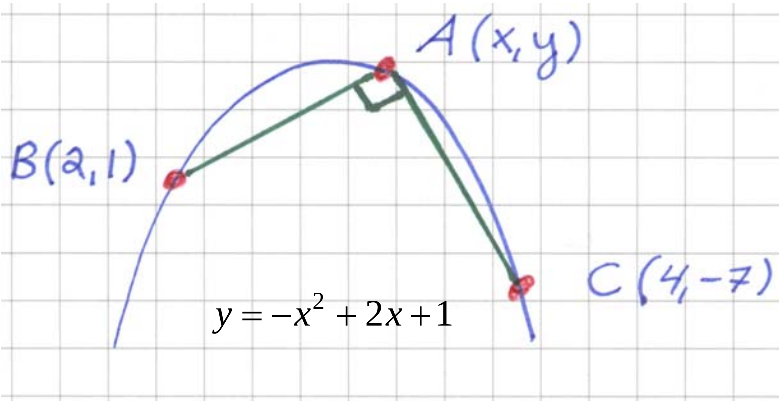
Pyramidi 4 Luku 8

22.2.2006	Ensimmäinen julkaistu versio
7.5.2006	Korjattu tehtävän 865 ratkaisua.
28.3.2007	Korjattu tehtävässä 835 luku 35 luvuksi 36.

833

Olkoon kysytty paraabelin piste $A=(x,y)$.



Koska piste A on paraabelilla $y=-x^2+2x+1$, piste $A=(x,-x^2+2x+1)$.

Pisteiden A ja B sekä A ja C kautta kulkevien suorien kulmakertoimet:

$$k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-x^2+2x+1-1}{x-2}=\frac{-x(x-2)}{x-2}=-x,\quad x\neq 2$$

$$k_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{-x^2+2x+1-(-7)}{x-4}$$

$$=\frac{-x^2+2x+8}{x-4}$$

$$\left|\begin{aligned} &-x^2+2x+8=0\\ &x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 8}}{2\cdot(-1)}\\ &x=\frac{-2\pm 6}{-2}\\ &x=-2 \text{ tai } x=4\end{aligned}\right.$$

$$=\frac{-1\cdot(x+2)(x-4)}{x-4}=-x-2\quad x\neq 4$$

Kumpikaan suorista AB ja AC ei voi olla pystysuora, joten suorat AB ja AC ovat kohtisuorassa, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} k_{AB}\cdot k_{AC}&=-1\\ -x\cdot(-x-2)&=-1\\ x^2+2x&=-1\\ x^2+2x+1&=0\\ (x+1)^2&=0\\ x+1&=0\\ x&=-1 \qquad \left| x\neq 2,\ x\neq 4\right.\end{aligned}$$

kelpaa

Kun $x=-1$, niin $y=-(-1)^2+2\cdot(-1)+1=-1-2+1=-2$.

Vastaus $(-1,-2)$

834

Origon $(0,0)$ etäisyys suorasta $ax+(a-1)y-2=0$ on

$$d=\frac{|a\cdot 0+(a-1)\cdot 0-2|}{\sqrt{a^2+(a-1)^2}} \qquad \left| \; d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \right.$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2+(a-1)^2}}$$

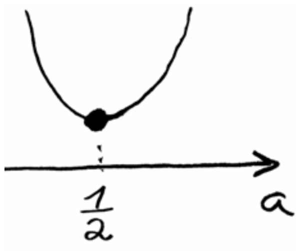
Koska vakio 2 on positiivinen, niin etäisyys d on suurin , kun positiivinen jakaja $\sqrt{a^2+(a-1)^2}$ on pienin.
Jakaja on pienin, kun juurrettava

$$a^2+(a-1)^2=a^2+a^2-2a+1=2a^2-2a+1$$

on pienin. Koska juurrettavan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, niin juurrettava saa pienimmän arvonsa, kun a on sama kuin huipun x-koordinaatti.
Lasketaan huipun x-koordinaatti a_0.

$$a_0=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

Suoran etäisyys origosta on suurin, kun $a=\frac{1}{2}$.



Kysytyn suoran yhtälö on

$$ax+(a-1)y-2=0 \qquad \left| \; a=\frac{1}{2} \right.$$

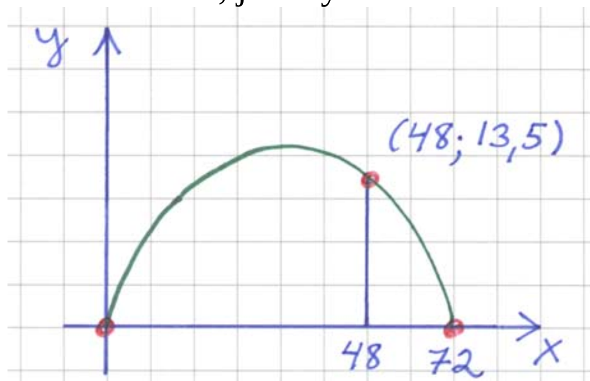
$$\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}-1\right)y-2=0 \qquad \left| \cdot 2 \right.$$

$$x-y-4=0$$

Vastaus $x-y-4=0$

835

Valitaan xy-koordinaatisto niin, että kivi lähtee origosta.
Piirretään mallikuva, jossa yksikkönä on metri.



Paraabelin yhtälö nollakohtamuodossa on

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \qquad \left| \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=72 \end{array} \right.$$

$$y=a(x-0)(x-72)$$

$$y=ax(x-72)$$

Paraabeli kulkee pisteen $(48;\,13{,}5)$ kautta, joten saadaan yhtälö vakion a ratkaisemiseksi.

$$13{,}5=a\cdot 48\cdot(48-72)$$

$$13{,}5=-1152a$$

$$a=\frac{13{,}5}{-1152}=-\frac{3}{256}$$

Paraabelin yhtälö on siis $y=-\frac{3}{256}x(x-72)$.

Paraabelin nollakohdat ovat $x_1=0$ ja $x_2=72$, joten paraabelin huipun *x*-koordinaatti on

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{0+72}{2}=36$$

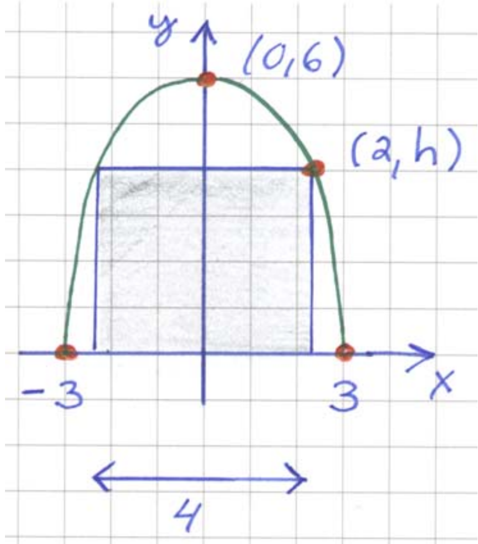
Paraabelin huipun *y*-koordinaatti on siten

$$y_0=-\frac{3}{256}\cdot 36\cdot(36-72) \qquad \left| y=-\frac{3}{256}x(x-72)\right.$$
$$=15{,}1875$$

Vastaus Kivi käy 15 metrin korkeudella.

836

Piirretään mallikuva, jossa yksikkönä on cm.



Paraabelin yhtälö nollakohtamuodossa on

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \qquad \left| \begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=3 \end{array}\right.$$

$$y=a(x+3)(x-3)$$

Paraabeli kulkee pisteen $(0,6)$ kautta, joten saadaan yhtälö *a*:n ratkaisemiseksi.

$$6=a(0+3)(0-3)$$
$$6=-9a$$
$$a=\frac{6}{-9}=-\frac{2}{3}$$

Paraabelin yhtälö on siten

$$y = -\frac{2}{3}(x+3)(x-3)$$

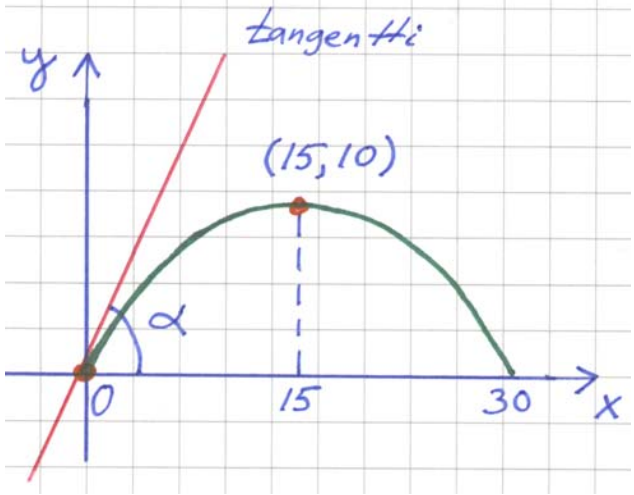
Lasketaan aukon korkeus, kun $x = 2$.

$$h = -\frac{2}{3}(2+3)(2-3) \approx 3{,}3 < 4$$

Juusto ei siis mahdu aukosta.

837

Piirretään mallikuva, jossa yksikkönä on metri.



Paraabelin yhtälö huippumuodossa on

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \qquad \left|\, (x_0, y_0) = (15{,}10)\right.$$
$$y - 10 = a(x - 15)^2$$

Koska $(0,0)$ on paraabelin piste, saadaan

$$0 - 10 = a(0 - 15)^2$$
$$a = \frac{-10}{15^2}$$
$$a = -\frac{2}{45}$$

Paraabelin yhtälö on siten $y - 10 = -\frac{2}{45}(x - 15)^2$.

Kiven ratakäyrän tangentti ilmoittaa kiven hetkellisen suunnan. Lähtösuuntaa edustaa origon kautta kulkeva suora $y = kx$.

