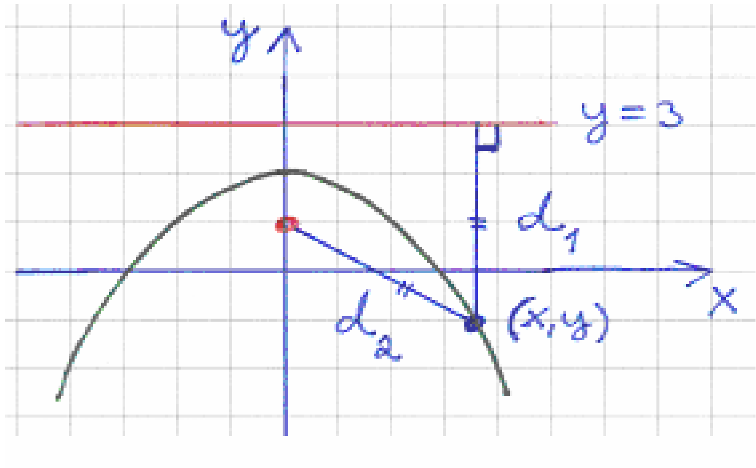
801

Paraabeli on niiden pisteiden (x, y) joukko, jotka ovat yhtä kaukana johtosuorasta ja polttopisteestä.



Pisteen (x, y) etäisyys suorasta $y = 3$ on $d_1 = |y-3|$.

Pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(0,1)$ on

$$d_2 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} \qquad \Big| \; d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (y-1)}$$

Saadaan yhtälö

$$d_1 = d_2$$

$$\underbrace{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{|y-3|}_{\geq 0} \qquad \Big| \text{ Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \text{ niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\right)^2 = |y-3|^2 \qquad \Big| \; \left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \quad |a|^2 = a^2$$

$$x^2 + (y-1)^2 = (y-3)^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{y^2} - 6y + 9$$

$$x^2 + 4y - 8 = 0$$

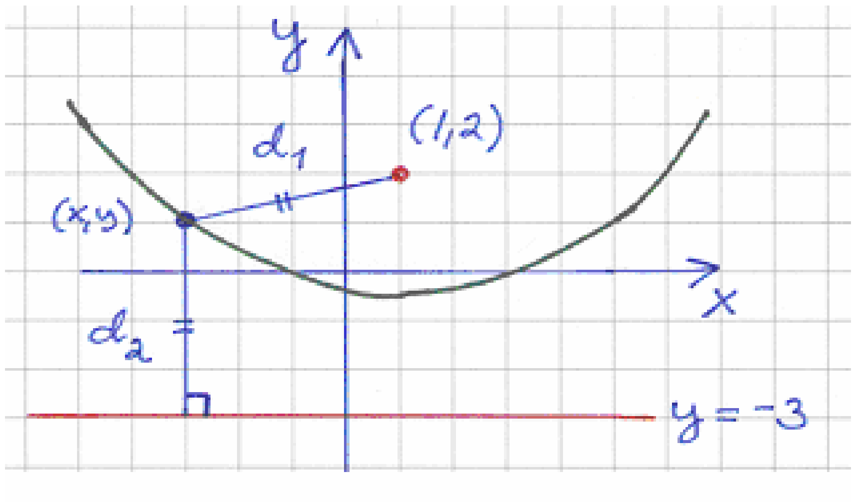
$$4y = -x^2 + 8 \qquad \Big| : 4$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

Vastaus $\quad y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2$

802

Olkoon (x, y) paraabelin piste. Paraabelin määritelmän mukaan pisteen (x, y) etäisyys polttopisteestä $(1, 2)$ on yhtä suuri kuin etäisyys johtosuorasta $y = -3$.



Pisteen (x, y) etäisyys polttopisteestä $(1, 2)$ on

$$d_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

Pisteen (x, y) etäisyys johtosuorasta $y = -3$ on

$$d_2 = |y - (-3)| = |y + 3|$$

Saadaan yhtälö

$$d_1 = d_2$$

$$\underbrace{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{|y+3|}_{\geq 0} \qquad \Big| \text{ Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \text{ niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

$$\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = \left(|y+3|\right)^2 \qquad \Big| \left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \quad |a|^2 = a^2$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (y+3)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 6y + 9$$

$$x^2 - 2x - 4 - 10y = 0$$

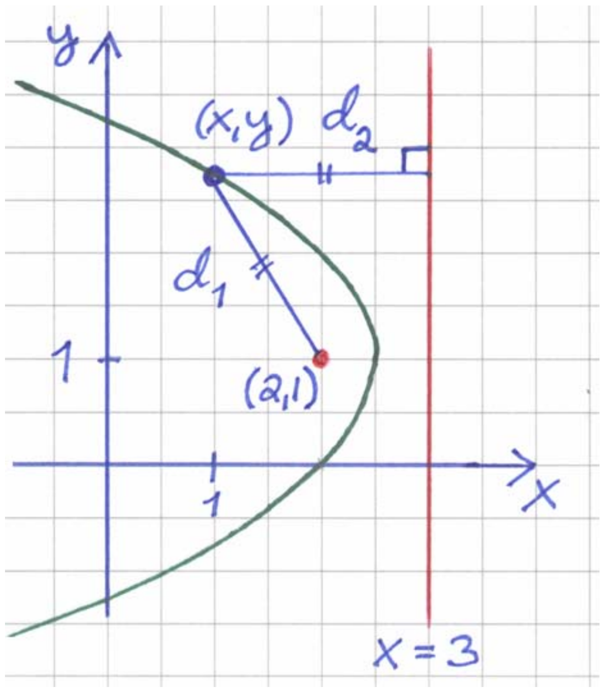
$$10y = x^2 - 2x - 4 \qquad |:10$$

$$y = \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$$

Vastaus $\quad y = \dfrac{1}{10}x^2 - \dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{5}$

803

Olkoon (x, y) paraabelin piste. Paraabelin määritelmän mukaan pisteen (x, y) etäisyys polttopisteestä $(2,1)$ on yhtä suuri kuin etäisyys johtosuorasta $x = 3$.



Pisteen (x, y) etäisyys polttopisteestä $(2,1)$ on

$$d_1 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

Pisteen (x, y) etäisyys johtosuorasta $x = 3$ on

$$d_2 = |x-3|$$

Saadaan yhtälö

$$d_1 = d_2$$

$$\underbrace{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{|x-3|}_{\geq 0} \qquad \Big| \text{ Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \text{ niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = |x-3|^2 \qquad \Big| \left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \quad |a|^2 = a^2$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9$$

$$2x - 4 + y^2 - 2y = 0$$

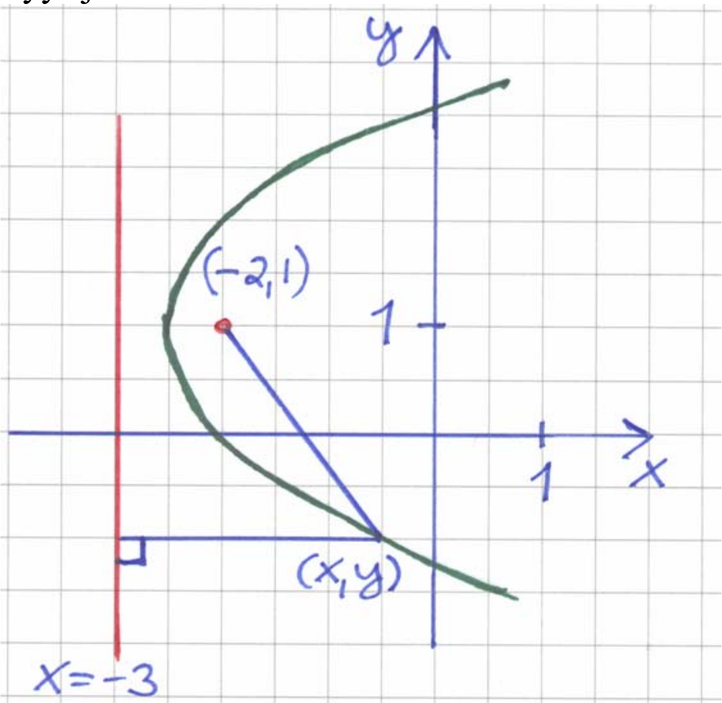
$$2x = -y^2 + 2y + 4 \qquad |:2$$

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + y + 2$$

Vastaus $\quad x = -\dfrac{1}{2}y^2 + y + 2$

804

Olkoon (x, y) paraabelin piste. Paraabelin määritelmän mukaan pisteen (x, y) etäisyys polttopisteestä $(-2,1)$ on yhtä suuri kuin etäisyys johtosuorasta $x = -3$.



