laskemalla kolme sektoria yhteen ja vähentämällä summasta kolmion *ABC* ala kahdesti.

$$\begin{aligned} A &= 3\cdot A_{sektori} - 2\cdot A_{kolmio} \\ &= 3\cdot\frac{\pi}{6} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Vastaus $\dfrac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$

735

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x^2+y^2=25\\ y=-7x+25\end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x^2+(-7x+25)^2=25$$
$$x^2+49x^2-350x+625=25$$
$$50x^2-350x+600=0 \quad \Big| :50$$
$$x^2-7x+12=0$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1}$$
$$x=\frac{7\pm1}{2}$$
$$x=3 \text{ tai } x=4$$

Kun $x=3$, niin yhtälöstä (2) saadaan

$$y=-7\cdot3+25=4$$

Vastaavasti, kun $x=4$, niin

$$y=-7\cdot4+25=-3$$

Vastaus Leikkauspisteet ovat $(3,4)$ ja $(4,-3)$.

736

Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2+y^2+6x-4y-3=0$$
$$x^2+2\cdot x\cdot3+3^2-3^2+y^2-2\cdot y\cdot2+2^2-2^2-3=0$$
$$(x+3)^2-3^2+(y-2)^2-2^2-3=0$$
$$(x+3)^2+(y-2)^2=9+4+3$$
$$(x+3)^2+(y-2)^2=4^2$$

Siis keskipiste on $(-3,2)$ ja säde on 4.

Lasketaan keskipisteen etäisyys suorista.

a) Suoran yhtälö $x+2y-12=0$

$$d=\frac{|-3+2\cdot2-12|}{\sqrt{1^2+2^2}} \quad \left| \begin{array}{l} d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a=1,\ b=2,\ c=-12 \\ (x_0,y_0)=(-3,2) \end{array}\right.$$

$$=\frac{|-11|}{\sqrt5}$$
$$=\frac{11}{\sqrt5}=4{,}919...>4$$

Koska $d>r$, suora on ympyrän ulkopuolella.

b) Muunnetaan suoran yhtälö yleiseen muotoon.

$$y = 3x - 1$$
$$3x - y - 1 = 0$$

$$d = \frac{|3\cdot(-3) - 1\cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} \qquad \left| \begin{array}{l} d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a = 3,\ b = -1,\ c = -1 \\ (x_0, y_0) = (-3, 2) \end{array} \right.$$

$$= \frac{|-12|}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{10}} = 3{,}794... < 4$$

Koska $d < r$, suora on ympyrän sekantti.

c) Muunnetaan suoran yhtälö yleiseen muotoon.

$$y = -2$$
$$y + 2 = 0$$

$$d = \frac{|0\cdot(-3) + 1\cdot 2 + 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \qquad \left| \begin{array}{l} d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a = 0,\ b = 1,\ c = 2 \\ (x_0, y_0) = (-3, 2) \end{array} \right.$$

$$= \frac{4}{1} = 4 = r$$

Koska $d = r$, suora on ympyrän tangentti.

Vastaus a) ulkopuolella b) sekantti c) tangentti

737

Ympyrän $x^2 + y^2 = 25$ keskipiste on origo $(0,0)$ ja säde 5.

Tangentti kulkee pisteen $(3,-4)$ kautta, joten sen yhtälö on muotoa

$$y - (-4) = k(x - 3) \qquad |\, y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y + 4 = kx - 3k$$
$$kx - y - 3k - 4 = 0$$

Tangentti on säteen etäisyydellä ympyrän keskipisteestä, joten saadaan yhtälö

$$\frac{|k\cdot 0 - 1\cdot 0 - 3k - 4|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 5 \qquad \left| \begin{array}{l} d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a = k,\ b = -1,\ c = -3k - 4 \end{array} \right.$$

$$\frac{|-3k - 4|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5 \qquad \left| \begin{array}{l} (x_0, y_0) = (0, 0) \\ \cdot\sqrt{k^2+1} \end{array} \right.$$

$$\underbrace{|-3k - 4|}_{\geq 0} = \underbrace{5\sqrt{k^2 + 1}}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} (\ \ )^2 \\ |a|^2 = a^2 \end{array} \right.$$

$$9k^2 + 24k + 16 = 25k^2 + 25$$
$$-16k^2 + 24k - 9 = 0$$

$$k = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4\cdot(-16)\cdot(-9)}}{2\cdot(-16)}$$

$$k = \frac{-24 \pm 0}{-32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

Tangentin yhtälö on

$$kx - y - 3k - 4 = 0$$
$$\frac{3}{4}x - y - 3 \cdot \frac{3}{4} - 4 = 0 \qquad \Big| \cdot 4$$
$$3x - 4y - 9 - 16 = 0$$
$$3x - 4y - 25 = 0$$

Vastaus $3x - 4y - 25 = 0$
$\left(y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4} \right)$

738

Määritetään ympyrän keskipiste ja säde.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 20 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1^2 + 2^2 + 20$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

Ympyrän keskipiste on $(1,2)$ ja säde on 5.

Säteen päätepisteiden $(1,2)$ ja $(4,6)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$$

Ympyrän tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan, joten

$$\frac{4}{3} \cdot k_t = -1$$
$$k_t = -\frac{3}{4}$$

Tangentti kulkee pisteen $(4,6)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{3}{4}$, joten tangentin yhtälö on

$$y - 6 = -\frac{3}{4}(x - 4) \qquad \Big| \, y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - 6 = -\frac{3}{4}x + 3$$
$$\frac{3}{4}x + y - 9 = 0 \qquad \Big| \cdot 4$$
$$3x + 4y - 36 = 0$$

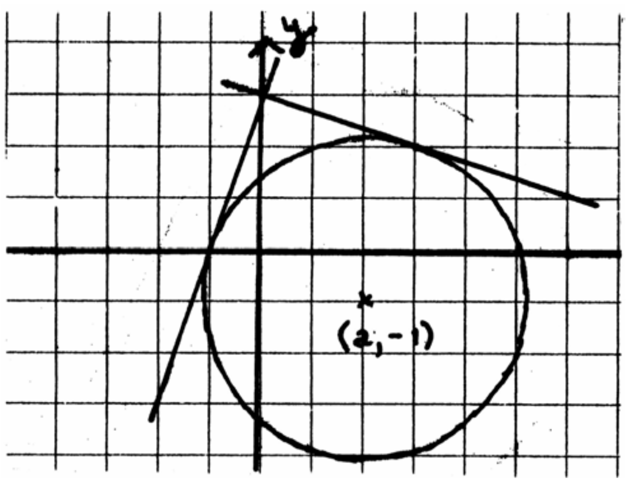
Vastaus $3x + 4y - 36 = 0$
$\left(y = -\frac{3}{4}x + 9 \right)$

739

Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2+y^2-4x+2y-5=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+y^2+2\cdot y\cdot 1+1^2-1^2-5=0$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2=2^2+1^2+5$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$$

Keskipiste on $(2,-1)$ ja säde on $r=\sqrt{10}$.