Tangentilla $y = kx$ ja paraabelilla $y - 10 = -\frac{2}{45}(x - 15)^2$ on vain yksi yhteinen piste. Yhteiset pisteet saadaan yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} (1)\quad y = kx & \big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2). \\ (2)\quad y - 10 = -\frac{2}{45}(x - 15)^2 \end{cases}$$

$$kx - 10 = -\frac{2}{45}(x - 15)^2 \qquad \big|\cdot 45$$

$$45kx - 450 = -2\left(x^2 - 30x + 225\right)$$

$$45kx - 450 = -2x^2 + 60x - 450$$

$$2x^2 + (45k - 60)x = 0$$

$$x(2x + 45k - 60) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 2x + 45k - 60 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 2x = 60 - 45k$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{60 - 45k}{2}$$

Koska ratkaisuja saa olla vain yksi, sen on oltava $x = 0$. Saadaan yhtälö

$$\frac{60 - 45k}{2} = 0 \qquad \big|\cdot 2$$

$$60 - 45k = 0$$

$$k = \frac{60}{45} = \frac{4}{3}$$

Tangentin (suoran) suuntakulma α saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = k \qquad \Big|\ k = \frac{4}{3}$$

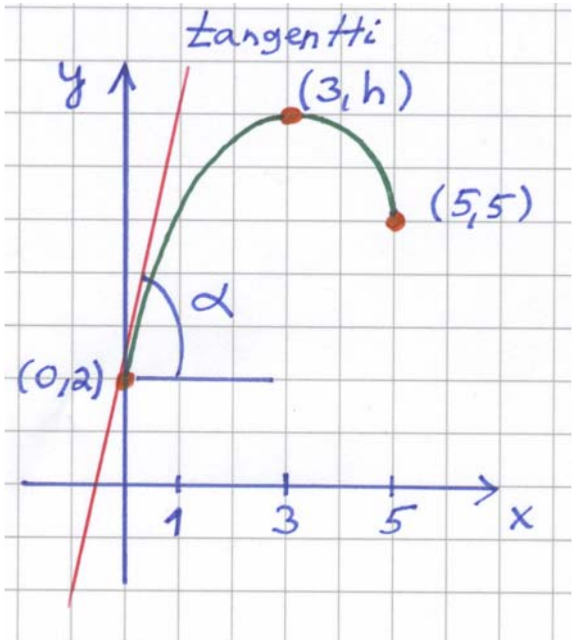
$$\tan\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = 53{,}1301...^\circ \approx 53{,}1^\circ$$

Vastaus $53{,}1^\circ$

838

Valitaan koordinaatisto oheisen kuvion mukaisesti, yksikkönä on metri.



Heittokulma on yhtä suuri kuin paraabelin pisteeseen $(0,2)$ piirretyn tangentin suuntakulma α.
Ratkaistaan tangentin kulmakerroin *k* ja sitten suuntakulma α $(\tan\alpha = k)$.
Tangentin yhtälö on

$$y-2=k(x-0) \qquad \left|\, y-y_0=k(x-x_0)\right.$$
$$y=kx+2$$

Paraabelin yhtälö on

$$y-h=a(x-3)^2 \qquad \left|\, y-y_0=a(x-x_0)^2\right.$$

Koska paraabeli kulkee pisteiden $(0,2)$ ja $(5,5)$ kautta, saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2-h=a(0-3)^2 \\ 5-h=a(5-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} 2-h=9a \\ 5-h=4a \end{cases} \qquad \left|\begin{matrix}\cdot(-1)\\ \cdot 1\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} -2+h=-9a \\ 5-h=4a \end{cases}$$

$$3=-5a$$

$$a=-\frac{3}{5} \qquad \left|\text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).\right.$$

$$2-h=9\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$-h=-\frac{27}{5}-2$$

$$h=\frac{37}{5}$$

Paraabelin yhtälö on siten

$$y-\frac{37}{5}=-\frac{3}{5}(x-3)^2 \qquad |\cdot 5$$

$$5y-37=-3\left(x^2-6x+9\right)$$

$$5y-37=-3x^2+18x-27$$

$$5y=-3x^2+18x+10 \qquad |:5$$

$$y=-\frac{3}{5}x^2+\frac{18}{5}x+2$$

Tangentilla ja paraabelilla on vain yksi yhteinen piste.

$$\begin{cases} y=kx+2 & (1) \quad |\text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2). \\ y=-\frac{3}{5}x^2+\frac{18}{5}x+2 & (2) \end{cases}$$

$$kx+2=-\frac{3}{5}x^2+\frac{18}{5}+2$$

$$\frac{3}{5}x^2+kx-\frac{18}{5}x=0 \qquad |\cdot 5$$

$$3x^2+5kx-18x=0$$

$$x(3x+5k-18)=0$$

$$x=0 \text{ tai } 3x+5k-18=0$$

$$x=0 \text{ tai } \qquad x=\frac{18-5k}{3}$$

Koska ratkaisuja saa olla vain yksi, sen on oltava $x=0$.

Saadaan yhtälö

$$\frac{18-5k}{3}=0 \qquad |\cdot 3$$

$$18-5k=0$$

$$-5k=-18$$

$$k=\frac{18}{5}$$

Suuntakulma saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha=k \qquad \left| k=\frac{18}{5}\right.$$

$$\tan\alpha=\frac{18}{5}$$

$$\alpha=74,475...^\circ$$

Vastaus $\quad 74,5^\circ$

839

Olkoon *x* (mk) kahvin kilohinnan korotus. Tällöin kahvin kilohinta on $50 + x$ (mk) ja kahvia myydään kuukaudessa $500 - 15x$ (kg). Kauppiaan voitto kahvikilosta on $(50 + x) - 30 = 20 + x$ (mk).
Kauppiaan voitto *y* (mk) kuukaudessa on

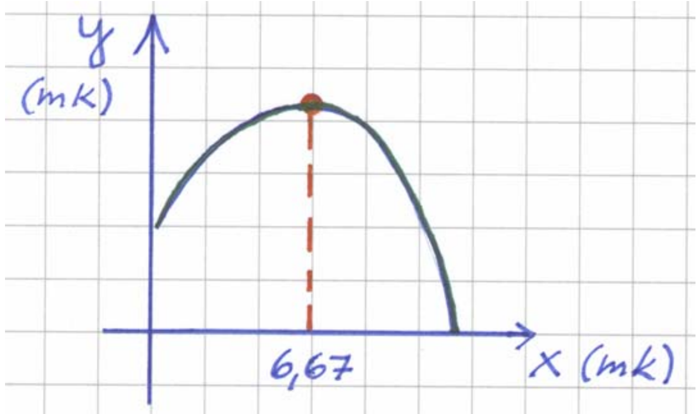
$$y = (20 + x) \cdot (500 - 15x)$$

$$y = 10\ 000 - 300x + 500x - 15x^2$$

$$y = -15x^2 + 200x + 10\ 000,\ \ x \ge 0$$

Kauppiaan voittoa kuvaa siis alaspäin aukeavan paraabelin kaari. Paraabelin huipun *x*-koordinaatti on

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{2 \cdot (-15)} = \frac{20}{3} \approx 6,67\ (\ge 0)$$

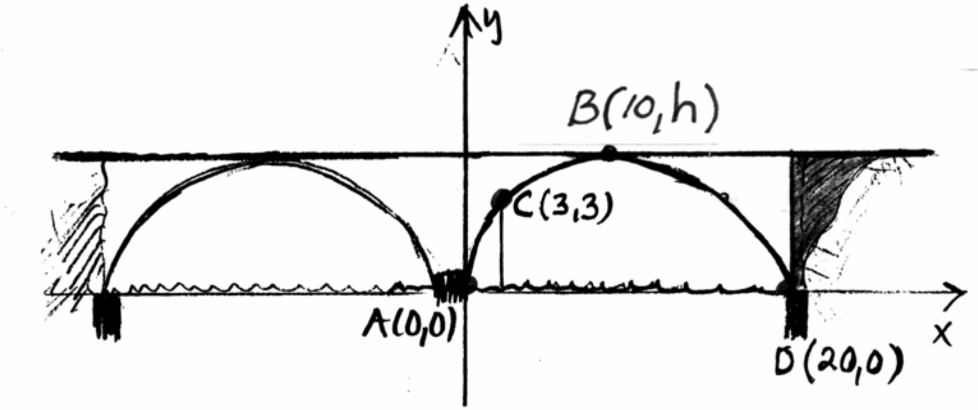


Kauppiaan voitto on suurin, kun $x = 6,67$ (mk), jolloin kahvin kilohinta on $50 + x = 56,67$ markkaa.

Vastaus $6,67\ \frac{\text{mk}}{\text{kg}}$

840

Piirretään mallikuva, jossa yksikkönä on metri. Valitaan koordinaatiston *x*-akseli pitkin vedenpintaa ja *y*-akseli tukipilarin oikeaan reunaan.



Paraabelin yhtälö nollakohtamuodossa on

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \left|\ \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 20 \end{aligned}\right.$$

$$y = a(x - 0)(x - 20)$$

$$y = ax(x - 20)$$

Paraabelin piste on $(3,3)$, joten saadaan yhtälö

$$3 = a \cdot 3 \cdot (3 - 20) \qquad |:3$$

$$1 = a \cdot (-17)$$

$$a = -\frac{1}{17}$$

Paraabelin yhtälö on siten

$$y=-\frac{1}{17}x(x-20)$$

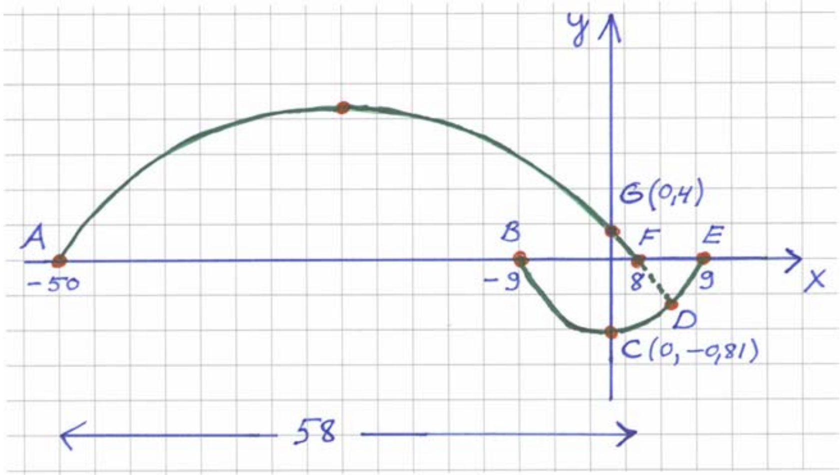
Sillan suurin alikulkukorkeus on

$$h=-\frac{1}{17}\cdot 10\cdot(10-20)=\frac{100}{17}=5{,}882...$$

Vastaus 5,8 m (pyöristys alaspäin!)