Pisteen (x, y) etäisyys polttopisteestä $(-2,1)$ on

$$d_1 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$$

Pisteen (x, y) etäisyys johtosuorasta $x = -3$ on

$$d_2 = |x-(-3)| = |x+3|$$

Saadaan yhtälö

$$d_1 = d_2$$

$$\underbrace{\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{|x+3|}_{\geq 0}$$

| Jos $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

$$\left(\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = |x+3|^2$$

| $\left(\sqrt{a}\right)^2$
| $|a|^2 = a^2$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = (x+3)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 6x + 9$$

$$-2x - 4 + y^2 - 2y = 0$$

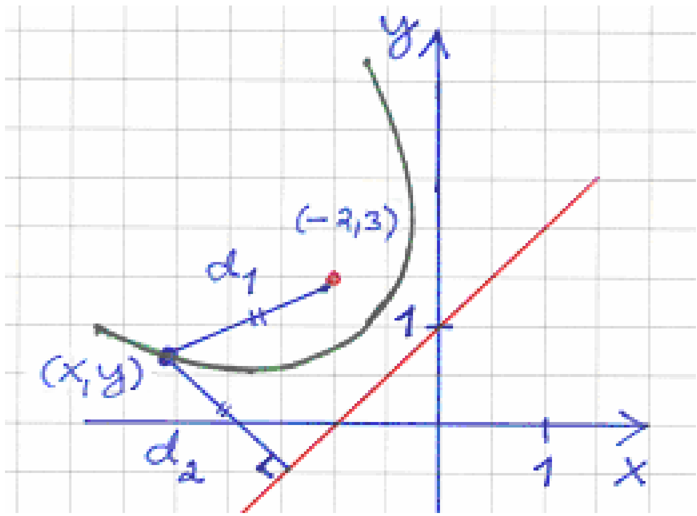
$$2x = y^2 - 2y - 4$$

$$x = \frac{1}{2}y^2 - y - 2$$

Vastaus $x = \frac{1}{2}y^2 - y - 2$

805

Olkoon (x, y) paraabelin piste.



Pisteen (x, y) etäisyys polttopisteestä $(-2,3)$ on

$$d_1 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$$

Pisteen (x, y) etäisyys johtosuorasta
$y = x + 2$ eli $x - y + 2 = 0$ on

$$d_2 = \frac{|x-y+2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$$

$$\left| \; d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \right.$$

Paraabelin määritelmän mukaan saadaan yhtälö

$$d_1 = d_2$$

$$\underbrace{\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \\ \text{niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2. \end{array} \right.$$

$$\left(\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(\frac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad \left| \begin{array}{l} \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ |a|^2 = a^2 \end{array} \right.$$

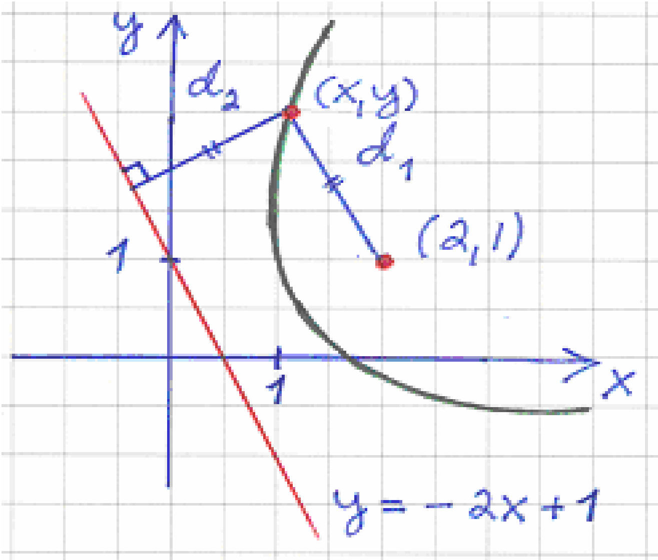
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = \frac{(x-y+2)^2}{2} \qquad | \cdot 2$$

$$2\left(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9\right) = (x-y)^2 + 2 \cdot (x-y) \cdot 2 + 2^2$$
$$2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 - 12y + 18 = x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 4$$
$$x^2 + 4x + 22 + y^2 - 8y + 2xy = 0$$

Vastaus $\quad x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 8y + 22 = 0$

806

Olkoon (x, y) paraabelin piste.



Pisteen (x, y) etäisyys polttopisteestä $(2,1)$ on

$$d_1 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

ja johtosuorasta $y = -2x + 1$ eli $2x + y - 1 = 0$ on

$$d_2 = \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}}$$

Paraabelin määritelmän mukaan saadaan yhtälö

$$d_1 = d_2$$

$$\underbrace{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}}}_{\geq 0} \quad \Big| \text{ Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \text{ niin } a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}}\right)^2 \quad \Big| \left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \ \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, \ |a|^2 = a^2$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(2x + y - 1)^2}{5} \quad \Big| \cdot 5$$

$$5\left(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1\right) = (2x + y)^2 - 2 \cdot (2x + y) \cdot 1 + 1^2$$

$$5x^2 - 20x + 20 + 5y^2 - 10y + 5 = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1$$

$$x^2 - 16x + 24 + 4y^2 - 8y - 4xy = 0$$

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 16x - 8y + 24 = 0$$

Vastaus $\quad x^2 + 4y^2 - 4xy - 16x - 8y + 24 = 0$

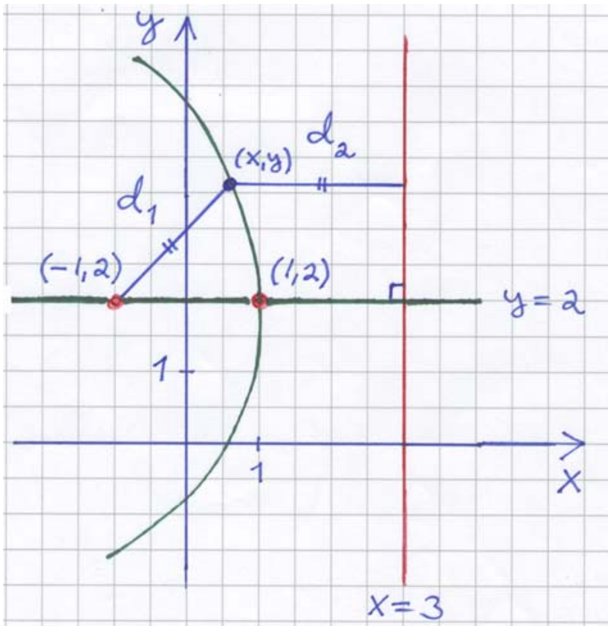
807

Paraabelin akseli kulkee polttopisteen $(-1,2)$ ja huipun $(1,2)$ kautta. Polttopisteen ja huipun y-koordinaatti on 2, joten akselin yhtälö on $y=2$.

Johtosuora on kohtisuorassa akselia vastaan, joten se on pystysuora ja siten sen yhtälö on $x=a$. Koska huipun $(1,2)$ etäisyys polttopisteestä $(-1,2)$ on 2, pitää olla välttämättä huipun etäisyys johtosuorasta myös 2 (paraabelin määritelmä).

Siis johtosuora on $x=3$ (suora $x=-1$ ei kelpaa, koska polttopiste ei ole johtosuoralla).

Paraabelin polttopiste on siis $(-1,2)$ ja johtosuora on $x=3$.



Olkoon (x,y) paraabelin (mielivaltainen) piste.
Tällöin paraabelin määritelmän mukaan saadaan yhtälö

$$d_1=d_2$$

$$\underbrace{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}_{\geq 0}=\underbrace{|x-3|}_{\geq 0}$$

Jos $a\geq 0$ ja $b\geq 0$, niin $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$.

$$\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\right)^2=|x-3|^2$$

$\left(\sqrt{a}\right)^2$

$|a|^2=a^2$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=(x-3)^2$$

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4=x^2-6x+9$$

$$8x-4+y^2-4y=0$$

$$8x=-y^2+4y+4$$

$$x=-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

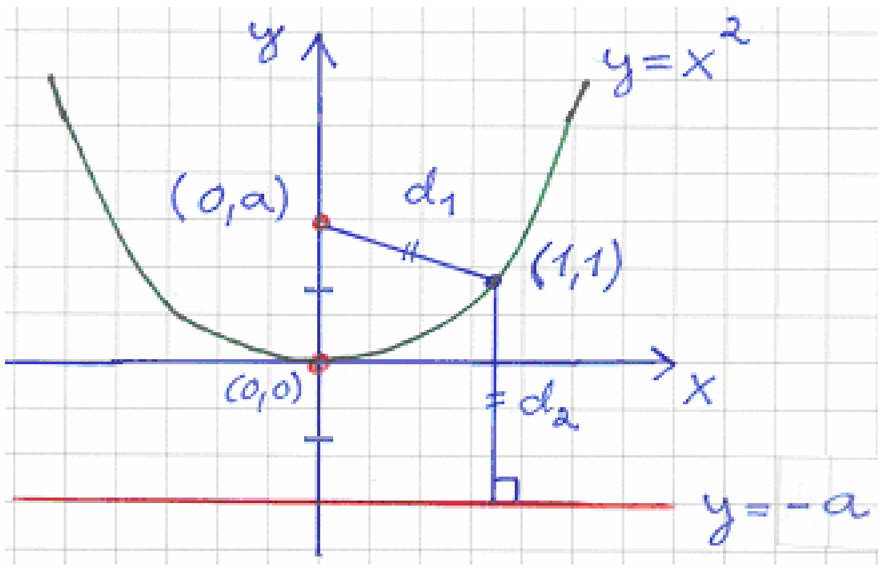
Vastaus $x=-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$

$\left(y^2+8x-4y-4=0\right)$

808

Perusparaabelin huippu on $(0,0)$ ja akseli y-akseli $(x=0)$.
Koska polttopiste on paraabelin akselilla, niin merkitään polttopistettä $(0,a)$.
Johtosuora on kohtisuorassa paraabelin akselia vastaan, joten se on vaakasuora ja sen yhtälö on siten muotoa $y=k$.