Tangentti leikkaa y-akselin pisteessä $(0,3)$, joten tangentin yhtälö on $y=kx+3$ eli $kx-y+3=0$.

Keskipiste $(2,-1)$ on säteen $r=\sqrt{10}$ etäisyydellä tangentista, joten saadaan yhtälö

$$d=\frac{|k\cdot 2-1\cdot(-1)+3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{10} \quad \left| \; d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a=k,\ b=-1,\ c=3,\ (x_0,y_0)=(2,-1) \right.$$

$$\underbrace{|2k+4|}_{\geq 0}=\underbrace{\sqrt{10}\,|k^2+1|}_{\geq 0} \quad |(\ )^2$$
$$4k^2+16k+16=10k^2+10$$
$$6k^2-16k-6=0 \quad |:2$$
$$3k^2-8k-3=0$$
$$k=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{2\cdot 3}=\frac{8\pm 10}{6}$$
$$k=3 \text{ tai } k=-\frac{1}{3}$$

Tangentin yhtälö on $y=3x+3$ tai $y=-\frac{1}{3}x+3$

Vastaus Tangentin yhtälö on $3x-y+3=0$ tai $x+3y-9=0$ $\left(y=3x+3 \text{ tai } y=-\frac{1}{3}x+3\right)$.

740

Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2+y^2-2x-6y-6=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2+y^2-2\cdot y\cdot 3+3^2-3^2-6=0$$
$$(x-1)^2-1^2+(y-3)^2-3^2-6=0$$
$$(x-1)^2+(y-3)^2=4^2$$

Keskipiste on $(1,3)$ ja säde on $r=4$.

a) Lasketaan pisteen $(1,7)$ etäisyys keskipisteestä $(1,3)$.

$$d=\sqrt{(1-1)^2+(3-7)^2}=\sqrt{0+4^2}=4=r$$

Piste $(1,7)$ on säteen etäisyydellä keskipisteestä ja sen x-koordinaatti on sama kuin keskipisteellä, joten tangentti on vaakasuora suora $y=7$.

b) Lasketaan pisteen $(-3,3)$ etäisyys keskipisteestä $(1,3)$.

$$d=\sqrt{(-3-1)^2+(3-3)^2}=\sqrt{4^2}=4=r$$

Piste $(-3,3)$ on säteen etäisyydellä keskipisteestä ja sen y-koordinaatti on sama kuin keskipisteellä, joten tangentti on pystysuora suora $x=-3$.

c) Lasketaan pisteen $(3,4)$ etäisyys keskipisteestä $(1,3)$.

$$d=\sqrt{(3-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}<r$$

Piste $(3,4)$ on ympyrän sisäpuolella, joten tangenttia ei ole.

Vastaus a) $y=7$ b) $x=-3$ c) ei ole

741

Määritetään ympyrän keskipiste.

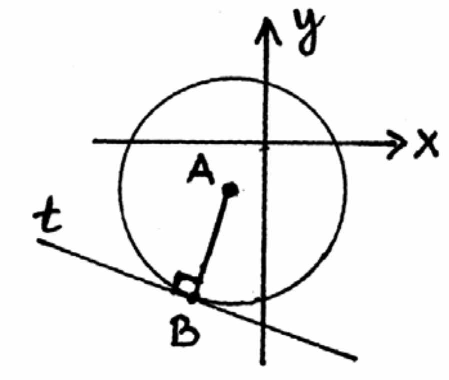
$$x^2+y^2+x+3y-6=0$$
$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+2\cdot y\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-6=0$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+6$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$$

Keskipiste on $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ ja säde on $\sqrt{\frac{17}{2}}\approx 2{,}1$.

Lasketaan säteen kulmakerroin.

$A=\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $B=(-2,-4)$

$$k_{AB}=\frac{-4+\frac{3}{2}}{-2+\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$$



Säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten

$$k_{AB}\cdot k_t=-1$$

$$k_t=\frac{-1}{k_{AB}}=\frac{-1}{\frac{5}{3}}=-\frac{3}{5}$$

Tangentin yhtälö on

$$y-y_0=k(x-x_0)$$
$$y+4=-\frac{3}{5}(x+2)$$
$$y+4=-\frac{3}{5}x-\frac{6}{5} \qquad \big|\cdot 5$$
$$5y+20=-3x-6$$
$$3x+5y+26=0$$

Vastaus $3x+5y+26=0$

$$\left(y=-\frac{3}{5}x-5\frac{1}{5}\right)$$

742

Ympyrän $(x+1)^2+(y+1)^2=13$ keskipiste on $(-1,-1)$ ja säde on $\sqrt{13}$.

Lasketaan pisteen $(4,-2)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä.

$$d=\sqrt{(4-(-1))^2+(-2-(-1))^2}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}>\sqrt{13}$$

Piste $4,-2$ on ympyrän ulkopuolella, joten sen kautta kulkee kaksi ympyrän tangenttia.

Pisteen $(4,-2)$ kautta kulkevan tangentin yhtälö on

$$y-(-2)=k(x-4) \qquad \big|\, y-y_0=k(x-x_0)$$
$$y+2=kx-4k$$
$$kx-y-4k-2=0$$

Tangentti on säteen etäisyydellä keskipisteestä. Saadaan yhtälö

$$\frac{|k\cdot(-1)-1\cdot(-1)+-2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{13} \qquad \Bigg|\, d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a=k, b=-1, c=-4k-2,\ (x_0,y_0)=(-1,-1)$$

$$\frac{|-5k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{13} \qquad \big|\cdot\sqrt{k^2+1}$$

$$\underbrace{|-5k-1|}_{\geq 0}=\underbrace{\sqrt{13}\sqrt{k^2+1}}_{\geq 0} \qquad \big|\,(\ )^2,\ |a|^2=a^2$$

$$25k^2+10k+1=13(k^2+1)$$
$$12k^2+10k-12=0 \qquad \big|:2$$
$$6k^2+5k-6=0$$

$$k=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6\cdot(-6)}}{2\cdot 6}$$

$$k=\frac{-5\pm 13}{12}$$

$$k=-\frac{3}{2} \text{ tai } k=\frac{2}{3}$$

Kun $k=-\frac{3}{2}$, tangentin yhtälö on

$$y-(-2)=-\frac{3}{2}(x-4) \qquad \left| y-y_0=k(x-x_0)\right.$$

$$y+2=-\frac{3}{2}x+6$$

$$\frac{3}{2}x+y-4=0 \qquad \left|\cdot 2\right.$$

$$3x+2y-8=0$$

Kun $k=\frac{2}{3}$, tangentin yhtälö on

$$y-(-2)=\frac{2}{3}(x-4) \qquad \left| y-y_0=k(x-x_0)\right.$$

$$y+2=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3} \qquad \left|\cdot 3\right.$$

$$3y+6=2x-8$$

$$2x+3y-14=0$$

Vastaus $3x+2y-8=0$ tai $2x+3y-14=0$

$$\left(y=-\frac{3}{2}x+4 \text{ tai } y=\frac{2}{3}x-\frac{14}{3}\right)$$

743

$$(x-2)^2+(y+1)^2=2^2$$

Sijoitetaan pisteen $(5,-3)$ koordinaatit yhtälöön.