841

Piirretään mallikuva, jossa yksikkönä on metri.



Määritetään paraabelien *AGD* ja *BCE* yhtälöt ja paraabelien leikkauspiste $D=(x,y)$. Pallon lyhin etäisyys hiekkakuopan reunasta vaakasuunnassa mitattuna on $9-x$.

– Paraabelin *AGD* yhtälö on

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \qquad \left| \begin{array}{l} x_1=-50 \\ x_2=8 \end{array} \right.$$

$$y=a(x+50)(x-8)$$

Paraabeli AGD kulkee pisteen $G=(0,4)$ kautta, joten

$$4=a\cdot(0+50)(x-8)$$

$$4=a\cdot 50\cdot(-8)$$

$$a=\frac{4}{50\cdot(-8)}=-\frac{1}{100}$$

Paraabelin *AGD* yhtälö on $y=-\frac{1}{100}(x+50)(x-8)$.

– Paraabelin *BCE* yhtälö on

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 = -9 \\ x_2 = 9 \end{array} \right.$$

$$y = a(x+9)(x-9)$$

Paraabelin BCE piste on $(0;-0{,}81)$, joten

$$-0{,}81 = a\cdot(0+9)\cdot(0-9)$$

$$a = \frac{-0{,}81}{-81} = \frac{81}{8100} = \frac{1}{100}$$

Paraabelin *BCE* yhtälö on $y = \frac{1}{100}(x+9)(x-9)$.

– Paraabelien leikkauspisteen *D* *x*-koordinaatti:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} y = -\dfrac{1}{100}(x+50)(x-8) \\ y = \dfrac{1}{100}(x+9)(x-9) \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$\frac{1}{100}(x+9)(x-9) = -\frac{1}{100}(x+50)(x-8) \quad \Big| \cdot 100$$

$$(x+9)(x-9) = -(x+50)(x-8)$$

$$x^2 - 81 = -(x^2 - 8x + 50x - 400)$$

$$x^2 - 81 = -x^2 - 42x + 400$$

$$2x^2 + 42x - 481 = 0$$

$$x = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4\cdot 2\cdot(-481)}}{2\cdot 2}$$

$$x = \frac{-42 \pm \sqrt{5612}}{4} \qquad \Big| \, x > 0$$

$$x = \frac{-42 + \sqrt{5612}}{4} = 8{,}2283...$$

– Pallon lyhin etäisyys hiekkakuopan reunasta vaakasuunnassa mitattuna on

$$9 - x = 9 - 8{,}2283... = 0{,}7716... \approx 0{,}77 \text{ (m)}$$

Vastaus 77 cm

842

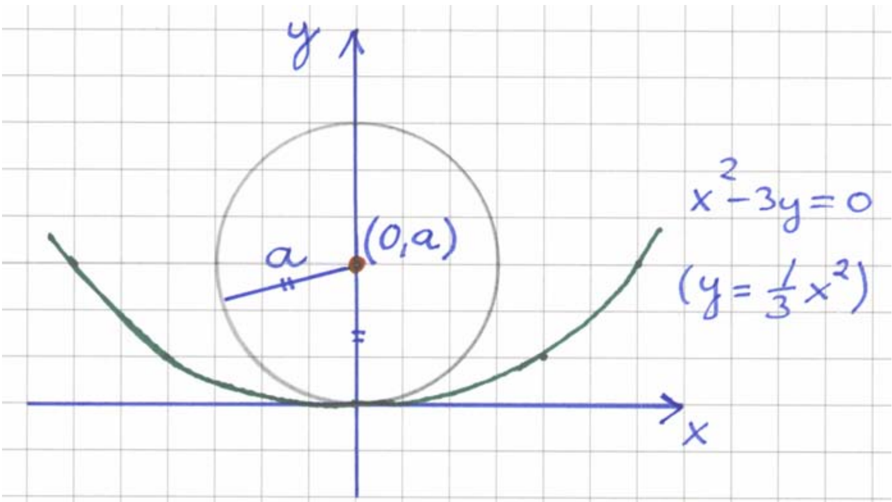
Paraabelin $x^2 - 3y = 0$ eli $y = \frac{1}{3}x^2$ huippu on

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2\cdot\frac{1}{3}} = 0 \qquad \Big|\, y = \frac{1}{3}x^2$$

$$y_0 = \frac{1}{3}\cdot 0^2 = 0$$

Huippu on $(0,0)$.

Piirretään mallikuva.



Ympyrä sivuaa paraabelia origossa, joten ympyrän säde on *a*.
Ympyrän keskipiste on $(0,a)$ ja säde *a*, joten sen yhtälö on

$$(x-0)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2$$

Paraabelin ja ympyrän yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} x^2 - 3y = 0 & \Big|\cdot(-1) \\ x^2 + (y-a)^2 = a^2 & \Big|\cdot 1 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -x^2 + 3y = 0 \\ x^2 + (y-a)^2 = a^2 \end{cases}$$

$$3y + (y-a)^2 = a^2$$

$$3y + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$$

$$y^2 + 3y - 2ay = 0$$

$$y(y + 3 - 2a) = 0$$

$$y = 0 \text{ tai } y + 3 - 2a = 0$$

$$y = 0 \text{ tai } y = 2a - 3$$

– Kun $y = 0$, niin

$$-x^2 + 3\cdot 0 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Yhteinen piste on siis origo $(0,0)$.

– Kun $y = 2a - 3$, niin

$$-x^2 + 3(2a-3) = 0$$

$$x^2 = 3(2a-3)$$

$$x = \pm\sqrt{3(2a-3)}$$

Koska yhteisiä pisteitä ei saa olla kuin origo $(0,0)$, niin joko

1)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} 3(2a-3) = 0 \\ 2a - 3 = 0 \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} 2a - 3 = 0 \\ 2a = 3 \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ eli } a = \frac{3}{2}$$

tai

2)

$$3(2a-3) < 0 \qquad |:3\ (>0)$$
$$2a - 3 < 0$$
$$2a < 3 \qquad |:2\ (>0)$$
$$a < \frac{3}{2}$$

Siis $a \le 1\frac{1}{2}$.

Vakion a suurin arvo on siis $1\frac{1}{2}$.

Vastaus $1\frac{1}{2}$

843

$$y = px^2 - 2pqx + 5 - 4p + 4pq$$

Valitaan käyräparvesta **kaksi** käyrää ja määritetään niiden leikkauspisteet. Nämä leikkauspisteet ovat ainoat mahdolliset pisteet, joiden kautta **kaikki** käyrät kulkevat. Tutkitaan lopuksi minkä leikkauspisteen kautta kaikki käyrät kulkevat.

Jos $p = 0$ ja $q = 0$, niin $y = 5$.

Jos $p = 1$ ja $q = 0$, niin $y = x^2 + 5 - 4$ eli $y = x^2 + 1$.

Leikkauspisteet:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} y = 5 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \qquad | \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$5 = x^2 + 1$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

Siis leikkauspisteet ovat $(-2,5)$ ja $(2,5)$.

1) Kun $x = -2$ ja $y = 5$, niin käyräparven

$$y = px^2 - 2pqx + 5 - 4p + 4pq$$

vasen puoli on 5 ja

oikea puoli on $p \cdot (-2)^2 - 2pq \cdot (-2) + 5 - 4p + 4pq$

$$= 4p + 4pq + 5 - 4p + 4pq$$
$$= 8pq + 5$$

Piste $(-2,5)$ ei toteuta käyräparven yhtälöä kaikilla vakioiden p ja q arvoilla (esimerkiksi, kun $p=1$ ja $q=1$). Kaikki käyrät eivät siis kulje pisteen $(-2,5)$ kautta.

2) Kun $x=2$ ja $y=5$, niin käyräparven

$y = px^2 - 2pqx + 5 - 4p + 4pq$

vasen puoli on 5 ja

oikea puoli on $p \cdot 2^2 - 2pq \cdot 2 + 5 - 4p + 4pq$

$= 4p - 4pq + 5 - 4p + 4pq$

$= 5$

Piste $(2,5)$ toteuttaa käyräparven yhtälön kaikilla vakioiden p ja q arvoilla. Kaikki käyrät siis kulkevat pisteen $(2,5)$ kautta. □

Vastaus $(2,5)$

844

Leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \quad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$x^2 + \left(x^2 - 2x\right)^2 - 2x = 0$$

$$\left(x^2 - 2x\right) + \left(x^2 - 2x\right)^2 = 0$$

$$\left(x^2 - 2x\right)\left[1 + \left(x^2 - 2x\right)\right] = 0$$

$$x^2 - 2x = 0 \text{ tai } x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x(x-2) = 0 \text{ tai } (x-1)^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x - 2 = 0 \text{ tai } (x-1)^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 2 \text{ tai } x = 1 \quad \Big|\ y = x^2 - 2x$$

$$y = 0 \text{ tai } y = 0 \text{ tai } y = -1$$

Vastaus $(0,0)$, $(2,0)$ ja $(1,-1)$

845

Valitaan paraabeliparvesta $y_a(x) = x^2 - ax + 2a,\ a \in \mathbb{R}$, kaksi (mielivaltaista) paraabelia ja ratkaistaan näiden leikkauspisteet. Valitaan esimerkiksi

$$a = 0: \qquad y_0(x) = x^2$$
$$a = 1: \qquad y_1(x) = x^2 - x + 2$$

Näiden leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} y = x^2 & \text{| Sijoitetaan yhtälöön } (2). \\ y = x^2 - x + 2 \end{cases}$$

$$x^2 = x^2 - x + 2$$
$$x = 2 \qquad |\ y = x^2$$
$$y = 2^2 = 4$$

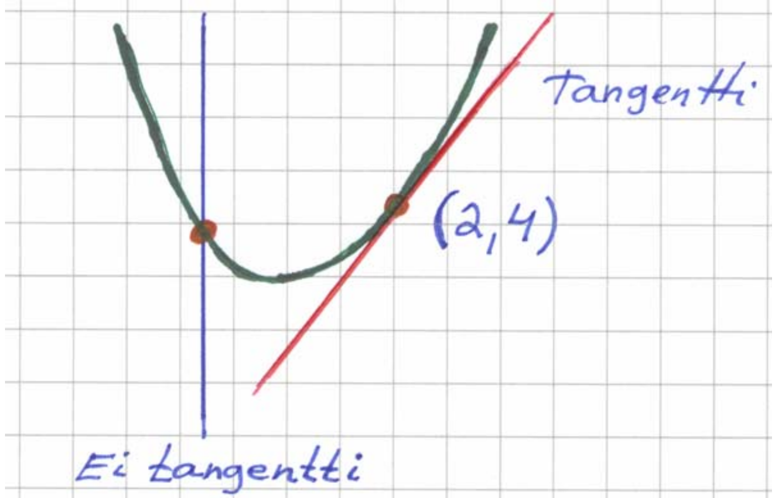
Siis ainoa leikkauspiste näille kahdelle paraabeliparven paraabelille on $(2,4)$.