Huipun $(0,0)$ etäisyydet polttopisteestä $(0,a)$ ja johtosuorasta $y=k$ ovat yhtä suuret, joten $k=-a$.
Siis johtosuora on $y=-a$.



Paraabelin piste on esimerkiksi $(1,1)$. Koska paraabelin pisteen etäisyydet polttopisteestä ja johtosuorasta ovat yhtä suuret, saadaan yhtälö

$$d_1 = d_2$$

$$\sqrt{(0-1)^2+(a-1)^2} = |1-(-a)|$$

$$\underbrace{\sqrt{1+(a-1)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{|1+a|}_{\geq 0} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Jos } a \geq 0 \text{ ja } b \geq 0, \\ \text{niin } a=b \Leftrightarrow a^2=b^2. \end{array} \right.$$

$$\left(\sqrt{1+(a-1)^2}\right)^2 = |1+a|^2 \qquad \left| \begin{array}{l} \left(\sqrt{a}\right)^2 \\ |a|^2 = a^2 \end{array} \right.$$

$$1+(a-1)^2 = (1+a)^2$$

$$1+a^2-2a+1 = 1+2a+a^2$$

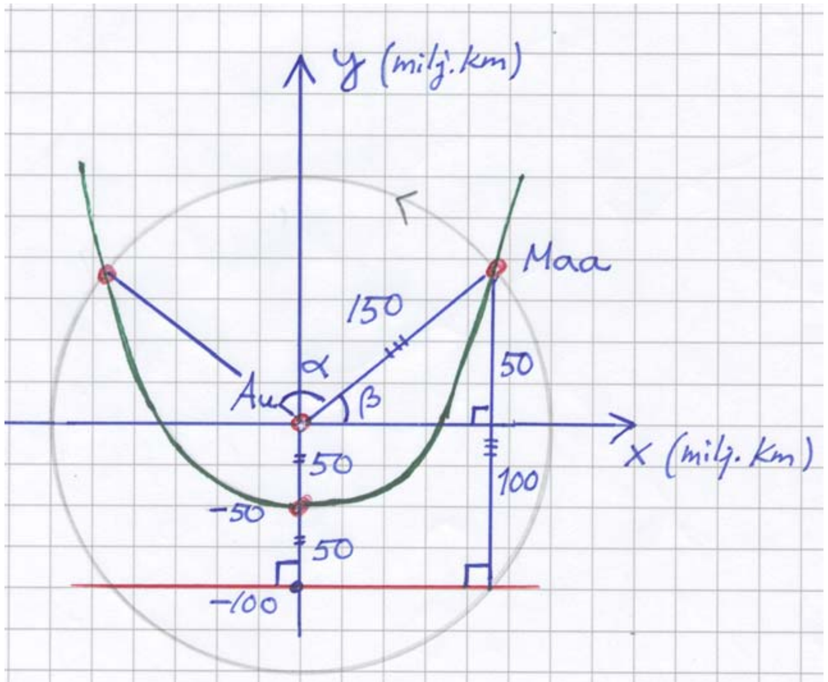
$$-4a = -1$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Polttopiste on siis $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ ja johtosuora on $y=-\frac{1}{4}$.

809

Valitaan koordinaatisto niin, että Aurinko ja ratakäyrän (paraabelin) polttopiste on origossa sekä johtosuora on vaakasuora ja polttopisteen alapuolella. Paraabelin huippu on lähinnä polttopistettä, joten huipusta polttopisteeseen ja johtosuoralle on 50 miljoonaa kilometriä.



Koska Maa on paraabelilla ja Maan etäisyys Auringosta (paraabelin polttopisteestä) on 150 miljoonaa kilometriä, niin Maan etäisyys johtosuorasta on myös 150 miljoonaa kilometriä. Tällöin Maan etäisyys x-akselista on $150-100=50$ miljoonaa kilometriä.

Kulma β saadaan yhtälöstä

$$\sin\beta = \frac{50}{150}$$

$$\beta = 19{,}47122...^\circ$$

Kulma α on

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta = 141{,}057...^\circ$$

Tapahtumien aikaväli on siten

$$\Delta t = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 365 \text{ vrk} \approx 143 \text{ vrk}$$

Vastaus Aikaväli on143 vuorokautta.

Tapa 2
Valitaan koordinaatisto niin, että Aurinko on origossa ja pyrstötähti lähimmillään pisteessä $(0, d)$, missä $d = 50 \cdot 10^6$ km.
Paraabelin johtosuora on tällöin $y = -2d$.
Paraabelin yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} |y+2d| &= \sqrt{x^2+y^2} \\ y^2+4dy+4d^2 &= x^2+y^2 \\ 4dy &= x^2-4d^2 \\ y &= \frac{1}{4d}x^2-d \end{aligned}$$

Maapallon ratakäyrä on $x^2+y^2=r^2$, missä $r = 150 \cdot 10^6$ km.
Paraabelin ja ympyrän leikkauspisteet saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ y=\dfrac{1}{4d}x^2-d \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x^2=4dy+4d^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4dy+4d^2+y^2=r^2 \\ x^2=4dy+4d^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+2d)^2=r^2 \\ y=\dfrac{1}{4d}x^2-d \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+2d=r \\ y=\dfrac{1}{4d}x^2-d \end{cases} \qquad (y+2d>0 \text{ paraabelilla})$$

$$\begin{cases} y=r-2d \\ r-2d=\dfrac{1}{4d}x^2-d \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=r-2d \\ x^2=4dr-4d^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\pm\sqrt{4dr-4d^2}=\pm 2\sqrt{dr-d^2} \\ y=r-2d \end{cases}$$

Leikkauspisteiden välinen etäisyys on siis

$$s = 4\sqrt{dr-d^2} \approx 283 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Aikaero saadaan ratkaisemalla törmäyshetkien määräämä Maan kulkema kaari α:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{dr-d^2}}{r} = 2\sqrt{\frac{d}{r}-\frac{d^2}{r^2}}$$

joten $\alpha \approx 141^\circ$ ja aikaväli on likimain $\dfrac{141^\circ}{360^\circ} \cdot 365 \text{ vrk} \approx 143 \text{ vrk}$.

Vastaus Aikaväli on143 vuorokautta.

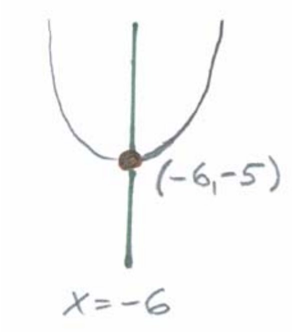
810

a) $y = x^2 + 12x + 31 \qquad \left| y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0 \right.$

Paraabeli on **ylöspäin** aukeava, sillä $a = 1 > 0$.
Paraabelin huippu:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2\cdot 1} = -6$$

$$y_0 = (-6)^2 + 12\cdot(-6) + 31 = -5$$



Huippu on $(-6,-5)$.
Paraabelin **akseli** on $x = -6$.

b)

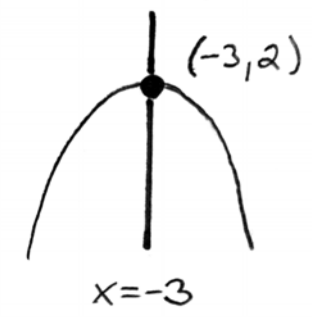
$$-y = 3x^2 + 18x + 25 \qquad \left| \cdot(-1) \right.$$

$$y = -3x^2 - 18x - 25 \qquad \left| y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0 \right.$$

Paraabeli on **alaspäin** aukeava, koska $a = -3 < 0$.
Paraabelin huippu:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{2\cdot(-3)} = \frac{18}{-6} = -3$$

$$y_0 = -3\cdot(-3)^2 - 18\cdot(-3) - 25 = 2$$



Huippu on $(-3,2)$.
Paraabelin **akseli** on $x = -3$.

c) $y = 3(x+1)(x-1) \qquad \left| y = a(x-x_1)(x-x_2),\ a \neq 0 \right.$

Paraabeli on **ylöspäin** aukeava, koska $a = 3 > 0$.
Paraabelin nollakohdat ovat

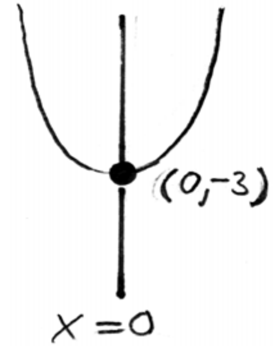
$x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$

joten paraabelin hupun x-koordinaatti on

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

Huipun y-koordinaatti on

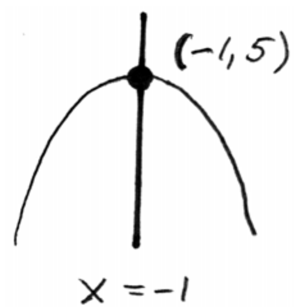
$$y_0 = 3(0+1)(0-1) = -3$$



Huippu on $(0,-3)$.
Paraabelin **akseli** on $x = 0$.

d) $y - 5 = -4(x+1)^2 \qquad \left| y - y_0 = a(x-x_0)^2,\ a \neq 0 \right.$

Paraabeli aukeaa **alaspäin**,
koska $a = -4 < 0$.
Paraabelin **huippu** on $(-1,5)$ ja
akseli $x = -1$.