Vasen puoli on $(5-2)^2+(-3+1)^2=3^2+(-2)^2=9+4=13$

Oikea puoli on $2^2=4$

Koska $13>4$, piste on ympyrän ulkopuolella, ja sen kautta kulkee kaksi ympyrän tangenttia. Pisteen $(5,-3)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y-(-3)=k(x-5) \qquad \left| y-y_0=k(x-x_0)\right.$$

$$y+3=kx-5k$$

$$kx-y-5k-3=0$$

Tangentti on säteen etäisyydellä ympyrän keskipisteestä.
Ympyrän keskipiste on $(2,-1)$ ja säde on 2.
Saadaan yhtälö

$$\frac{|k\cdot 2-1\cdot(-1)-5k-3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2 \qquad \left| \begin{array}{l} d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a=k, b=-1, c=-5k-3 \\ (x_0,y_0)=(2,-1) \end{array}\right.$$

$$\frac{|2k+1-5k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=2 \qquad \left|\cdot\sqrt{k^2+1}\right.$$

$$\underbrace{|-3k-2|}_{\geq 0}=\underbrace{2\sqrt{k^2+1}}_{\geq 0} \qquad \left|(\ )^2\right.$$

$$9k^2+12k+4=4(k^2+1)$$

$$9k^2+12k+4=4k^2+4$$

$$5k^2+12k=0$$
$$k(5k+12)=0$$
$$k=0 \quad \text{tai} \quad 5k+12=0$$
$$k=-\frac{12}{5}$$

Tangentit: $kx-y-5k-3=0$

$k=0$: $\quad -y-3=0$ eli $y=-3$

$k=-\frac{12}{5}$: $\quad -\frac{12}{5}x-y-5\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)-3=0 \quad \Big| \cdot(-5)$

$$12x+5y-60+15=0$$
$$12x+5y-45=0$$

Vastaus $\quad y+3=0$ tai $12x+5y-45=0$

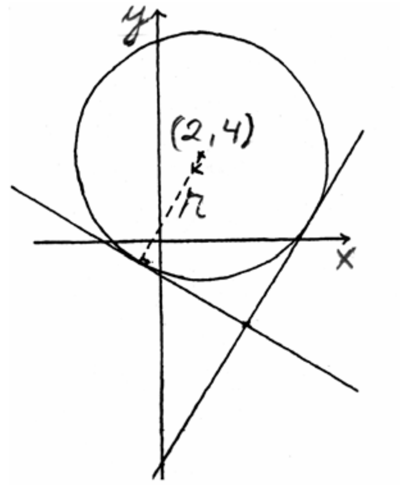
$\left(y=-3 \text{ tai } y=-2\frac{2}{5}x+9\right)$

744

Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2+y^2-4x-8y-14=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+y^2-2\cdot y\cdot 4+4^2-4^2-14=0$$
$$(x-2)^2+(y-4)^2=2^2+4^2+14$$
$$(x-2)^2+(y-4)^2=\left(\sqrt{34}\right)^2$$

Lasketaan pisteen $(4,-4)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $(2,4)$ ja verrataan sitä ympyrän säteeseen $\sqrt{34}$.



$$d=\sqrt{(4-2)^2+(-4-4)^2}$$
$$=\sqrt{4+64}$$
$$=\sqrt{68}>\sqrt{34}$$

Siis piste on ympyrän ulkopuolella ja saadaan kaksi tangenttia. Pisteen $(4,-4)$ kautta kulkevien tangenttien yhtälöt ovat

$$y-(-4)=k(x-4)$$
$$y+4=kx-4k$$
$$kx-y-4k-4=0$$

Keskipiste $(2,4)$ on säteen $r=\sqrt{34}$ etäisyydellä tangenteista, joten saadaan yhtälö

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$a=k, b=-1, c=-4k-4$$

$$(x_0,y_0)=(2,4)$$

$$\frac{|k\cdot 2-4-4k-4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{34}$$

$$\underbrace{|-2k-8|}_{\geq 0}=\underbrace{\sqrt{34}\sqrt{k^2+1}}_{\geq 0} \quad \Big| (\ )^2$$

$$|-2k-8|^2=\left(\sqrt{34}\sqrt{k^2+1}\right)^2 \quad \Big| |a|^2=a^2$$

$$4k^2+32k+64=34k^2+34$$

$$30k^2-32k-30=0$$

$$15k^2-16k-15=0$$

$$k=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot 15\cdot(-15)}}{2\cdot 15}$$

$$=\frac{16\pm\sqrt{1156}}{30}=\frac{16\pm 34}{30}$$

$$k=\frac{16+34}{30}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3} \text{ tai } k=\frac{16-34}{30}=-\frac{18}{30}=-\frac{3}{5}$$

Tangenttien yhtälöt ovat $\left(y-y_0=k\left(x-x_0\right)\right)$:

$k=\frac{5}{3}$:

$$y+4=\frac{5}{3}(x-4)$$

$$y=\frac{5}{3}x-\frac{20}{3}-4$$

$$y=\frac{5}{3}x-\frac{32}{3}$$

$$3y=5x-32$$

$$5x-3y-32=0$$

$k=-\frac{3}{5}$:

$$y+4=-\frac{3}{5}(x-4)$$

$$y=-\frac{3}{5}x+\frac{12}{5}-4$$

$$y=-\frac{3}{5}x-\frac{8}{5}$$

$$5y=-3x-8$$

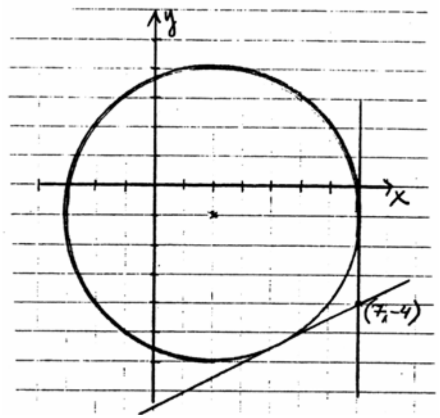
$$3x+5y+8=0$$

Vastaus Tangenttien yhtälöt ovat $5x-3y-32=0$ ja $3x+5y+8=0$ $\left(y=\frac{5}{3}x-10\frac{2}{3} \text{ ja } y=-\frac{3}{5}x-1\frac{3}{5}\right)$

745

$$(x-2)^2+(y+1)^2=25$$

keskipiste on $(2,-1)$ ja säde on 5.
Lasketaan pisteen $(7,-4)$ ja keskipisteen $(2,-1)$ välinen etäisyys.



$$d=\sqrt{(7-2)^2+(-4-(-1))^2}$$

$$d=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}>5=r$$

Siis piste $(7,-4)$ on ympyrän ulkopuolella.
Tangentin yhtälö on $y+4=k(x-7)$ eli $kx-y-7k-4=0$.