Tämän on samalla oltava kaikkien paraabeliparven paraabelien yhteinen piste. Osoitetaan, että tämä saatu yhteinen piste toteuttaa paraabeliparven yhtälöön. Sijoittamalla $x = 2$ saadaan

$$y_a(2) = 2^2 - a \cdot 2 + 2a = 4 - 2a + 2a = 4$$

joten piste $(2,4)$ on kaikkien paraabelien yhteinen piste. □

Paraabelit $y_a(x) = x^2 - ax + 2a,\ a \in \mathbb{R}$, ovat ylöspäin aukeavia, joten niiden akselit ovat pystysuoria (y-akselin suuntaisia). Tällöin pisteen $(2,4)$ kautta kulkeva suora on paraabelin tangentti, jos ja vain jos tangentilla ja paraabelilla on vain yksi leikkauspiste ja tangentti ei ole pystysuora eli sillä on kulmakerroin.



Tangentin yhtälö on

$$y - 4 = k(x - 2) \qquad |\ y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y = kx - 2k + 4$$

Tangentin ja paraabelin $y = x^2 - ax + 2a$ leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} y = kx - 2k + 4 \\ y = x^2 - ax + 2a & \text{| Sijoitetaan yhtälöön } (1). \end{cases}$$

$$x^2 - ax + 2a = kx - 2k + 4$$
$$x^2 - ax - kx + 2a + 2k - 4 = 0$$
$$x^2 - (a + k)x + 2a + 2k - 4 = 0$$

Toisen asteen yhtälöllä on ratkaisuja, jos ja vain jos diskriminantti on nolla.

$$D = 0 \qquad \Big| \; D = b^2 - 4ac$$

$$[-(a+k)]^2 - 4\cdot 1\cdot (2a+2k-4) = 0$$

$$(a+k)^2 - 4(2a+2k-4) = 0$$

$$a^2 + 2ak + k^2 - 8a - 8k + 16 = 0$$

$$k^2 + (2a-8)k + a^2 - 8a + 16 = 0$$

$$k^2 + 2(a-4)k + (a-4)^2 = 0$$

$$[k + (a-4)]^2 = 0$$

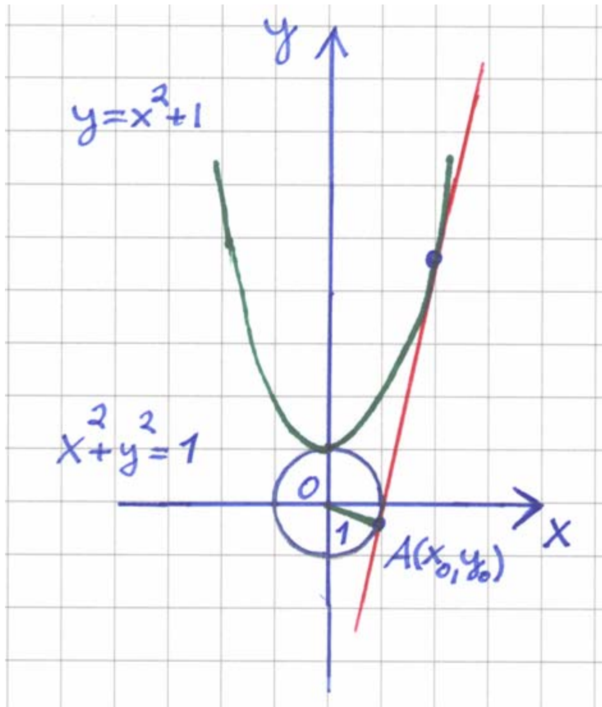
$$(k+a-4)^2 = 0$$

$$k + a - 4 = 0$$

$$k = 4 - a$$

Vastaus Yhteinen piste on $(2,4)$.
Tangentin kulmakerroin on $4-a$.

846



Pystysuoria tangentteja ei ole, koska paraabelin akseli on pystysuora.
Pisteiden O ja A kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k_{OA} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}, \; x_0 \neq 0$$

Tällöin tangentin kulmakerroin on

$$k = -\frac{1}{k_{OA}} = -\frac{x_0}{y_0}, \; y_0 \neq 0$$

Tangentin yhtälö on

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \qquad \Big| \cdot y_0 \ (\neq 0)$$

$$y_0 y - y_0^{\ 2} = -x_0(x - x_0)$$

$$y_0 y - y_0^{\ 2} = -x_0 x + x_0^{\ 2}$$

$$x_0 x + y_0 y = x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2}$$

| (x_0, y_0) on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ piste, joten $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = 1$

$$x_0 x + y_0 y = 1$$

| Sisältää myös tapauksen, jossa $x_0 = 0$, jolloin $y_0 = 1$. Tangentti on $y = 1$.

Tangentilla ja paraabelilla on täsmälleen yksi yhteinen piste.

$$\begin{cases} x_0 x + y_0 y = 1 & (1) \\ y = x^2 + 1 & (2) \end{cases}$$

| Sijoitetaan yhtälöön (1).

$$x_0 x + y_0(x^2 + 1) = 1$$

$$x_0 x + y_0 x^2 + y_0 = 1$$

$$y_0 x^2 + x_0 x + y_0 - 1 = 0$$

| vain yksi ratkaisu

$$D = 0$$

| $D = b^2 - 4ac$

$$x_0^{\ 2} - 4 \cdot y_0(y_0 - 1) = 0$$

$$x_0^{\ 2} - 4y_0^{\ 2} + 4y_0 = 0$$

| $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = 1$, joten $x_0^{\ 2} = 1 - y_0^{\ 2}$

$$1 - y_0^{\ 2} - 4y_0^{\ 2} + 4y_0 = 0$$

$$-5y_0^{\ 2} + 4y_0 + 1 = 0$$

$$y_0 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 1}}{2 \cdot (-5)}$$

$$y_0 = \frac{-4 \pm 6}{-10}$$

$$y_0 = -\frac{1}{5} \quad \text{tai} \quad y_0 = 1$$

| $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = 1$, joten $x_0 = \pm\sqrt{1 - y_0^{\ 2}}$

$$x_0 = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} \quad \text{tai} \quad x_0 = \pm\sqrt{1-1}$$

$$x_0 = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{tai} \quad x_0 = 0$$

Yhteiset tangentit ovat siis

- $\frac{2\sqrt{6}}{5}x - \frac{1}{5}y = 1$ eli $2\sqrt{6}x - y - 5 = 0$
- $-\frac{2\sqrt{6}}{5}x - \frac{1}{5}y = 1$ eli $2\sqrt{6}x + y + 5 = 0$
- $0 \cdot x + 1 \cdot y = 1$ eli $y - 1 = 0$

Vastaus

$$2\sqrt{6}x - y - 5 = 0$$

$$2\sqrt{6}x + y + 5 = 0$$

$$y - 1 = 0$$

847

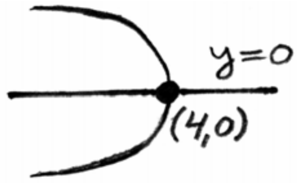
a) $x = 4 - y^2$ $\quad \left| \, x = ay^2 + by + c, \; a \neq 0 \right.$

Paraabeli on **vasemmalle** aukeava, sillä $a = -1 < 0$.
Paraabelin huippu:

$$y_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot (-1) = 0} \qquad \left| \, x = 4 - y^2 \right.$$

$$x_0 = 4 - 0^2 = 4$$

Huippu on $(4, 0)$.



Paraabelin **akseli** on $y = 0$.

b) $4y^2 + 6y - 2x + 10 = 0$

$$-2x = -4y^2 - 6y - 10 \qquad \left| \, :(-2) \right.$$

$$x = 2y^2 + 3y + 5 \qquad \left| \, x = ay^2 + by + c, \; a \neq 0 \right.$$

Paraabeli aukeaa **oikealle**, sillä $a = 2 > 0$.
Paraabelin huippu:

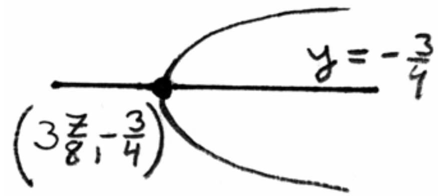
$$y_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4} \qquad \left| \, x = 2y^2 + 3y + 5 \right.$$

$$x_0 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 5 = 2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 5$$

$$x_0 = \frac{9}{8} - \frac{18}{8} + 5 = -\frac{9}{8} + 5 = -1\frac{1}{8} + 5$$

$$= 3\frac{7}{8}$$

Huippu on $\left(3\frac{7}{8}, -\frac{3}{4}\right)$.