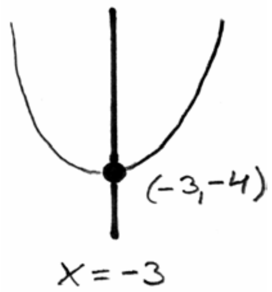
811

a) $y = x^2 + 6x + 5 \qquad \big| \; y = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0$

Paraabeli on **ylöspäin** aukeava, koska $a = 1 > 0$.
Paraabelin huippu:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$$

$$y_0 = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 5 = -4$$



Huippu on $(-3,-4)$.
Paraabelin **akseli** on $x = -3$.

b)

$$5y = -x^2 + 10x - 25 \qquad \big| :5$$

$$y = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 5 \qquad \big| \; y = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0$$

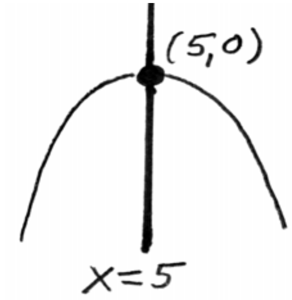
Paraabeli on **alaspäin** aukeava, koska $a = -\frac{1}{5} < 0$.

Paraabelin huippu:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{-2}{-\frac{2}{5}} = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$$

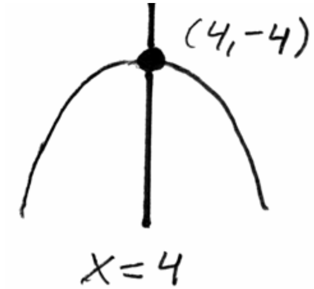
$$y_0 = -\frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 - 5 = 0$$

Huippu on $(5,0)$.
Paraabelin **akseli** on $x = 5$.



c) $y + 4 = -(x-4)^2 \qquad \big| \; y - y_0 = a\left(x - x_0^{\,2}\right), \; a \neq 0$

Paraabeli on **alaspäin** aukeava, koska $a = -1 < 0$.
Paraabelin **huippu** on $(4,-4)$ ja **akseli** $x = 4$.



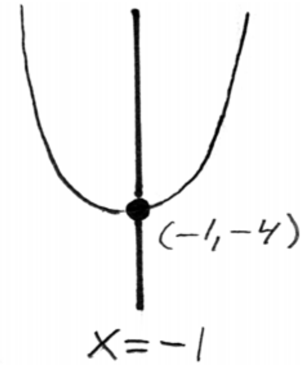
d) $y = (x+3)(x-1) \qquad \big| \; y = a(x - x_1)(x - x_2), \; a \neq 0$

Paraabeli on **ylöspäin** aukeava, koska $a = 1 > 0$.
Paraabeli nollakohdat ovat $x_1 = -3$ ja $x_2 = 1$.
Paraabelin huippu:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$$

$$y_0 = (-1+3)(-1-1) = 2 \cdot (-2) = -4$$

Huippu on $(-1,-4)$.
Paraabelin **akseli** on $x = -1$.



812

a) $y=-2x^2+3$ $\quad\Big|\; y=ax^2+bx+c,\;\; a\neq 0$

– alaspäin aukeava paraabeli, koska $a=-2<0$

– huippu:

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2\cdot(-2)}=0$$

$$y_0=-2\cdot 0^2+3=3$$

huippu $(0,3)$

– nollakohdat:

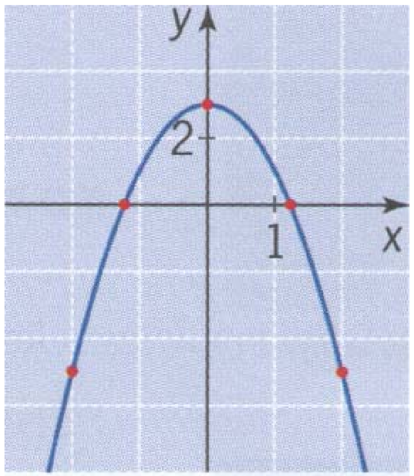
$$-2x^2+3=0$$

$$-2x^2=-3$$

$$x^2=\frac{3}{2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x=\pm\,{}^{\sqrt{2})}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\approx\pm 1{,}2$$



$y = -2x^2 + 3$

– lisäpisteitä

x	$y=-2x^2+3$	(x,y)
2	-5	$(2,-5)$
-2	-5	$(-2,-5)$

b) $y=3x^2-4x-8$ $\quad\Big|\; y=ax^2+bx+c,\;\; a\neq 0$

– ylöspäin aukeava paraabeli, koska $a=3>0$.

– huippu:

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$y_0=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}-8=-\frac{28}{3}=-9\frac{1}{3}$$

huippu $\left(\frac{2}{3},-9\frac{1}{3}\right)$

– nollakohdat:

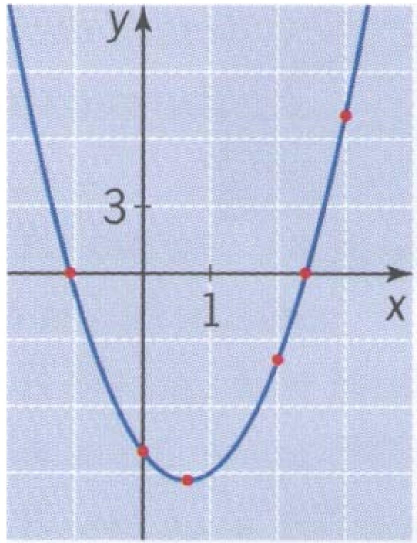
$$3x^2-4x-8=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot(-8)}}{2\cdot 3}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{112}}{6}=\frac{4\pm 4\sqrt{7}}{6}$$

$$x=\frac{2\pm 2\sqrt{7}}{3}$$

$x\approx 2{,}4$ tai $x\approx -1{,}1$



$y = 3x^2 - 4x - 8$

– lisäpiste:

Kun $x=3$, niin $y=3\cdot 3^2-4\cdot 3-8=7$

Piste $(3,7)$.

c)

$y=-(x+2)(x-2)$ $\quad\Big|\; y=a(x-x_1)(x-x_2),\ a\neq 0$

– alaspäin aukeava paraabeli, koska $a=-1<0$.

– nollakohdat: $x_1=-2$ ja $x_2=2$

– huippu:

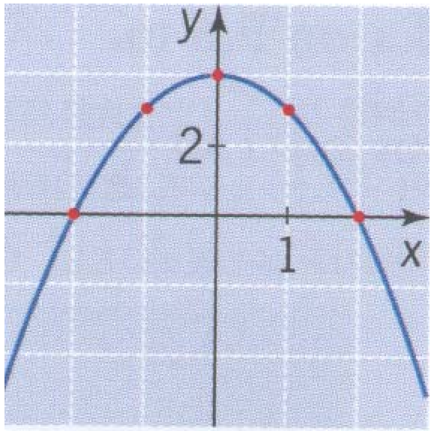
$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2+2}{2}=0$$

$$y_0=-(0+2)(0-2)=4$$

huippu $(0,4)$

– lisäpisteitä:

x	$y=-(x+2)(x-2)$	(x,y)
1	3	$(1,3)$
–1	3	$(-1,3)$



$y=-(x+2)(x-2)$

d)

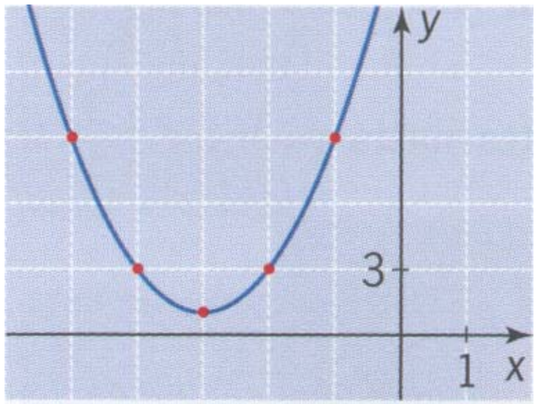
$y-1=2(x+3)^2$ $\quad\Big|\; y-y_0=a(x-x_0)^2,\ a\neq 0$

– ylöspäin aukeava paraabeli, koska $a=2>0$

– huippu on $(-3,1)$

– lisäpisteitä:

x	$y=2(x+3)^2+1$	(x,y)
–2	3	$(-2,3)$
–4	3	$(-4,3)$
–1	9	$(-1,9)$
–5	9	$(-5,9)$



$y-1=2(x+3)^2$

813

Alaspäin aukeavan paraabelin yhtälö on

$y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$

Paraabelin pisteet toteuttavat paraabelin yhtälön, joten saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ -1 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ -1 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}\begin{cases} c = 1 & \big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöihin (2) ja (3).} \\ a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + 1 = -1 \\ 4a - 2b + 1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}\begin{cases} a = -b - 2 & \big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön (5).} \\ 4a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$4(-b-2) - 2b = -2$$
$$-6b = 6$$
$$b = -1 \quad \big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön (4).}$$
$$a = -b - 2 = -(-1) - 2 = 1 - 2 = -1$$

Paraabelin yhtälö on $y = -x^2 - x + 1$.