Keskipiste $(2,-1)$ on säteen etäisyydellä tangentista.

Saadaan yhtälö

$$\frac{|k\cdot 2-1\cdot(-1)-7k-4|}{\sqrt{k^2+1}}=5 \qquad \left| \begin{array}{l} d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a=k, b=-1, c=-7k-4 \\ (x_0,y_0)=(2,-1) \end{array} \right.$$

$$|2k-7k+1-4|=5\sqrt{k^2+1}$$

$$\underbrace{|-5k-3|}_{\geq 0}=\underbrace{5\sqrt{k^2+1}}_{\geq 0} \qquad |(\ )^2$$

$$25k^2+30k+9=25k^2+25$$

$$30k=16$$

$$k=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

Tangentin yhtälö on

$$y+4=\frac{8}{15}(x-7) \qquad |\, y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y=\frac{8}{15}x-\frac{56}{15}-4=\frac{8}{15}x-\frac{116}{15}$$

$$y=\frac{8}{15}x-7\frac{11}{15} \text{ eli } 8x-15y-116=0$$

Koska ympyrän ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää kaksi tangenttia, on etsittävä vielä toinen tangentti.
Koska keskipiste on $(2,-1)$ ja säde on 5, niin pisteen $(7,-4)$ kautta kulkeva pystysuora suora $x=7$ on säteen etäisyydellä ympyrän keskipisteestä ja siksi ympyrän tangentti.

Vastaus tangenttien yhtälöt ovat
$8x-15y-116=0$ ja $x-7=0$
$\left(y=\frac{8}{15}x-7\frac{11}{15} \text{ ja } x=7\right)$

746

Ympyrän säde on pisteen $(2,3)$ etäisyys suorasta $y = 2x + 2$.
Muunnetaan suoran yhtälö yleiseen muotoon.

$$2x - y + 2 = 0$$

$$r = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \qquad \left| \begin{array}{l} d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ a = 2, b = -1, c = 2 \\ (x_0, y_0) = (2,3) \end{array} \right.$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Ympyrän yhtälö on

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 \qquad | \text{ keskipistemuoto}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = \frac{9}{5}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 - \frac{9}{5} = 0 \qquad | \cdot 5$$

$$5x^2 + 5y^2 - 20x - 30y + 65 - 9 = 0$$

$$5x^2 + 5y^2 - 20x - 30y + 56 = 0 \qquad | \text{ normaalimuoto}$$

Vastaus $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2$

$\left(5x^2 + 5y^2 - 20x - 30y + 56 = 0\right)$

747

Tapa 1
Lasketaan leikkauspisteet.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y - 3 = 0 \\ y = -\dfrac{1}{2}x - 2 \end{cases} \qquad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2}x - 2\right)^2 - 8x - 2\left(-\frac{1}{2}x - 2\right) - 3 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4 - 8x + x + 4 - 3 = 0$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 5x + 5 = 0 \qquad \left| \cdot \frac{4}{5} \right.$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Sijoittamalla $x = 2$ yhtälöön $y = -\frac{1}{2}x - 2$ saadaan

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -3$$

Saadaan yksi leikkauspiste $(2,-3)$, joten suora on ympyrän tangentti. □

Tapa 2
Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2+y^2-8x-2y-3=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+y^2-2\cdot y\cdot 1+1^2-1^2-3=0$$
$$(x-4)^2+(y-1)^2=4^2+1^2+3$$
$$(x-4)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{20}\right)^2$$

Keskipiste on $(4,1)$ ja säde on $r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Suora $y=-\frac{1}{2}x-2$ on tangentti, jos keskipisteen etäisyys suorasta on säde. Muunnetaan suoran yhtälö yleiseen muotoon.

$$y=-\frac{1}{2}x-2 \quad \Big|\cdot 2$$
$$2y=-x-4$$
$$x+2y+4=0$$

Keskipisteen $(4,1)$ etäisyys suorasta on

$$d=\frac{|4+2\cdot 1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} \qquad \Bigg| \; d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a=1, b=2, c=4,\ (x_0,y_0)=(4,1)$$

$$=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$$

Siis $d=r$, joten suora on ympyrän tangentti. □

748

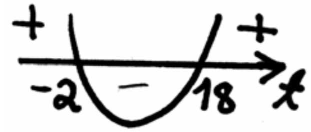
Ympyrän ja suoran yhteiset pisteet

$$\begin{cases} x^2+y^2-tx+y+t+2=0 & (1) \\ y=2x-1 & (2) \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x^2+(2x-1)^2-tx+2x-1+t+2=0$$
$$x^2+4x^2-4x+1-tx+2x+t+1=0$$
$$5x^2+(-t-2)x+t+2=0$$

a) Kaksi ratkaisua, kun

$$D>0 \qquad \Big| \; D=b^2-4ac$$
$$(-t-2)^2-4\cdot 5\cdot(t+2)>0$$
$$(t+2)^2-4\cdot 5\cdot(t+2)>0$$
$$(t+2)^2-20(t+2)>0$$
$$(t+2)(t+2-20)>0$$
$$(t+2)(t-18)>0$$



nollakohdat: $t=2$ ja $t=18$.
Siis $D>0$, kun $t<-2$ tai $t>18$.