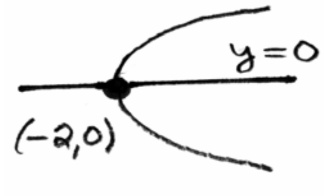
Paraabelin **akseli** on $y = -\frac{3}{4}$.

c) $x = 2(y+1)(y-1)$ $\quad \left| \, x = a(y - y_1)(y - y_2), \; a \neq 0 \right.$

Paraabeli aukeaa **oikealle**, koska $a = 2 > 0$.
Paraabelin huippu:

Paraabelin nollakohdat ovat $y_1 = -1$ ja $y_2 = 1$, joten huipun *y*-koordinaatti on

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$



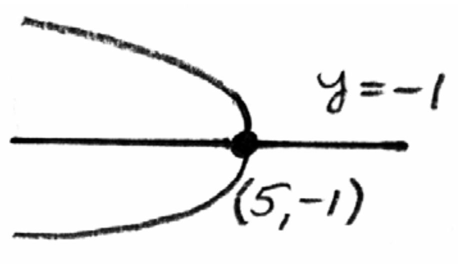
Huipun *x*-koordinaatti on

$$x_0 = 2 \cdot (0+1)(0-1) = -2 \qquad \left| \, x = 2(y+1)(y-1) \right.$$

Huippu on $(-2, 0)$ ja **akseli** on $y = 0$.

d) $x-5=-4(y+1)^2$ $\quad\left|\, x-x_0=a(y-y_0)^2,\ a\neq 0\right.$

Paraabeli aukeaa **vasemmalle**, koska $a=-4<0$.
Paraabelin **huippu** on $(5,-1)$ ja **akseli** $y=-1$.



848

a) $x=3y^2-6y+7$ $\quad\left|\, x=ay^2+by+c,\ a\neq 0\right.$

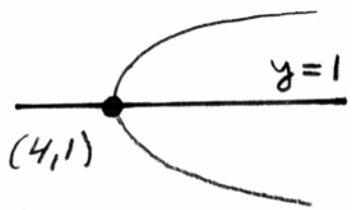
Paraabeli aukeaa **oikealle**, koska $a=3>0$.
Paraabelin huippu:

$$y_0=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2\cdot 3}=1 \quad \left|\, x=3y^2-6y+7\right.$$

$$x_0=3\cdot 1^2-6\cdot 1+7=4$$

Huippu on $(4,1)$.

Paraabelin **akseli** on $y=1$.



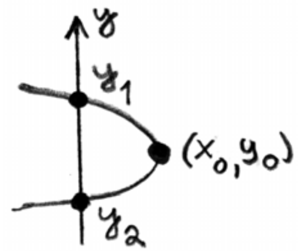
b)

$$-x=3(y-4)(y+10) \quad \left|\cdot(-1)\right.$$

$$x=-3(y-4)(y+10) \quad \left|\, x=a(y-y_1)(y-y_2),\ a\neq 0\right.$$

Paraabeli aukeaa **vasemmalle**, koska $a=-3<0$.
Paraabelin nollakohdat ovat $y_1=4$ ja $y_2=-10$, joten huipun y-koordinaatti on

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4+(-10)}{2}=-3$$



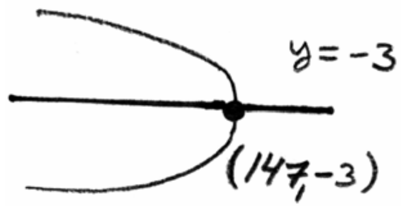
Huipun x-koordinaatti on

$$x_0=-3(-3-4)\cdot(-3+10) \quad \left|\, x=-3(y-4)(y+10)\right.$$

$$=-3\cdot(-7)\cdot 7=147$$

Huippu on $(147,-3)$

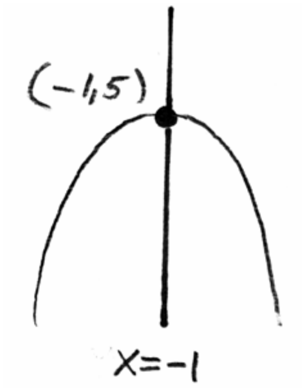
Paraabelin **akseli** on $y=-3$.



c) $y-5=-4(x+1)^2$ $\quad\Big|\ y-y_0=a(x-x_0)^2,\ a\neq 0$

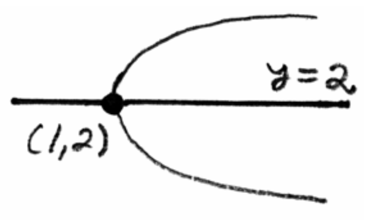
Paraabeli aukeaa **alaspäin**, koska $a=-4<0$.

Paraabelin **huippu** on $(-1,5)$.
Paraabelin **akseli** on $x=-1$.



d) $x-1=4(y-2)^2$ $\quad\Big|\ x-x_0=a(y-y_0)^2,\ a\neq 0$

Paraabeli aukeaa **oikealle**, koska $a=4>0$.
Paraabelin **huippu** on $(1,2)$ ja **akseli** $y=2$.



849

a) $x=y^2-4y+3$ $\quad\Big|\ x=ay^2+by+c,\ a\neq 0$

– oikealle aukeava paraabeli, koska $a=1>0$.

– huippu: $y_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{4}{2\cdot 1}=2$ $\quad\Big|\ x=y^2-4y+3$

$x_0=2^2-4\cdot 2+3=-1$

huippu $(-1,2)$

– nollakohdat: $y^2-4y+3=0$

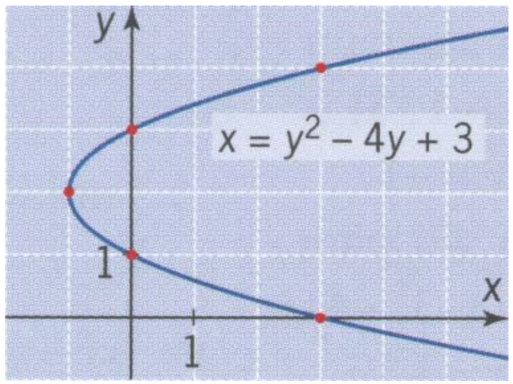
$$y=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}$$

$$y=\frac{4\pm 2}{2}$$

$y=3$ tai $y=1$

– lisäpisteitä:

y	$x=y^2-4y+3$	(x,y)
1	0	$(0,1)$
3	0	$(0,3)$
0	3	$(3,0)$
4	3	$(3,4)$



b) $x=-\frac{1}{2}y^2$ $\qquad \left| x=ay^2+by+c,\ a\neq 0 \right.$

– vasemmalle aukeava paraabeli, koska $a=-\frac{1}{2}<0$.

– huippu: $y_0=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=0$ $\qquad \left| x=-\frac{1}{2}y^2 \right.$

$x_0=-\frac{1}{2}\cdot 0^2=0$

huippu $(0,0)$

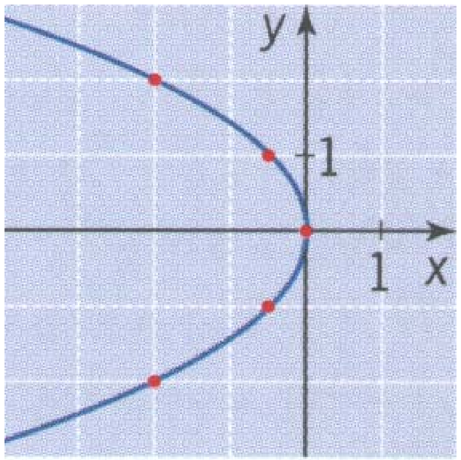
– nollakohdat: $-\frac{1}{2}y^2=0$

$y^2=0$

$y=0$

– lisäpisteitä:

y	$x=-\frac{1}{2}y^2$	(x,y)
1	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$
-1	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},-1\right)$
2	-2	$(-2,2)$
-2	-2	$(-2,-2)$



$x=-\frac{1}{2}y^2$

c) $x=3(y+1)(y-1)$ $\qquad \left| x=a(y-y_1)(y-y_2),\ a\neq 0 \right.$

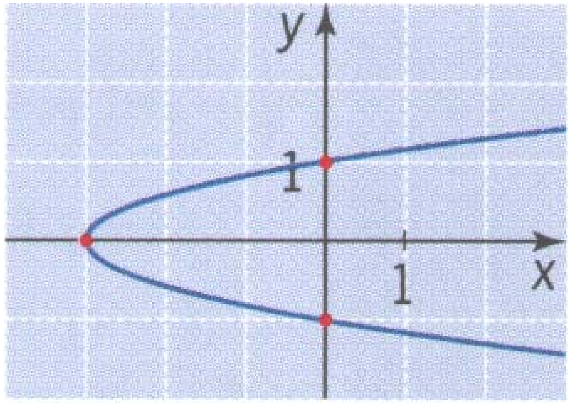
– oikealle aukeava paraabeli, koska $a=3>0$.

– nollakohdat: $y_1=-1$ ja $y_2=1$

– huippu: $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-1+1}{2}=0$ $\qquad \left| x=3(y+1)(y-1) \right.$

$x_0=3\cdot(0+1)(0-1)=-3$

huippu $(-3,0)$



$x=3(y+1)(y-1)$

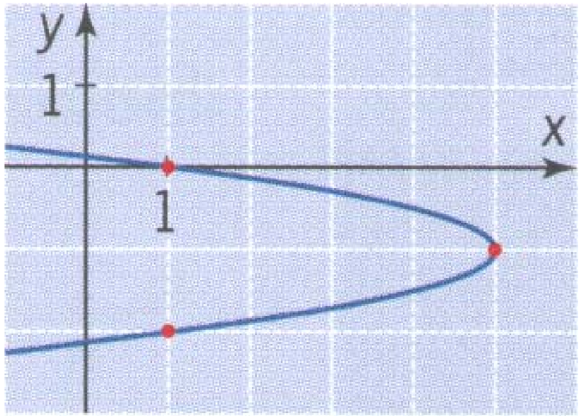
d) $x-5=-4(y+1)^2$ $\quad\big|\; x-x_0=a(y-y_0)^2,\ a\neq 0$

– Paraabeli aukeaa vasemmalle, sillä $a=-4<0$.