Paraabelin huippu:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2\cdot(-1)} = -\frac{1}{2}$$
$$y_0 = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{4}$$

Huippu on $\left(-\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}\right)$.

Paraabelin nollakohdat:

$$-x^2 - x + 1 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Vastaus Paraabelin yhtälö on $y = -x^2 - x + 1$.
Huippu on $\left(-\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}\right)$.
Nollakohdat ovat $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

814

Paraabelin akseli on y-akseli (pystysuora), joten paraabeli on ylös- tai alaspäin aukeava. Paraabelin yhtälö on huippumuodossa

$$y-y_0=a(x-x_0)^2,\ a\neq 0 \qquad \Big|\,(x_0,y_0)=(0,0)$$

$$y-0=a(x-0)^2$$

$$y=ax^2$$

a)

Paraabeli kulkee pisteen $(-2,20)$ kautta, joten saadaan yhtälö

$$20=a\cdot(-2)^2$$

$$20=4a$$

$$a=5$$

Paraabelin yhtälö on siis $y=5x^2$

b)

Paraabeli kulkee pisteen $(6,-12)$ kautta, joten saadaan yhtälö

$$-12=a\cdot 6^2$$

$$-12=36a$$

$$a=\frac{-12}{36}$$

$$a=-\frac{1}{3}$$

Paraabelin yhtälö on siis $y=-\frac{1}{3}x^2$.

815

Paraabelin akseli on pystysuora, joten paraabeli on ylös- tai alaspäin aukeava. Sen yhtälö on huippumuodossa

$$y-y_0=a(x-x_0)^2,\ a\neq 0 \qquad \Big|\,(x_0,y_0)=(-2,4)$$

$$y-4=a(x+2)^2$$

Paraabeli kulkee pisteen $\left(-5,-\frac{1}{2}\right)$ kautta, joten saadaan yhtälö

$$-\frac{1}{2}-4=a(-5+2)^2$$

$$-4\frac{1}{2}=9a$$

$$a=\frac{-\frac{9}{2}}{9}=-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{9}=-\frac{1}{2}$$

Siis paraabelin yhtälö on

$$y-4=-\frac{1}{2}(x+2)^2$$

Huomautus: Paraabelin yhtälö perusmuodossa on

$$y-4=-\frac{1}{2}(x+2)^2$$

$$y-4=-\frac{1}{2}(x^2+4x+4)$$

$$y-4=-\frac{1}{2}x^2-2x-2$$

$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+2$$

816

Ylöspäin aukeavan paraabelin yhtälö nollakohtamuodossa on

$$y = a(x - x_1)(x - x_2),\ a > 0 \qquad \left| x_1 = -3,\ x_2 = 2\right.$$
$$y = a(x+3)(x-2)$$

Paraabeli kulkee pisteen $(1, -16)$ kautta, joten

$$-16 = a(1+3)(1-2)$$
$$-16 = -4a$$
$$a = 4 \quad (>0)$$

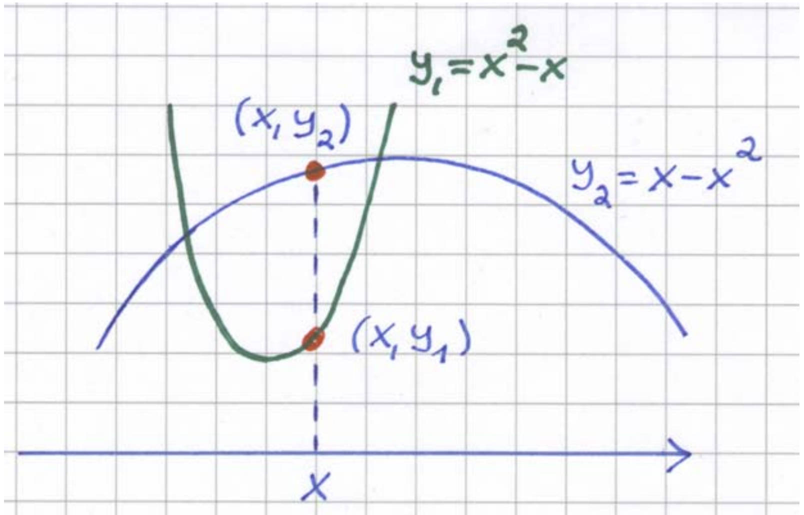
Paraabelin yhtälö on siis $y = 4(x+3)(x-2)$.

Paraabeli leikkaa y-akselin, kun $x = 0$:

$$y = 4\cdot(0+3)\cdot(0-2) = 4\cdot 3\cdot(-2) = -24$$

Paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -24)$.

817



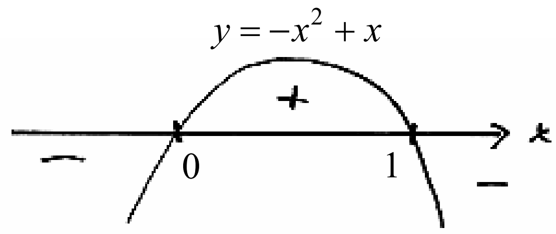
Paraabeli $y_2 = x - x^2$ on paraabelin $y_1 = x^2 - x$ yläpuolella, kun

$$y_2 > y_1$$
$$x - x^2 > x^2 - x$$
$$-2x^2 + 2x > 0 \qquad \left| :2\ (>0)\right.$$
$$-x^2 + x > 0$$

Nollakohdat:

$$-x^2 + x = 0$$
$$x(-x+1) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 1$$

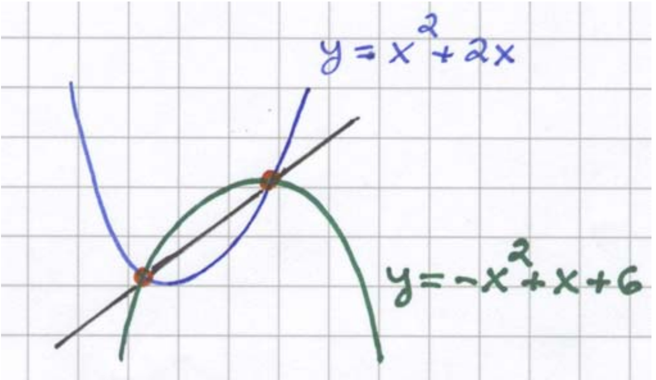
Kuvaaja:



Siis $0 < x < 1$

Vastaus $\quad 0 < x < 1$

818



Leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x^2 + x + 6 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$x^2 + 2x = -x^2 + x + 6$$

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x_2 = \frac{-8}{4} = -2 \quad \Big| \; y = x^2 + 2x$$

$$y_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 5\frac{1}{4} \quad \text{tai} \quad y_2 = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 0$$

Leikkauspisteet ovat siis $\left(\frac{3}{2}, 5\frac{1}{4}\right)$ ja $(-2, 0)$.

Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5\frac{1}{4} - 0}{\frac{3}{2} - (-2)} = \frac{5\frac{1}{4}}{3\frac{1}{2}} = \frac{21}{4} : \frac{7}{2} = \frac{21}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{2}$$

Suuntakulma α saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\tan \alpha = \frac{3}{2} \qquad \Big| \; \tan \alpha = k$$

$$\alpha = 56{,}3099...^\circ$$

$$\alpha \approx 56^\circ$$

Vastaus Suuntakulma on 56°

819

Yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

a)

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}y=-x^2+2x-2\\y=2x-6\end{cases}\qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$-x^2+2x-2=2x-6$$

$$-x^2=-4$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2\qquad \big|\ y=2x-6$$

Kun $x=2$, niin $y=2\cdot 2-6=-2$.

Kun $x=-2$, niin $y=2\cdot(-2)-6=-10$.

Yhteiset pisteet ovat $(2,-2)$ ja $(-2,-10)$.

b)

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}y=-x^2+2x-2\\y=2x-2\end{cases}\qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$-x^2+2x-2=2x-2$$

$$-x^2=0$$

$$x^2=0$$

$$x=0\qquad \big|\ y=2x-2$$

Kun $x=0$, niin $y=2\cdot 0-2=-2$.