b) Yksi ratkaisu, kun $D=0$.
$t=-2$ tai $t=18$

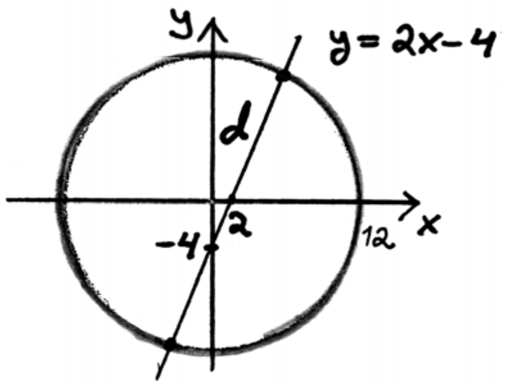
c) Ei ratkaisua, kun $D<0$
$-2<t<18$

Vastaus a) $t<-2$ tai $t>18$ b) $t=-2$ tai $t=18$ c) $-2<t<18$

749

Ympyrän yhtälö

$$(x-0)^2+(y-0)^2=12^2$$
$$x^2+y^2=144$$



Ympyrän ja suoran leikkauspisteet:

$$\begin{cases} x^2+y^2=144 & (1) \\ y=2x-4 & (2) \end{cases}$$ | Sijoitetaan yhtälöön (1).

$$x^2+(2x-4)^2=144$$
$$x^2+4x^2-16x+16=144$$
$$5x^2-16x-128=0$$
$$x=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot5\cdot(-128)}}{2\cdot5}$$
$$x=\frac{16\pm\sqrt{2816}}{10}$$

$x_1=6,906...$ tai $x_2=-3,706...$ | Sijoitetaan yhtälöön (2).

$y_1=9,813...$ tai $y_2=-11,413...$

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2{}^2)}=23,730...(\text{km})$$

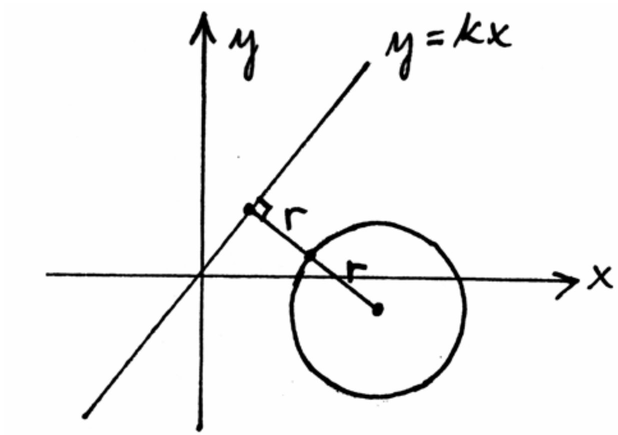
Vastaus 23,7 km

750

Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon

$$x^2+y^2-14x+2y+40=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot7+7^2-7^2+y^2+2\cdot y\cdot1+1^2-1^2+40=0$$
$$(x-7)^2+(y+1)^2=7^2+1^2-40$$
$$(x-7)^2+(y+1)^2=10$$

Keskipiste $(7,-1)$ ja säde $\sqrt{10}$.



Origon kautta kulkeva suora $y=kx$ on säteen etäisyydellä ympyrästä eli ympyrän keskipisteen etäisyys suorasta $kx-y=0$ on $2r=2\cdot\sqrt{10}=\sqrt{4\cdot10}=\sqrt{40}$.

Saadaan yhtälö

$$\sqrt{40} = \frac{|k \cdot 7 + 1|}{\sqrt{k^2+1}} \qquad \left| \begin{array}{l} d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a = k, b = -1, c = 0 \\ (x_0, y_0) = (7, -1) \end{array} \right.$$

$$\underbrace{|7k+1|}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{40}\sqrt{k^2+1}}_{\geq 0} \qquad |\ (\ )^2$$

$$(7k^2+1)^2 = 40(k^2+1)$$

$$49k^2 + 14k + 1 = 40k^2 + 40$$

$$9k^2 + 14k - 39 = 0$$

$$k = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-39)}}{2 \cdot 9} = \frac{-14 \pm \sqrt{1600}}{18} = \frac{-14 \pm 40}{18}$$

$$k_1 = \frac{-14-40}{18} = -3 \quad \text{tai} \quad k_2 = \frac{-14+40}{18} = \frac{26}{18} = \frac{13}{9}$$

Siis $y = -3x$ eli $3x + y = 0$

tai $y = \frac{13}{9}x$ eli $13x - 9y = 0$

Vastaus $3x + y = 0$ tai $13x - 9y = 0$

$\left(y = -3x \text{ tai } y = 1\frac{4}{9}x \right)$

751

Ympyrän tangentti on säteen etäisyydellä keskipisteestä. Tangentti on suora $3x + 4y - 15 = 0$. Merkitään ympyrän keskipistettä (x, y) ja säde on 5. Saadaan yhtälö

$$\frac{|3x+4y-15|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \qquad \left| \begin{array}{l} d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ a = 3, b = 4, c = -15 \\ (x_0, y_0) = (x, y) \end{array} \right.$$

$$\frac{|3x+4y-15|}{5} = 5 \qquad | \cdot 5$$

$$|3x + 4y - 15| = 25$$

$$3x + 4y - 15 = \pm 25$$

$$3x + 4y - 15 = 25 \text{ tai } 3x + 4y - 15 = -25$$

$$3x + 4y - 40 = 0 \text{ tai } 3x + 4y + 10 = 0$$

Siis ympyrän keskipiste (x, y) toteuttaa toisen edellä saaduista suoran yhtälöistä eli keskipiste on suoralla $3x + 4y - 40 = 0$ tai $3x + 4y + 10 = 0$.

Toisaalta keskipiste on myös säteellä, joka on tangentin $3x + 4y - 15 = 0$ pisteeseen $(1,3)$ piirretty normaali.

Muodostetaan tämän normaalin yhtälö. Muunnetaan ensin tangentin yhtälö ratkaistuun muotoon, josta saadaan tangentin kulmakerroin.

$$3x + 4y - 15 = 0$$

$$4y = -3x + 15$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$k_t = -\frac{3}{4}$, joten $k_n = \frac{4}{3}$.

Pisteen $(1,3)$ kautta kulkeva normaali on

$$y-3=\frac{4}{3}(x-1) \qquad \Big|\, y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y-3=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3} \qquad \Big|\cdot 3$$

$$4x-3y+5=0$$

Keskipiste on siis toisella edellä saaduista suorista ja nyt saadulla normaalilla. Saadaan kaksi yhtälöparia.