– Huippu on $(-5,1)$.

– Lisäpisteitä:

y	$x=5-4(y+1)^2$	(x,y)
0	1	$(1,0)$
–2	1	$(1,-2)$



$x-5=-4(y+1)^2$

850

Paraabelin $x=a(y-a)^2$ yhtälö on huippumuodossa $\left(x-x_0=a(y-y_0)^2,\ a\neq 0\right)$, joten kerroin $a\neq 0$ ja paraabelin huippu on $(0,a)$.

Paraabelin piste $(0,-2)$ toteuttaa paraabelin yhtälön, joten

$$0=a(-2-a)^2$$

$$a(-2-a)^2=0 \qquad \big|\ \text{tulon nollasääntö}$$

$$a=0 \quad \text{tai} \quad (-2-a)^2=0$$

$$a=0 \quad \text{tai} \quad -2-a=0$$

$$a=0 \quad \text{tai} \quad a=-2 \qquad \big|\ a\neq 0$$

ei kelpaa — kelpaa

Paraabelin huippu on siten $(0,a)=(0,-2)$.

Vastaus $(0,-2)$

851

Paraabeli $y=-2x^2-x+2$ voidaan piirtää graafisella laskimella, sillä yhtälö on ratkaistu muuttujan *y* suhteen.
Ratkaistaan myös paraabelista $x=y^2-2y-3$ muuttuja *y*.

$$x=y^2-2y-3$$

$$y^2-2y-3-x=0 \quad \Big| \text{ toisen asteen yhtälön ratkaisukaava } a=1,\ b=-2,\ c=-3-x$$

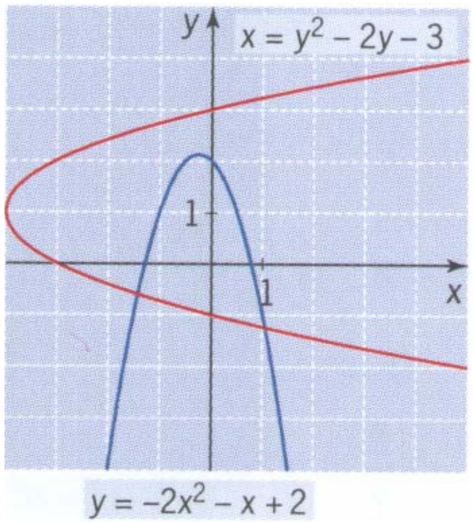
$$y=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3-x)}}{2\cdot1}$$

$$y=\frac{2\pm\sqrt{16+4x}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot(4+x)}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{4+x}}{2}$$

$$y=1\pm\sqrt{4-x}$$

Paraabeli muodostuu siis käyristä

$$y=1+\sqrt{4-x} \quad \text{ja} \quad y=1-\sqrt{4-x}$$



852

a) Ylöspäin aukeavan paraabelin yhtälö huippumuodossa on

$$y-y_0=a(x-x_0)^2,\ a>0 \qquad \Big| (x_0,y_0)=(0,0)$$

$$y-0=a(x-0)^2$$

$$y=ax^2$$

Paraabeli kulkee pisteen $(2,8)$ kautta, joten

$$8=a\cdot2^2$$

$$a=2 \qquad \Big| a>0$$

kelpaa

Paraabelin yhtälö on siis $y=2x^2$.

b) Oikealle aukeavan paraabelin yhtälö huippumuodossa on

$$x-x_0=a(y-y_0)^2 \qquad \Big| (x_0,y_0)=(0,0)$$

$$x=ay^2$$

Paraabeli kulkee pisteen $(2,8)$ kautta, joten

$$2=a\cdot8^2$$

$$a=\frac{2}{64}=\frac{1}{32} \qquad \Big| a>0$$

kelpaa

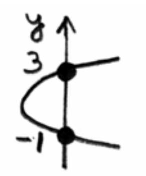
Paraabelin yhtälö on siis $x=\frac{1}{32}y^2$.

Vastaus a) $y=2x^2$ b) $x=\frac{1}{32}y^2$

853

Sivulle aukeavan paraabelin yhtälö nollakohtamuodossa on

$$x = a(y - y_1)(y - y_2),\ a \neq 0 \quad \left|\begin{array}{l} y_1 = -1 \\ y_2 = 3 \end{array}\right.$$



$$x = a(y + 1)(y - 3)$$

Paraabeli kulkee pisteen $(1,8)$ kautta, joten

$$1 = a \cdot (8+1) \cdot (8-3)$$

$$1 = a \cdot 9 \cdot 5$$

$$a = \frac{1}{45}$$

Paraabelin yhtälö on siten

$$x = \frac{1}{45}(y+1)(y-3)$$

Huipun *y*-koordinaatti on

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Huipun *x*-koordinaatti on

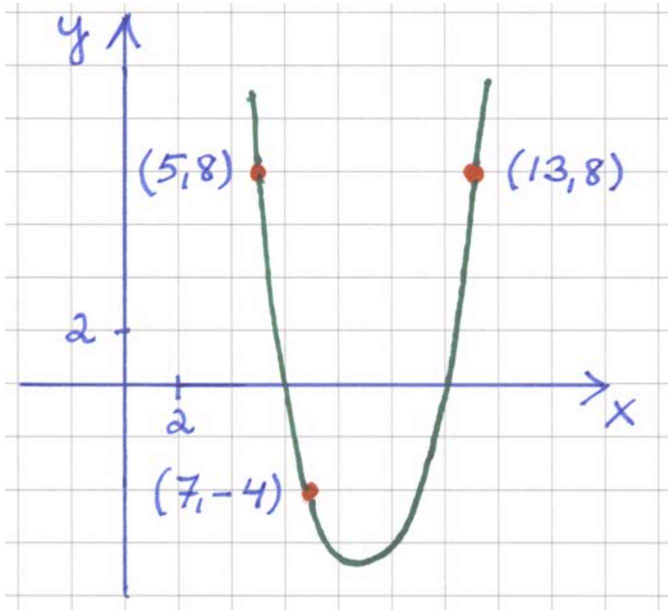
$$x_0 = \frac{1}{45}(1+1)(1-3) \quad \left| x = \frac{1}{45}(y+1)(y-3) \right.$$

$$= \frac{1}{45} \cdot 2 \cdot (-2) = -\frac{4}{45}$$

Vastaus $\left(-\frac{4}{45}, 1\right)$

854

Piirretään mallikuva.



Koska paraabelin pisteillä $(5,8)$ ja $(13,8)$ on sama *y*-koordinaatti on paraabeli ylös- tai alaspäin aukeava. Paraabelin yhtälö perusmuodossa on siten

$$y = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0$$

Paraabeli kulkee pisteiden $(5,8)$, $(13,8)$ ja $(7,-4)$ kautta,

joten saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 8 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \\ 8 = a \cdot 13^2 + b \cdot 13 + c \\ -4 = a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c \end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}c = 8-25a-5b \\ 169a+13b+c=8 \\ 49a+7b+c=-4\end{cases}$$ | Sijoitetaan yhtälöihin (2) ja (3).

$$\begin{cases}169a+13b+8-25a-5b=8 \\ 49a\ \ +7b+8-25a-5b=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}144a+8b=0 \\ 24a+2b=-12\end{cases}$$

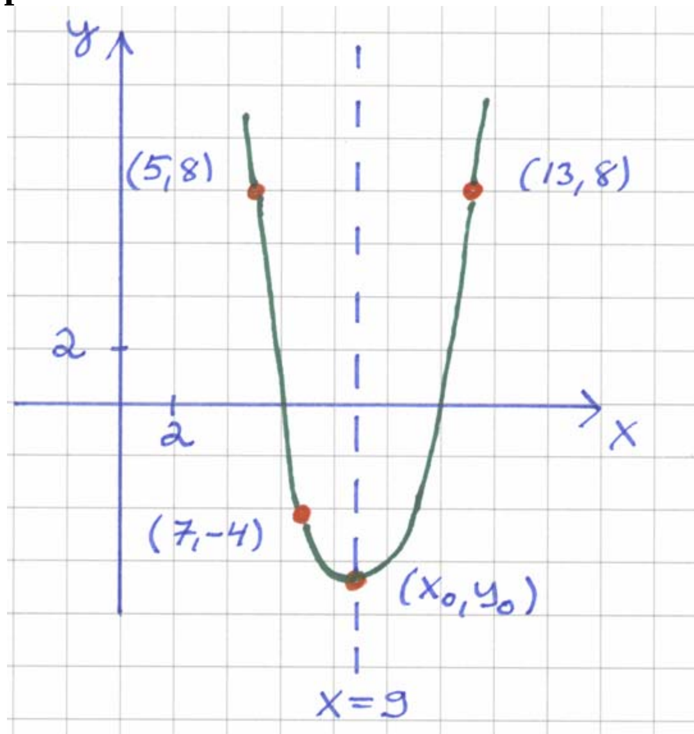
$$\begin{matrix}(4)\\(5)\end{matrix}\begin{cases}b=-18a \\ 24a+2b=-12\end{cases}$$ | Sijoitetaan yhtälöön (5).

$$24+2\cdot(-18a)=-12$$
$$24a-36a=-12$$
$$-12a=-12$$
$$a=1$$ | Sijoitetaan yhtälöön (4).
$$b=-18$$

Yhtälön (1) mukaan
$$c=8-25\cdot1-5\cdot(-18)$$
$$c=73$$

Paraabelin yhtälö on siten $y=x^2-18x+73$

Tapa 2 Piirretään mallikuva.