Yhteinen piste on $(0,-2)$.

c)

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}y=-x^2+2x-2\\y=2x-1\end{cases}\qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$-x^2+2x-2=2x-1$$

$$-x^2=1$$

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0}=\underbrace{-1}_{<0}\quad \text{aina epätosi}$$

ei ratkaisua

Ei yhteisiä pisteitä.

820

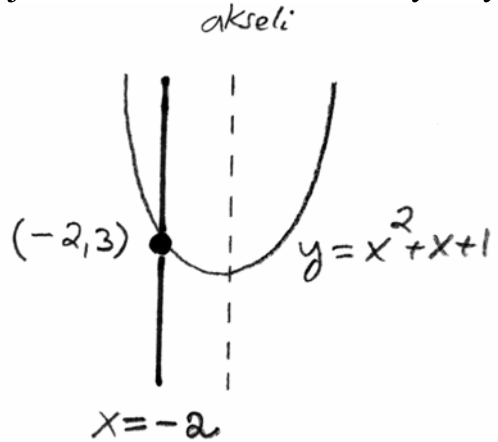
Yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x = -2 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$y = (-2)^2 - 2 + 1 = 4 - 1 = 3$$

Yhteisiä pisteitä on vain piste $(-2,3)$.

Ylöspäin aukeavan paraabelin $y = x^2 + x + 1$ akseli on pystysuora.
Koska suora $x = -2$ on myös pystysuora, niin se ei ole paraabelin tangentti. Suora $x = -2$ ei siis sivua paraabelia vaikka paraabelilla ja suoralla $x = -2$ on vain yksi yhteinen piste.



Vastaus Yhteisiä pisteitä on vain piste $(-2,3)$.
Suora ei sivua paraabelia.

821

Leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} y = 4x + t \\ y = 2x^2 - 8x + 5 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$2x^2 - 8x + 5 = 4x + t$$

$$2x^2 - 12x + 5 - t = 0$$

Toisen asteen yhtälön diskriminantti on

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (5 - t) = 144 - 40 + 8t = 8t + 104$$

a) Leikkauspisteitä on olemassa, jos $D \geq 0$.

$$D \geq 0$$

$$8t + 104 \geq 0$$

$$8t \geq -104 \quad \Big| :8(>0)$$

$$t \geq -13$$

b) Koska paraabelin $y = 2x^2 - 8x + 5$ akseli on pystysuora, niin **nouseva** suora $y = 4x + t$ sivuaa paraabelia täsmälleen silloin, kun paraabelilla ja suoralla on vain yksi leikkauspiste. Siis

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ 8t + 104 &= 0 \\ 8t &= -104 \qquad \big| :8 \\ t &= -13 \end{aligned}$$

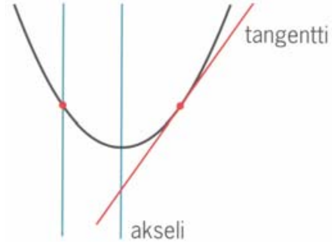
c) Leikkauspisteitä ei ole, jos $D < 0$. Siis

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ 8t + 104 &< 0 \\ 8t &< -104 \qquad \big| :8(>0) \\ t &< -13 \end{aligned}$$

Vastaus a) $t \geq -13$ b) $t = -13$ c) $t < -13$

822

Paraabeli $y = 1 - x^2$ on alaspäin aukeava, joten sen akseli on y-akselin suuntainen (pystysuora).
Tällöin suora on paraabelin tangentti, jos ja vain jos suora ei ole pystysuora (eli sillä on kulmakerroin) sekä suoralla ja paraabelilla on vain yksi yhteinen piste.



Olkoon tangentin kulmakerroin k. Sen yhtälö on

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \qquad \big| (x_0, y_0) = (2, -3) \\ y - (-3) &= k(x - 2) \\ y + 3 &= kx - 2k \\ y &= kx - 2k - 3 \end{aligned}$$

Tangentilla ja paraabelilla on vain yksi yhteinen piste.

$$\begin{aligned} &\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} y = kx - 2k - 3 \\ y = 1 - x^2 \end{cases} \qquad \big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2). \\ &kx - 2k - 3 = 1 - x^2 \\ &x^2 + kx - 2k - 4 = 0 \end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, jos ja vain jos diskriminantti on nolla.

$$D = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac \\ a = 1,\ b = k,\ c = -2k - 4 \end{array} \right.$$

$$k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2k - 4) = 0$$
$$k^2 + 8k + 16 = 0$$
$$(k + 4)^2 = 0$$
$$k + 4 = 0$$
$$k = -4$$

Tangentin yhtälö on siis

$$y = kx - 2k - 3 \qquad | \, k = -4$$
$$y = -4x + 5$$

Vastaus $\quad y = -4x + 5$

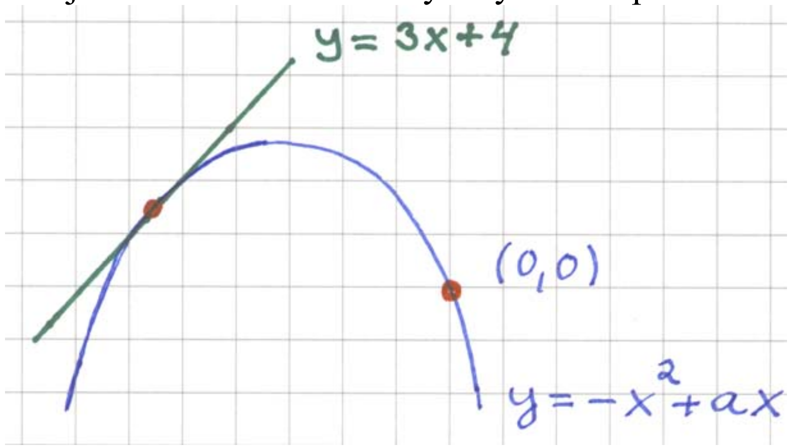
823

Käyrä $y = -x^2 + ax + b$ kulkee origon $(0,0)$ kautta, joten

$$0 = -0^2 + a \cdot 0 + b$$
$$b = 0$$

Siis käyrän yhtälö on $y = -x^2 + ax$

Koska alaspäin aukeavan paraabelin $y = -x^2 + ax$ akseli on pystysuora, niin paraabeli sivuaa **nousevaa** suoraa $y = 3x + 4$ jos ja vain jos niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste.



Yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -x^2 + ax \end{cases} \qquad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$3x + 4 = -x^2 + ax$$
$$x^2 + 3x - ax + 4 = 0$$
$$x^2 + (3 - a)x + 4 = 0$$

Koska yhteisiä pisteitä on vain yksi, niin

$$D = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac \\ a = 1,\ b = 3 - a,\ c = 4 \end{array} \right.$$

$$(3-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$
$$(3-a)^2 = 16$$
$$3 - a = \pm\sqrt{16}$$
$$3 - a = \pm 4$$
$$3 - a = 4 \quad \text{tai} \quad 3 - a = -4$$
$$a = -1 \quad \text{tai} \quad a = 7$$

Vastaus $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$ tai $\begin{cases} a = 7 \\ b = 0 \end{cases}$

824

Paraabeli kulkee pisteen $(2,2)$ kautta, joten saadaan yhtälö

$$2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2$$
$$4a + 2b = 0$$

Paraabeli $y = ax^2 + bx + 2$ on ylös- tai alaspäin aukeava, joten sen akseli on pystysuora (y-akselin suuntainen).

Suora $2x - y - 2 = 0$ ei ole pystysuora, joten se sivuaa eli on paraabelin tangentti, jos ja vain jos suoralla ja paraabelilla on vain yksi yhteinen piste. Yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = ax^2 + bx + 2 \end{cases} \qquad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$2x - (ax^2 + bx + 2) - 2 = 0$$
$$2x - ax^2 - bx - 2 - 2 = 0 \qquad \Big| \cdot (-1)$$
$$ax^2 + bx - 2x + 4 = 0$$
$$ax^2 + (b-2)x + 4 = 0$$

Koska yhteisiä pisteitä on vain yksi, niin saadaan yhtälö

$$D = 0 \qquad \Big| D = b^2 - 4ac$$
$$(b-2)^2 - 4 \cdot a \cdot 4 = 0$$
$$b^2 - 4b + 4 - 16a = 0$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 4a+2b=0 \\ b^2-4b+4-16a=0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}\begin{cases} b=-2a & \text{| Sijoitetaan yhtälöön (4).} \\ b^2-4b+4-16a=0 \end{cases}$$

$$(-2a)^2-4\cdot(-2a)+4-16a=0$$
$$4a^2+8a+4-16a=0$$
$$4a^2-8a+4=0 \quad |:4$$
$$a^2-2a+1=0$$
$$(a-1)^2=0$$
$$a-1=0$$
$$a=1 \quad \text{| Sijoitetaan yhtälöön (3).}$$
$$b=-2a=-2\cdot 1=-2$$

Vastaus $a=1$ ja $b=-2$

825

a)
Auton jarrutusmatka y (m)
Auton nopeus $x\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$

Koska jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön, saadaan yhtälö

$$y=kx^2 \quad |\text{ vakio } k\neq 0$$

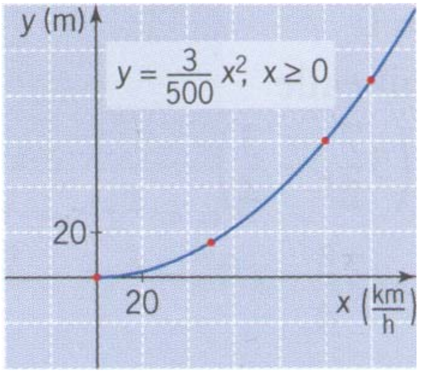
Jos $x=100\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, niin $y=60$ (m), joten saadaan yhtälö vakion k ratkaisemiseksi.

$$60=k\cdot 100^2$$
$$k=\frac{60}{100^2}=\frac{60}{10\,000}=\frac{3}{500}$$

Siis $y=\frac{3}{500}x^2,\ x\geq 0$

Riippuvuutta kuvaa ylöspäin aukeavan paraabelin osa. Huippu on origossa.