I

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}3x+4y-40=0\\ 4x-3y+5=0\end{cases} \qquad \begin{vmatrix}\cdot 3\\ \cdot 4\end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases}9x+12y-120=0\\ 16x-12y+20=0\end{cases}$$

$$25x \quad -100=0$$

$$25x=100$$

$$x=4 \qquad \Big|\text{ Sijoitetaan yhtälöön }(1).$$

$$3\cdot 4+4y-40=0$$

$$4y=40-12$$

$$4y=28$$

$$y=7$$

Siis keskipiste $(4,7)$

Saadaan ympyrän yhtälö

$$(x-4)^2+(y-7)^2=5^2$$

$$x^2-8x+16+y^2-14y+49=25$$

$$x^2+y^2-8x-14y+40=0$$

II

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}3x+4y+10=0\\ 4x-3y+5=0\end{cases} \qquad \begin{vmatrix}\cdot 3\\ \cdot 4\end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases}9x+12y+30=0\\ 16x-12y+20=0\end{cases}$$

$$25x \quad +50=0$$

$$25x=-50$$

$$x=-2 \qquad \Big|\text{ Sijoitetaan yhtälöön }(1).$$

$$3\cdot(-2)+4y+10=0$$

$$4y=6-10$$

$$y=-1$$

Siis keskipiste $(-2,-1)$

Saadaan ympyrän yhtälö

$$(x+2)^2+(y+1)^2=5^2$$

$$x^2+4x+4+y^2+2y+1=25$$

$$x^2+y^2+4x+2y-20=0$$

Vastaus $(x-4)^2+(y-7)^2=5^2$ tai $(x+2)^2+(y+1)^2=5^2$

$\left(x^2+y^2-8x-14y+40=0 \text{ tai } x^2+y^2+4x+2y-20=0\right)$

752

Tapa 1
Keskipiste on säteen etäisyydellä tangenteista eli tangenttisuorien muodostamien kulmien puolittajilla.
Selvitetään kulmien puolittajien yhtälöt.
Kulmanpuolittajan mielivaltainen piste (x, y) on yhtä etäällä kulman kyljistä. Saadaan yhtälö

$$\frac{|3x+2y+12|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|2x-3y-5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} \quad \Big| \cdot \sqrt{13}$$

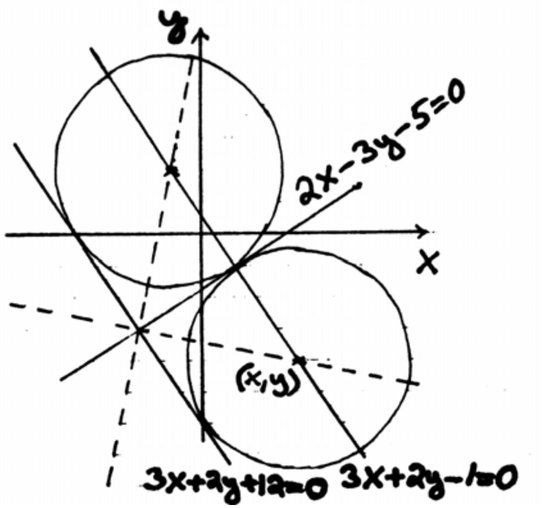
$$|3x+2y+12| = |2x-3y-5|$$

$$3x+2y+12 = \pm(2x-3y-5)$$

$$3x+2y+12 = 2x-3y-5 \text{ tai } 3x+2y+12 = -2x+3y+5$$

$$(1)\, x+5y+17=0 \qquad \text{tai} \quad (2) \quad 5x-y+7=0$$

Keskipisteet sijaitsevat suoran $3x+2y-1=0$ ja kulmien puolittajien leikkauspisteissä.



Keskipiste (1):

$$\begin{cases} x+5y+17=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot(-2) \\ \cdot 5 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases} -3x-15y-51=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases} \qquad +\begin{cases} -2x-10y-34=0 \\ 15x+10y-5=0 \end{cases}$$

$$-13y-52=0 \qquad -13x \quad -39=0$$

$$-13y=52 \qquad 13x=39$$

$$y=-4 \qquad x=3$$

Keskipiste (1) on $(3,-4)$.

Keskipiste (2):

$$\begin{cases} 5x-y+7=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot(-3) \\ \cdot 5 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{cases} 10x-2y+14=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases} \qquad +\begin{cases} -15x+3y-21=0 \\ 15x+10y-5=0 \end{cases}$$

$$13x \quad +13=0 \qquad 13y-26=0$$

$$13x=-13 \qquad 13y=26$$

$$x=-1 \qquad y=2$$

Keskipiste (2) on $(-1,2)$.

Vastaus Ympyrän keskipiste on $(3,-4)$ tai $(-1,2)$.

Tapa 2

Keskipiste on suoralla $3x+2y-1=0$ eli suoralla $y=\dfrac{-3x+1}{2}$.

Siis se on $\left(x,\dfrac{-3x+1}{2}\right)$.

Keskipiste on säteen etäisyydellä tangenteista
$3x+2y+12=0$ ja $2x-3y-5=0$. Saadaan yhtälö

$$\frac{\left|3x+2\cdot\frac{-3x+1}{2}+12\right|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{\left|2x-3\cdot\frac{-3x+1}{2}-5\right|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\qquad \left|\ d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right.$$

$$\frac{|3x-3x+1+12|}{\sqrt{13}}=\frac{\left|2x+\frac{9}{2}x-\frac{3}{2}-5\right|}{\sqrt{13}}\qquad |\cdot\sqrt{13}$$

$$|3x-3x+1+12|=\left|2x+\frac{9}{2}x-\frac{3}{2}-5\right|$$

$$|13|=\left|6\frac{1}{2}x-6\frac{1}{2}\right|$$

$$6\frac{1}{2}x-6\frac{1}{2}=\pm 13$$

$$6\frac{1}{2}x-6\frac{1}{2}=13 \quad \text{tai} \quad 6\frac{1}{2}x-6\frac{1}{2}=-13$$

$$6\frac{1}{2}x=19\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad 6\frac{1}{2}x=-6\frac{1}{2}$$

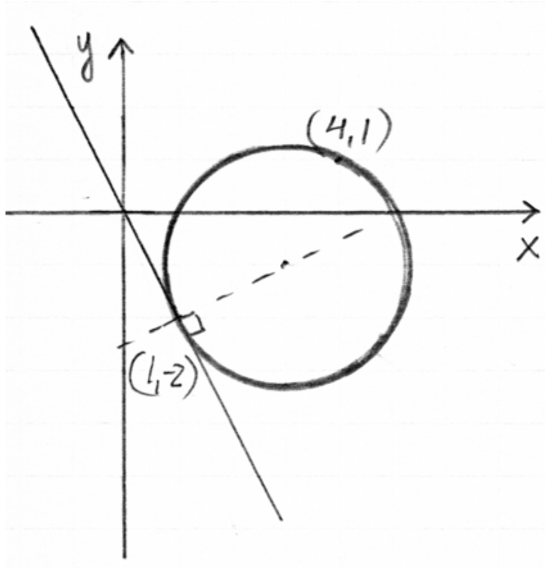
$$x=3 \quad \text{tai} \quad x=-1$$

Sijoittamalla muuttujan x arvot yhtälöön $y=\dfrac{-3x+1}{2}$ saadaan

$$y=\frac{-3\cdot 3+1}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \quad \text{tai} \quad y=\frac{-3\cdot(-1)+1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Vastaus Ympyrän keskipiste on $(3,-4)$ tai $(-1,2)$.