Paraabelin symmetria-akseli on $x=\frac{5+13}{2}=9$, joten huipun x-koordinaatti on $x_0=9$. Paraabelin yhtälö huippumuodossa on

$$y-y_0=a(x-9)^2,\quad a\neq 0$$

Paraabeli kulkee pisteiden $(5,8)$ ja $(7,-4)$ kautta, joten saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases}8-y_0=a(5-9)^2 \\ -4-y_0=a(7-9)^2\end{cases}$$ | $\cdot 1$ / $\cdot(-1)$

$$+\begin{cases} 8 - y_0 = 16a \\ 4 + y_0 = -4a \end{cases}$$

$$12 = 12a$$

$$a = 1$$

Sijoitetaan $a = 1$ yhtälöön $8 - y_0 = 16a$. Saadaan yhtälö

$$8 - y_0 = 16 \cdot 1$$

$$y_0 = -8$$

Paraabelin yhtälö on siten

$$y - y_0 = a(x-9)^2 \qquad \Big| \, a = 1 \text{ ja } y_0 = -8$$

$$y - (-8) = 1 \cdot (x-9)^2$$

$$y + 8 = (x-9)^2 \qquad \Big| \text{ paraabelin yhtälö huippumuodossa}$$

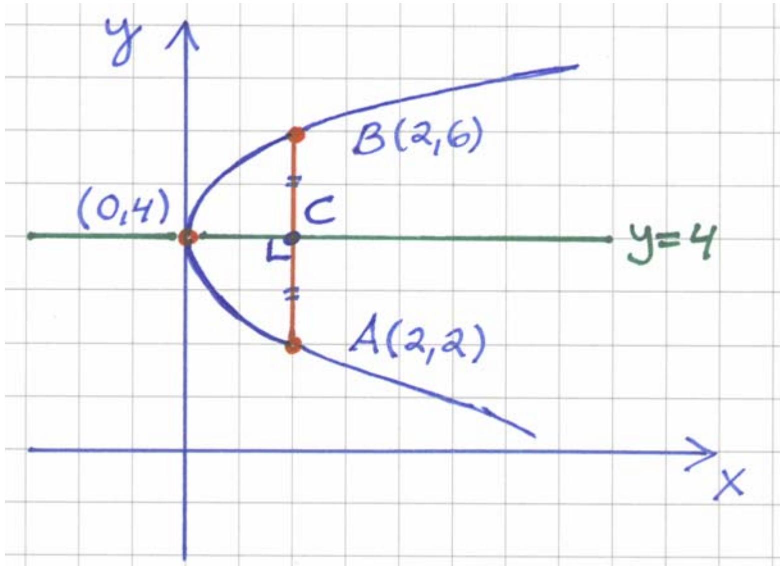
$$y + 8 = x^2 - 18x + 81$$

$$y = x^2 - 18x + 73 \qquad \Big| \text{ paraabelin yhtälö perusmuodossa}$$

Vastaus $\quad y = x^2 - 18x + 73$

855

Piirretään mallikuva.



Janan AB keskipiste on

$$C = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = (2,4)$$

Koska jana AB on pystysuora, niin

paraabelin akseli on $x = 4$ ja

paraabelin huippu on y-akselilla pisteessä $(0,4)$.

Oikealle aukeavan paraabelin yhtälö huippumuodossa on

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2, \; a > 0 \qquad \Big| \, (x_0, y_0) = (0,4)$$

$$x - 0 = a(y-4)^2$$

$$x = a(y-4)^2$$

Paraabeli kulkee pisteen $(2,2)$ kautta, joten

$$2 = a(2-4)^2$$

$$a = \frac{1}{2} \qquad \big| \, a > 0$$

kelpaa

Paraabelin yhtälö on siis

$$x = \frac{1}{2}(y-4)^2 \qquad \big| \text{huippumuoto}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(y^2 - 8y + 16\right)$$

$$x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 8 \qquad \big| \text{perusmuoto}$$

Vastaus $x = \frac{1}{2}(y-4)^2$

$\left(x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 8\right)$

856

Paraabelin ja suoran yhteiset pisteet eli jänteen päätepisteet:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x = y^2 - 2y - 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$y^2 - 2y - 1 + y = 1$$

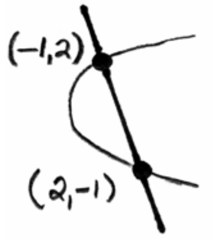
$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$y = 2 \quad \text{tai} \quad y = -1 \qquad \big| \, x = 1 - y$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Siis jänteen päätepisteet ovat $(-1,2)$ ja $(2,-1)$.



Jänteen pituus on

$$\sqrt{(-1-2)^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Vastaus $3\sqrt{2}$

857

Yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 & (1) \\ x = y^2 & (2) \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$y^4 - 2y^2 + y^2 = 0$$
$$y^4 - y^2 = 0$$
$$y^2\left(y^2 - 1\right) = 0$$
$$y^2 = 0 \text{ tai } y^2 - 1 = 0$$
$$y = 0 \text{ tai } y^2 = 1$$
$$y = 0 \text{ tai } y = \pm 1 \quad \Big| x = y^2$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 1$$

Yhteiset pisteet ovat $(0,0)$, $(1,1)$ ja $(1,-1)$.

858

Paraabeli $x + y = y^2$ eli $x = y^2 - y$ aukeaa oikealle, joten sen akseli on vaakasuora (x-akselin suuntainen).
Suora $x - 3y + 4 = 0$ eli $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ ei ole vaakasuora, joten se sivuaa paraabelia täsmälleen silloin, kun suoralla ja paraabelilla on vain yksi yhteinen piste. Todistetaan, että yhteisiä pisteitä on vain yksi. Yhteiset pisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} & (1) \\ x = y^2 - y & (2) \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$y = \frac{1}{3}\left(y^2 - y\right) + \frac{4}{3} \quad \Big| \cdot 3$$
$$3y = y^2 - y + 4$$
$$y^2 - 4y + 4 = 0$$
$$\left(y - 2\right)^2 = 0$$
$$y - 2 = 0$$
$$y = 2 \quad \Big| x = y^2 - y$$
$$x = 2^2 - 2 = 2$$

Yhteinen piste on $(2,2)$.

Yhteisiä pisteitä on siis vain yksi,
joten suora sivuaa paraabelia. □

859

Paraabeli $y^2 = 2x$ eli $x = \frac{1}{2}y^2$ aukeaa oikealle $\left(\frac{1}{2} > 0\right)$, joten tangentti ei voi olla akselin suuntainen. Tangentin kulmakerroin ei siis voi olla nolla.

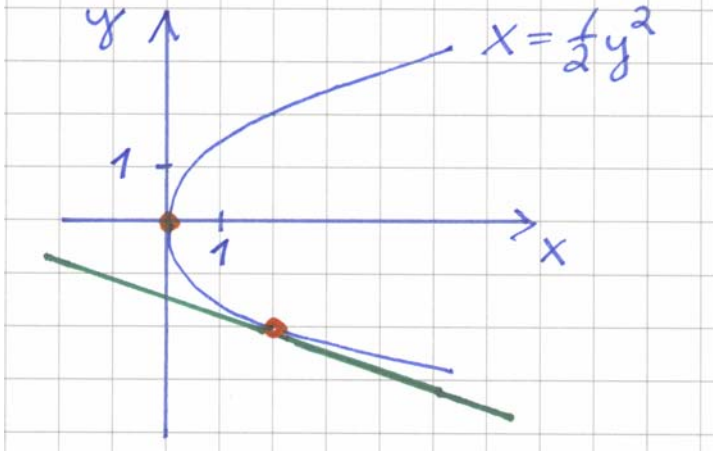
Paraabelin $x = \frac{1}{2}y^2$ huippu:

$$y_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 0 \qquad \left| x = \frac{1}{2}y^2 \right.$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$$

Siis huippu on $(0,0)$.

koska $(2,-2) \neq (0,0)$, ei huipun kautta kulkeva pystysuora tangentti $x = 0$ kelpaa ($x = 0$ on ainut pystysuora tangentti).



Olkoon tangentin kulmakerroin $k(\neq 0)$.
Tangentin yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \left| (x_0, y_0) = (2,-2) \right.$$

$$y - (-2) = k(x - 2), \ k \neq 0$$

$$y + 2 = kx - 2x$$

$$y = kx - 2k - 2$$

Tangentilla ja paraabelilla on vain yksi yhteinen piste.

$$\begin{cases} (1) & y = kx - 2k - 2 \\ (2) & x = \frac{1}{2}y^2 \end{cases} \qquad \left| \text{Sijoitetaan yhtälöön } (1). \right.$$

$$y = k \cdot \frac{1}{2}y^2 - 2k - 2 \qquad \left| \cdot 2 \right.$$

$$2y = ky^2 - 4k - 4$$

$$ky^2 - 2y - 4k - 4 = 0$$

Toisen asteen yhtälöllä $(k \neq 0)$ on vain yksi ratkaisu, jos ja vain jos $D = 0$.

$$D = 0$$

$$(-2)^2 - 4 \cdot k \cdot (-4k - 4) = 0$$

$$4 + 16k^2 + 16k = 0 \qquad \left| :4 \right.$$

$$4k^2 + 4k + 1 = 0$$

$$(2k + 1)^2 = 0$$

$$2k + 1 = 0$$

$$k = -\frac{1}{2} \qquad \left| y = kx - 2k - 2 \right.$$

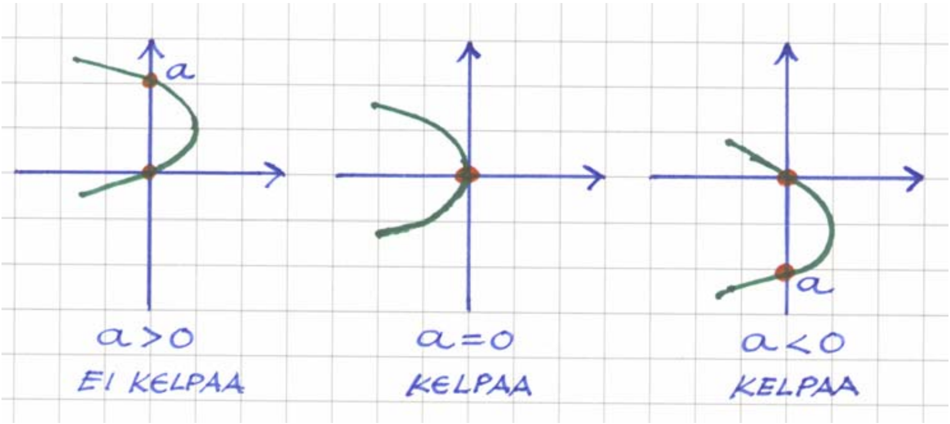
Tangentin yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