$x\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	y(m)
0	0
50	15
100	60
120	86,4



b)

$$x = 40\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$$

$$y = \frac{3}{500}\cdot x^2 = \frac{3}{500}\cdot 40^2 = 9{,}6(\text{m})$$

Jarrutusmatka on 9,6 metriä.

c)

$$y = 100(\text{m})$$

$$y = \frac{3}{500}x^2$$

$$100 = \frac{3}{500}x^2 \quad |\cdot 500$$

$$50\,000 = 3x^2 \quad |\cdot 3$$

$$x^2 = \frac{50\,000}{3}$$

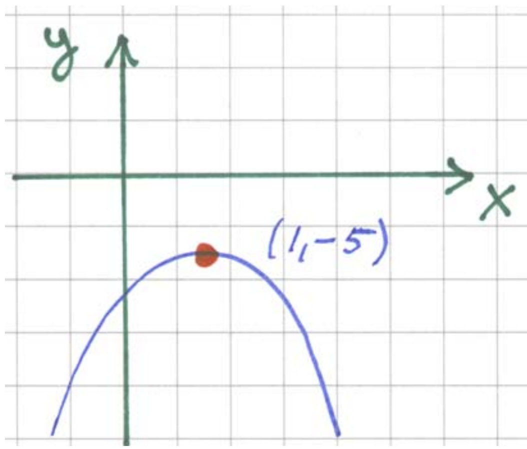
$$x = _{(}\pm_{)}\sqrt{\frac{50\,000}{3}} = 129{,}099... \approx 130\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$$

Auton nopeus on 130 km/h.

826

Väite. Käyrä $y+5=-(x-1)^2$ ei leikkaa x-akselia.

Todistus.
Käyrä $y+5=-(x-1)^2$ on paraabeli, koska yhtälö on muotoa
$y-y_0=a(x-x_0)^2$, $a\neq 0$.
Paraabelin huippu on $(1,-5)$, joka on x-akselin alapuolella.
Lisäksi paraabeli on alaspäin aukeava, koska $a=-1<0$, joten paraabeli sijaitsee kokonaan x-akselin alapuolella.
Käyrä ei siis leikkaa x-akselia. $\square$



Tapa 2

Väite. Käyrä $y+5=-(x-1)^2$ ei leikkaa x-akselia.

Todistus.
Käyrän $y+5=-(x-1)^2$ ja x-akselin $(y=0)$ leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}y+5=-(x-1)^2\\ \quad y=0\end{cases} \qquad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$0+5=-(x-1)^2$$

$$\underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0}=\underbrace{-5}_{<0} \qquad \text{aina epätosi}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Siis käyrällä ja x-akselilla ei ole leikkauspisteitä. $\square$

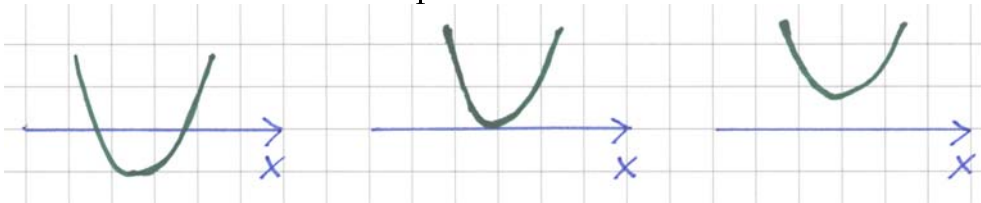
827

$$y=-ax^2+x+a-\frac{5}{4}$$

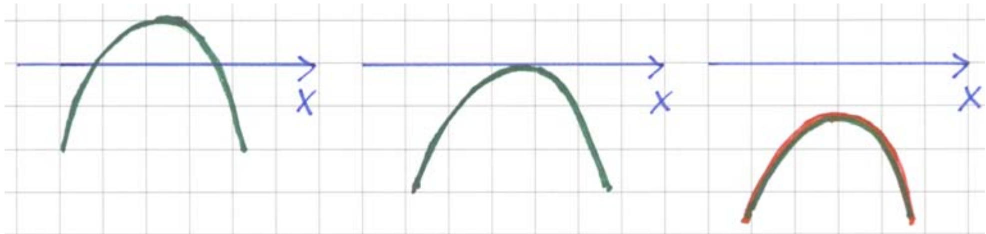
– Koska käyrä $y=-ax^2+x+a-\frac{5}{4}$ on paraabeli, niin

$$-a\neq 0$$
$$a\neq 0$$

– Jos $-a>0$ eli $a<0$, niin paraabeli on ylöspäin aukeava.
Tällöin se ei voi olla kokonaan x-akselin alapuolella.
Siis arvot $a<0$ eivät kelpaa.



– Jos $-a<0$ eli $a>0$, niin paraabeli on alaspäin aukeava.



Paraabeli on kokonaan x-akselin alapuolella, jos ja vain jos paraabelilla ei ole nollakohtia. Tällöin diskriminantin pitää olla negatiivinen.

$$D < 0 \qquad \left| D = b^2 - 4ac \right.$$

$$1^2 - 4\cdot(-a)\left(a - \frac{5}{4}\right) < 0$$

$$1 + 4a\left(a - \frac{5}{4}\right) < 0$$

$$4a^2 - 5a + 1 < 0$$

Nollakohdat:

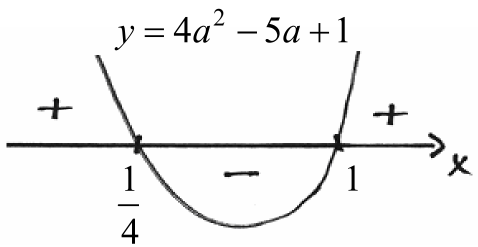
$$4a^2 - 5a + 1 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 4\cdot 1}}{2\cdot 4}$$

$$a = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$a = 1 \text{ tai } a = \frac{1}{4}$$

Kuvaaja:



Siis $\frac{1}{4} < a < 1 \qquad \left| a > 0 \right.$

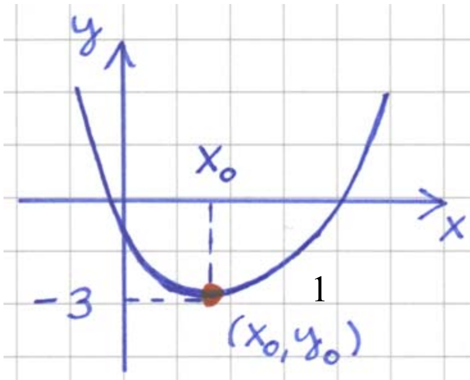
Vastaus $\frac{1}{4} < a < 1$

828

Funktion f kuvaaja on paraabeli

$$y = x^2 + ax - x + 1 \text{ eli } y = x^2 + (a-1)x + 1$$

joka on ylöspäin aukeava. Funktion pienin arvo on yhtä suuri kuin paraabelin huipun y-koordinaatti.