753



Tangentti
$2x+y=0$

$y=-2x$

$k_t=-2$, joten
sivuamispisteessä olevan
säteen kulmakerroin $k_r=\dfrac{1}{2}$.

Säteen yhtälö:

$$y-(-2)=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$(1)\qquad y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$$

Olkoon ympyrän keskipiste (a,b). Pisteet $(1,-2)$ ja $(4,1)$ ovat säteen etäisyydellä keskipisteestä. Saadaan yhtälö

$$(1-a)^2+(-2-b)^2=(4-a)^2+(1-b)^2$$
$$1-2a+a^2+4+4b+b^2=16-8a+a^2+1-2b+b^2$$
$$5-2a+4b=17-8a-2b$$
$$6a=12-6b$$
$$a=2-b \qquad \text{keskipiste on } (2-b,b)$$

Keskipiste toteuttaa säteen yhtälön (1). Saadaan

$$b=\frac{1}{2}(2-b)-\frac{5}{2}$$
$$b=1-\frac{b}{2}-\frac{5}{2}$$
$$\frac{3}{2}b=-\frac{3}{2}$$
$$b=-1$$

Keskipiste on $(2-b,b)=(3,-1)$ ja säde on pisteiden $(4,1)$ ja $(3,-1)$ välinen etäisyys

$$r=\sqrt{(4-3)^2+\left(1-(-1)^2\right)}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

Ympyrän yhtälö on

$$(x-3)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$x^2-6x+9+y^2+2y+1-5=0$$
$$x^2+y^2-6x+2y+5=0$$

Vastaus $\quad (x-3)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$

$\left(x^2+y^2-6x+2y+5=0\right)$

754

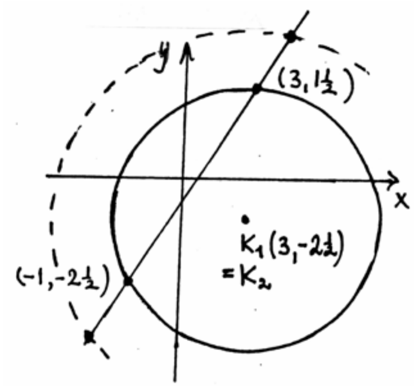
Määritetään ympyrän K_1 keskipiste ja säde.

$$4x^2+4y^2-24x+20y-3=0 \qquad |:4$$
$$x^2+y^2-6x+5y-\frac{3}{4}=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+y^2+2\cdot y\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}=0$$
$$(x-3)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=3^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$
$$(x-3)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=4^2$$

Siis keskipiste on $\left(3,-2\frac{1}{2}\right)$ ja säde on $r=4$.

Pisteiden $\left(-1,-2\frac{1}{2}\right)$ ja $\left(3,1\frac{1}{2}\right)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y+\frac{5}{2}=\frac{-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{-1-3}(x+1) \qquad \left|\, k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ ja } \quad y-y_0=k(x-x_0)\right.$$
$$y+\frac{5}{2}=\frac{-4}{-4}(x+1)$$
$$y+\frac{5}{2}=x+1$$
$$y=x-\frac{3}{2}$$



Ympyrän K_2

keskipiste on $\left(3,-2\frac{1}{2}\right)=\left(3,-\frac{5}{2}\right)$

säde on $\frac{3}{2}\cdot 4=6$

yhtälö on

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=6^2$$

$$x^2-6x+9+y^2+5y+\frac{25}{4}=36$$

$$x^2+y^2-6x+5y=36-9-\frac{25}{4}$$

$$x^2+y^2-6x+5y-\frac{83}{4}=0$$

Ympyrän K_2 ja suoran leikkauspisteet

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\begin{cases} x^2+y^2-6x+5y-\frac{83}{4}=0 \\ y=x-\frac{3}{2} & \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1). \end{cases}$$

$$x^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-6x+5\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{83}{4}=0$$

$$x^2+x^2-3x+\frac{9}{4}-6x+5x-{}^{2)}\frac{15}{2}-\frac{83}{4}=0$$

$$2x^2-4x-26=0 \qquad \Big|:2$$

$$x^2-2x-13=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+52}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{56}}{2}$$

$$=\frac{2\pm 2\sqrt{14}}{2}=\frac{2\left(1\pm\sqrt{14}\right)}{2}=1\pm\sqrt{14}$$

Leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan yhtälöstä (2) $y=x-\frac{3}{2}$.

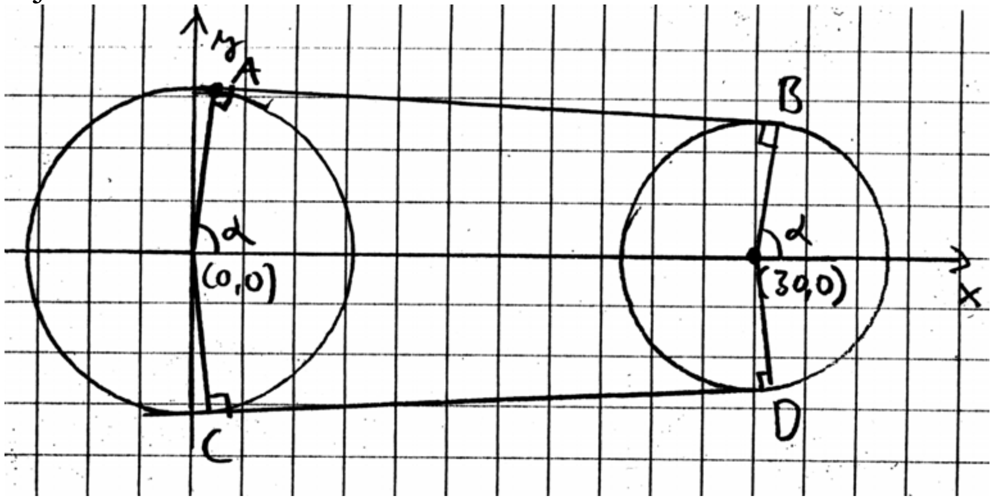
$$\begin{cases} x=1-\sqrt{14} \\ y=1-\sqrt{14}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}-\sqrt{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{14} \\ y=1+\sqrt{14}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+\sqrt{14} \end{cases}$$

Vastaus Pisteissä $\left(1-\sqrt{14},-\frac{1}{2}-\sqrt{14}\right)$ ja $\left(1+\sqrt{14},-\frac{1}{2}+\sqrt{14}\right)$

755

Sijoitetaan kuvio koordinaatistoon seuraavasti:



Eturattaan yhtälö: $x^2+y^2=8^2$

Takarattaan yhtälö: $(x-30)^2+y^2=3{,}5^2$

Määritetään rattaiden yhteisen tangentin yhtälö:
Olkoon se $y=kx+b$ eli $kx-y+b=0$.

Pisteen $(0,0)$ etäisyys suorasta $kx-y+b=0$ on 8, joten

$$\frac{|k\cdot 0-1\cdot 0+b|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=8 \qquad \left| \; d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right.$$

$$\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}=8$$

$$|b|=8\sqrt{k^2+1}$$

$$b=8\sqrt{k^2+1} \text{ tai } b=-8\sqrt{k^2+1}$$

Toisaalta pisteen $(30,0)$ etäisyys suorasta $kx-y+b=0$ on $3{,}5$:

$$\frac{|k\cdot 30-1\cdot 0+b|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=3\frac{1}{2}$$

$$\frac{|30k+b|}{\sqrt{k^2+1}}=3\frac{1}{2}$$

$$|30k+b|=3\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}$$

$$30k+b=3\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1} \quad \text{tai } 30k+b=-3\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}$$

$$b=3\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}-30k \text{ tai } b=-3\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}-30k$$

Koska b:llä on kaksi ratkaisua, jotka ovat toistensa vastalukuja, ratkaistaan tapaus, jossa $b>0$:

$$8\sqrt{k^2+1}=3\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}-30k$$

$$\underbrace{4\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}}_{\geq 0}=\underbrace{-30k}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} k<0 \\ (\ )^2 \end{array}\right.$$

$$\frac{81}{4}(k^2+1)=900k^2$$

$$81(k^2+1)=3600k^2$$

$$3519k^2=81$$

$$k^2=\frac{81}{3519}$$

$$k=(\pm)\frac{9}{\sqrt{3519}} \qquad \left| \; k<0\right.$$

$$b = 8\sqrt{k^2+1} \qquad \big| b>0, k<0$$

$$= 8\cdot\sqrt{\frac{81}{3519}+1}$$

$$= 8\sqrt{\frac{3600}{3519}} = \frac{8\cdot 60}{\sqrt{3519}} = \frac{480}{\sqrt{3519}}$$

$$y = kx + b$$

$$y = -\frac{9}{\sqrt{3519}} + \frac{480}{\sqrt{3519}} \quad \text{eli}$$

$$y = -0{,}1517...x + 8{,}0915...$$

Etsitään tangentin $y = -0{,}1517...x + 8{,}0915...$ ja ympyröiden leikkauspisteet A ja B.

1) Ympyrä $x^2 + y^2 = 8^2$

$$x^2 + y^2 = 8^2 \qquad \big| \text{ sijoitetaan } y = -0{,}1517...x + 8{,}0915...$$

$$x^2 + (-0{,}1517...x + 8{,}0915...)^2 = 64$$

$$x^2 + 0{,}02301...x - 2{,}455...x + 65{,}473... = 64$$

$$1{,}0230...x^2 - 2{,}455...x + 1{,}473... = 0$$

$$x = \frac{2{,}455... \pm \sqrt{(2{,}455...)^2 - 4\cdot 1{,}02\,301...\cdot 1{,}473...}}{2\cdot 1{,}02\,301}$$

$$x = \frac{2{,}455... \pm 0}{2\cdot 1{,}02\,301...} = 1{,}2, \text{ jolloin}$$

y=$0{,}1517...\cdot 1{,}2 + 8{,}09... = 7{,}909...$

Siis $A = (1{,}2; 7{,}909...)$

2) Ympyrä $(x-30)^2 + y^2 = 3{,}5$

$$(x-30)^2 + y^2 = 3{,}5^2 \qquad \text{sijoitetaan } y = -0{,}157...x + 8{,}0915...$$

$$(x-30)^2 + (-0{,}157...x + 8{,}0915...)^2 = 3{,}5^2$$

$$x^2 - 60x + 900 + 0{,}02301...x^2 - 2{,}455...x + 65{,}473... = 12{,}25$$

$$1{,}02301...x^2 - 62{,}455...x + 953{,}223... = 0$$

$$x = \frac{62{,}455... \pm \sqrt{(-62{,}455...)^2 - 4\cdot 1{,}02\,301...\cdot 953{,}223...}}{2\cdot 1{,}02\,301...}$$

$$x = \frac{62{,}455... \pm 0}{2\cdot 1{,}02\,301...}$$

$$x = 30{,}525$$

$$y = -0{,}1517...\cdot 30{,}525 + 8{,}09... = 3{,}460...$$

Siis $B = (30{,}525; 3{,}46...)$

$$AB = \sqrt{(30{,}525 - 1{,}2)^2 + (3{,}46... - 7{,}909...)^2} = 29{,}660...$$

Kaari AC: $\qquad A = (1{,}2; 7{,}909...)$

$$\tan\alpha = \frac{7{,}909...}{1{,}2}, \text{ josta } \alpha = 81{,}373...^\circ$$

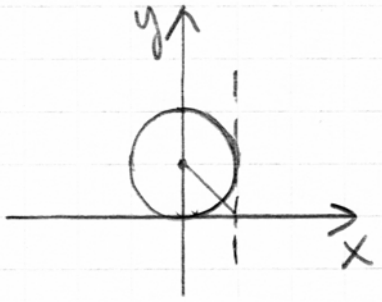
$$AC = \left(\frac{360^\circ - 2\cdot 81{,}373...^\circ}{360^\circ}\right)\cdot 2\pi\cdot 8 = 27{,}541...$$

Kaari BD:

$$BD = \frac{2\cdot 81{,}373...}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 3{,}5 = 9{,}941...$$

Vastaus Ketjujen pituus on $2AB + AC + BD \approx 96{,}8$ cm.

756



Muunnetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$
$$(x-0)^2 + y^2 - 2\cdot y\cdot 1 + 1^2 - 1^2 = 0$$
$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1^2$$

Ympyrän tangentteja ovat esimerkiksi suorat $y = 0$ ja $x = 1$, joiden leikkauspisteestä $(1,0)$ ympyrä näkyy suorassa kulmassa.
Tämän pisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä on

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Annetaan ympyrän kiertyä tangentteineen keskipisteensä ympäri.
Tällöin ympyrä näkyy koko ajan suorassa kulmassa ja tangenttien leikkauspiste on koko ajan etäisyydellä $\sqrt{2}$ ympyrän keskipisteestä.
Näin pisteet, joista ympyrä näkyy suorassa kulmassa, muodostavat ympyrän, jonka keskipiste on sama kuin alkuperäisen ympyrän keskipiste ja säde on $\sqrt{2}$.
Saadaan

$$x^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

Vastaus $x^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$

$(x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0)$