Huipun x-koordinaatti on

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(a-1)}{2\cdot 1} = \frac{1-a}{2}$$

Huipun y-koordinaatti on

$$y_0 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + (a-1)\cdot\frac{1-a}{2} + 1$$

$$= \frac{(1-a)^2}{4} - {}^{2)}\frac{(1-a)^2}{2} + {}^{4)}1$$

$$= \frac{(1-a)^2 - 2(1-a)^2 + 4}{4}$$

$$= \frac{-(1-a)^2 + 4}{4}$$

Saadaan yhtälö

$$\frac{-(1-a)^2+4}{4}=-3 \quad \Big|\cdot 4$$
$$-(1-a)^2+4=-12$$
$$-(1-a)^2=-16$$
$$(1-a)^2=16$$
$$1-a=\pm\sqrt{16}$$
$$1-a=\pm 4$$
$$1-a=4 \quad \text{tai} \quad 1-a=-4$$
$$a=-3 \quad \text{tai} \quad a=5$$

Vastaus $a=-3$ tai $a=5$

829

Paraabelin $y=x^2+ax+a^2+1$ huipun koordinaatit ovat

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-a}{2\cdot 1}=-\frac{a}{2}$$
$$y_0=\left(-\frac{a}{2}\right)^2+a\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+a^2+1$$
$$=\frac{a^2}{4}-{}^{2)}\frac{a^2}{2}+{}^{4)}a^2+{}^{4)}1$$
$$=\frac{a^2}{4}-\frac{2a^2}{4}+\frac{4a^2}{4}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{3a^2+4}{2}$$

Siis saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x_0=-\dfrac{a}{2} \\ y_0=\dfrac{3a^2+4}{4}\end{cases} \quad \Big| \text{Ratkaistaan parametri } a.$$

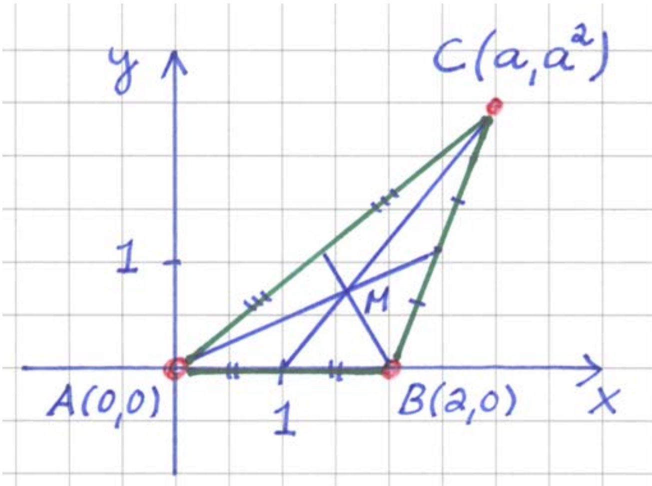
$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} a=-2x_0 \\ y_0=\dfrac{3a^2+4}{4}\end{cases} \quad \Big| \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$y_0=\frac{3\cdot(-2x_0)^2+4}{4}=\frac{12x_0{}^2+4}{4}=\frac{4\cdot\left(3x_0{}^2+1\right)}{4}=3x_0{}^2+1$$

Vastaus Paraabelin $y=3x^2+1$.

830

Pisteet muodostavat kolmion, jos ja vain jos piste (a,a^2) ei ole x-akselilla eli $a \neq 0$.



Mediaanien leikkauspiste on

$$
\begin{aligned}
M &= (x,y) \\
&= \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) \\
&= \left(\frac{0+2+a}{3}, \frac{0+0+a^2}{3}\right) \\
&= \left(\frac{a+2}{3}, \frac{a^2}{3}\right), \ a \neq 0
\end{aligned}
$$

Siis mediaanien leikkauspisteen (x,y) koordinaatit toteuttavat ehdon

$$
\begin{cases} x = \dfrac{a+2}{3} \\ y = \dfrac{a^2}{3} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} a \neq 0, \text{ joten} \\ (x,y) \neq \left(\dfrac{2}{3}, 0\right) \end{array} \right.
$$

Koordinaattien välinen yhtälö saadaan eliminoimalla parametri a.

$$
\begin{cases} x = \dfrac{a+2}{3} \\ y = \dfrac{a^2}{3} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 3 \end{array} \right.
$$

$$
\begin{cases} 3x = a+2 \\ 3y = a^2 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} a = 3x-2 \\ 3y = a^2 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).
$$

$$3y = (3x-2)^2$$

$$3y = 9x^2 - 12x + 4$$

$$y = 3x^2 - 4x + \frac{4}{3}, \ (x,y) \neq \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

Vastaus Mediaanien leikkauspiste piirtää paraabelin $y = 3x^2 - 4x + \dfrac{4}{3}$ lukuun ottamatta pistettä $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$ (paraabelin huippu).

831

$$\begin{cases} y \le x^2 - 2 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 \le 0 \end{cases}$$

1) Käyrä $y = x^2 - 2$ on ylöspäin aukeava paraabeli, koska $a = 1 > 0$.

Paraabelin huippu on

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2\cdot 1} = 0$$

$$y_0 = 0^2 - 2 = -2$$

huippu $(0,-2)$

Paraabelin nollakohdat

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,4$$

Lisäpisteitä

x	$y = x^2 - 2$	(x, y)
1	-1	$(1,-1)$
-1	-1	$(-1,-1)$
2	2	$(2,2)$
-2	2	$(-2,2)$

Epäyhtälön $y \le x^2 - 2$ toteuttavat paraabelin $y = x^2 - 2$ pisteet ja kaikki sen alapuolella olevat pisteet, sillä esimerkiksi testipiste $(0,0)$ ei toteuta epäyhtälöä.

2) Käyrä $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ on ympyrä, koska

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$$

$$x^2 - 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 - 2\cdot y\cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 7 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1^2 + (y-1)^2 - 1^2 - 7 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2 + 1^2 + 7$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

Ympyrän keskipiste on $(1,1)$ ja säde on 3.

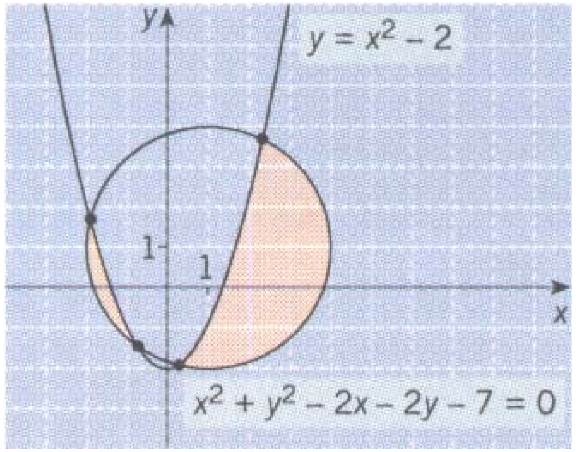
Epäyhtälön

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 \le 0 \quad \text{eli}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 3^2$$

toteuttavat ympyrän $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$ pisteet ja kaikki ympyrän sisäpuolella olevat pisteet, sillä esimerkiksi testipiste $(0,0)$ toteuttaa epäyhtälön.

Epäyhtälöparin ratkaisuna on alue, jossa molemmat epäyhtälöt ovat voimassa eli kuvan väritetty alue. Alueen reuna kuuluu ratkaisuun.



832

1)

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq -\frac{1}{4}x^2 + 3 \end{cases}$$

– Epäyhtälön $y \geq 0$ ratkaisuna on x-akseli $y = 0$ ja sen yläpuolinen alue.

– Käyrä $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ on alaspäin aukeava paraabeli, koska $a = -\frac{1}{4} < 0$.

Paraabelin huippu on

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = 0$$

$$y_0 = -\frac{1}{4} \cdot 0^2 + 3 = 3$$

huippu on $(0,3)$

Paraabelin nollakohdat:

$$-\frac{1}{4}x^2 + 3 = 0$$

$$-\frac{1}{4}x^2 = -3 \qquad |:(-4)$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \pm\sqrt{12}$$

$$x \approx \pm 3{,}5$$

Lisäpisteitä:

x	$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$	(x, y)
2	2	$(2,2)$
–2	2	$(-2,2)$
4	–1	$(4,-1)$
–4	–1	$(-4,-1)$

Epäyhtälön $y \leq -\frac{1}{4}x^2 + 3$ toteuttavat paraabelin $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ pisteet ja kaikki sen alapuolella olevat pisteet, sillä esimerkiksi testipiste $(0,0)$ toteuttaa epäyhtälön.

2) Käyrä $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ on ympyrä, koska

$$x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + y^2 + 3 = 0$$

$$(x+2)^2 - 2^2 + y^2 + 3 = 0$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 - 3$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 1^2$$

Ympyrän keskipiste on $(-2,0)$ ja säde 1.

Epäyhtälön

$$x^2+y^2+4x+3\le 0 \text{ eli } (x+2)^2+y^2\le 1^2$$

toteuttavat ympyrän $(x+2)^2+y^2=1^2$ pisteet ja kaikki sen sisäpuolella olevat pisteet, sillä esimerkiksi testipiste $(0,0)$ ei toteuta epäyhtälöä.

3) Käyrä $x^2+y^2-4x+3=0$ on ympyrä, koska

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x+3&=0\\ x^2-4x+y^2+3&=0\\ x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+y^2+3&=0\\ (x-2)^2-2^2+y^2+3&=0\\ (x-2)^2+y^2&=2^2-3\\ (x-2)^2+y^2&=1^2 \end{aligned}$$

Ympyrän keskipiste on $(2,0)$ ja säde on 1.
Epäyhtälön

$$x^2+y^2-4x+3\le 0 \text{ eli } (x-2)^2+y^2\le 1^2$$

toteuttavat ympyrän $(x-2)^2+y^2=1^2$ pisteet ja kaikki sen sisäpuolella olevat pisteet, sillä esimerkiksi testipiste $(0,0)$ ei toteuta epäyhtälöä.

Kun yhdistetään kohtien 1), 2) ja 3) ratkaisut, kuuluvat ratkaisuun kaikki ne pisteet, jotka toteuttavat ainakin jonkin kohdista 1), 2) tai 3).
Ratkaisualue on väritetty kuvassa.
Alueen reuna kuuluu ratkaisuun.