860

Paraabeli $x = -y^2 + ay$ on vasemmalle aukeava.
Paraabelin ja y-akselin leikkauskohdat $(x = 0)$:

$$0 = -y^2 + ay$$
$$y^2 - ay = 0$$
$$y(y - a) = 0$$
$$y = 0 \text{ tai } y = a$$

Saadaan kolme eri tilannetta riippuen a:n arvoista:



Vastaus $a \leq 0$

861

Paraabeli $12x = y^2 - 2y - 11$ eli $x = \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{6}y - \frac{11}{12}$ aukeaa oikealle, koska paraabeli on muotoa

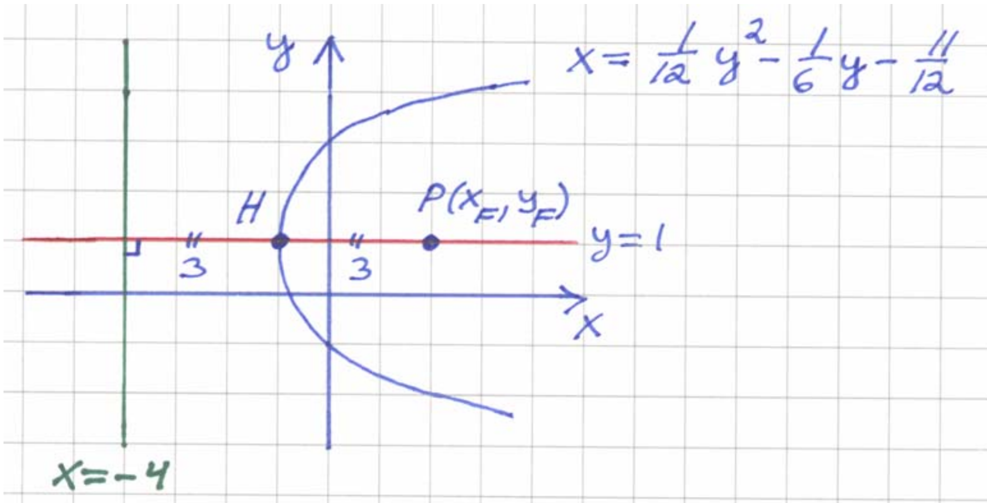
$x = ay^2 + by + c$ ja $a = \frac{1}{12} > 0$.

Paraabelin akseli on siten vaakasuora.
Paraabelin huippu:

$$y_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{1}{6}}{2 \cdot \frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1 \qquad \Bigg| \, x = \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{6}y - \frac{11}{12}$$

$$x_0 = \frac{1}{12} \cdot 1^2 - \frac{1}{6} \cdot 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} - \frac{2}{12} - \frac{11}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$

Huippu on $H = (-1, 1)$.
Paraabelin akseli on siis $y = 1$



Paraabelin polttopiste *P* ja huippu *H* ovat paraabelin akselilla $y = 1$, joten polttopisteen *y*-koordinaatti on $y_F = 1$.
Polttopiste $P = (x_F, 1)$.
Huipun etäisyys johtosuorasta $x = -4$ on 3. Koska paraabelin huippu $H = (-1, 1)$ on yhtä kaukana johtosuorasta $x = -4$ ja polttopisteestä $P = (x_F, 1)$, niin polttopisteen *x*-koordinaatti on $x_F = 2$. Siis polttopiste on $(2, 1)$.

Vastaus Polttopiste on $(2, 1)$.

862

Todistus.

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathrm{R})$$

Eliminoidaan parametri *t*.

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} x = 3t^2 \\ t = y + 1 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1).$$

$$x = 3(y+1)^2$$

$$x - 0 = 3(y+1)^2 \quad \Big| \; x - x_0 = a(y - y_0)^2, \; a \neq 0$$

Käyrä on siis oikealle aukeava paraabeli $(3 > 0)$, jonka huippu on $(0, -1)$. □

Vastaus Huippu on $(0, -1)$.

863

$$\left(x-y^2\right)\left(y-x^2\right)>0 \quad \left|\begin{array}{l}\text{Tulon merkkisääntö}\\ (+)\cdot(+)=(+)\\ (-)\cdot(-)=(+)\\ (-)\cdot(+)=(-)\end{array}\right.$$

$$\left(x-y^2>0 \text{ ja } y-x^2>0\right) \text{ tai } \left(x-y^2<0 \text{ ja } y-x^2<0\right)$$

$$\underbrace{\left(x>y^2 \text{ ja } y>x^2\right)}_{\text{I}} \quad \text{tai} \quad \underbrace{\left(x<y^2 \text{ ja } y<x^2\right)}_{\text{II}}$$

Paraabelien $x=y^2$ ja $y=x^2$ leikkauspisteet:

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\begin{cases}x=y^2\\ y=x^2\end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön (2).}$$

$$y=\left(y^2\right)^2$$

$$y=y^4$$

$$y-y^4=0$$

$$y\left(1-y^3\right)=0$$

$$y=0 \text{ tai } 1-y^3=0$$

$$y=0 \text{ tai } y^3=1$$

$$y=0 \text{ tai } y=\sqrt[3]{1}=1 \quad \Big| \; x=y^2$$

Kun $y=0$, niin $x=0^2=0$. Leikkauspiste $(0,0)$.

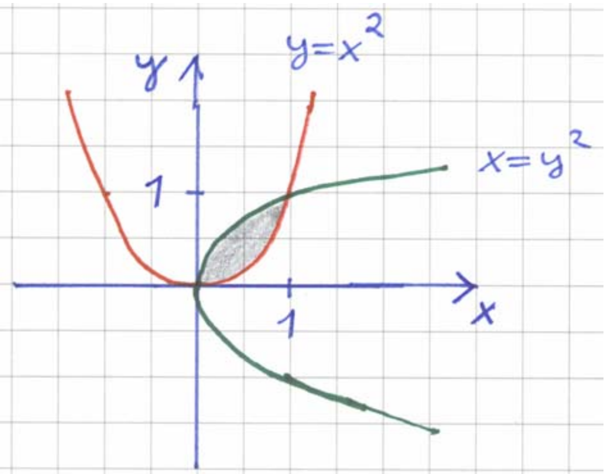
Kun $y=1$, niin $x=1^2=1$. Leikkauspiste $(1,1)$.

I

Epäyhtälön $x>y^2$ toteuttavat oikealle aukeavan paraabelin $x=y^2$ oikealla puolella olevat pisteet, sillä esimerkiksi testipiste $(1,0)$ toteuttaa epäyhtälön $x>y^2$.

Epäyhtälön $y>x^2$ toteuttavat ylöspäin aukeavan paraabelin $y=x^2$ yläpuolella olevat pisteet, sillä esimerkiksi testipiste $(1,0)$ ei toteuta epäyhtälöä $y>x^2$.

Ehdon $x>y^2$ **ja** $y>x^2$ toteuttavat pisteet on esitetty seuraavassa kuvassa.



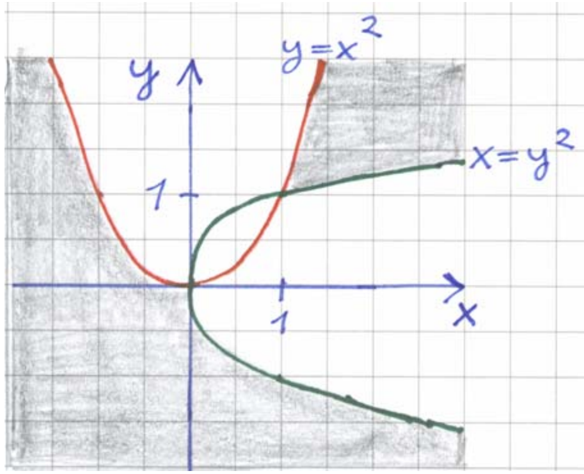
II

Epäyhtälön $x<y^2$ toteuttavat oikealle aukeavan paraabelin $x=y^2$ vasemmalla puolella olevat pisteet, sillä esimerkiksi testipiste $(1,0)$ ei toteuta epäyhtälöä $x<y^2$.

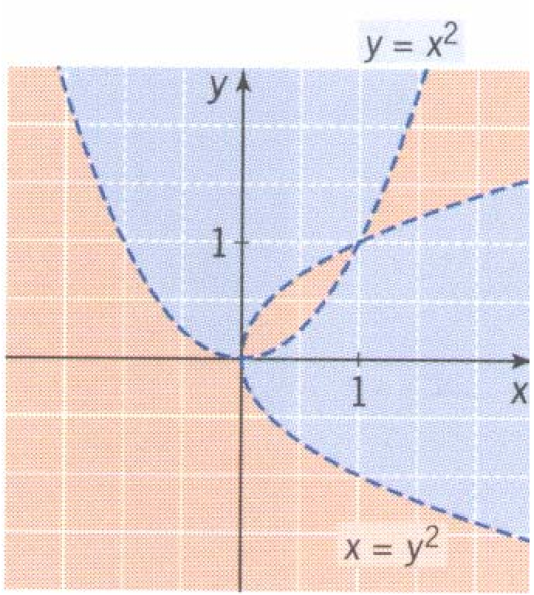
Epäyhtälön $y<x^2$ toteuttavat ylöspäin aukeavan paraabelin $y=x^2$ alapuolella olevat pisteet, sillä esimerkiksi testipiste $(1,0)$

toteuttaa epäyhtälön $y < x^2$.

Ehdon $x < y^2$ **ja** $y < x^2$ toteuttavat pisteet on esitetty seuraavassa kuvassa.



Ehdon I **tai** II toteuttavat pisteet on esitetty seuraavassa kuvassa.



864

Paraabeli $x = y^2 - 1$ aukeaa oikealle, koska se on muotoa $x = ay^2 + by + c,\ a > 0$.

Paraabelin huippu:

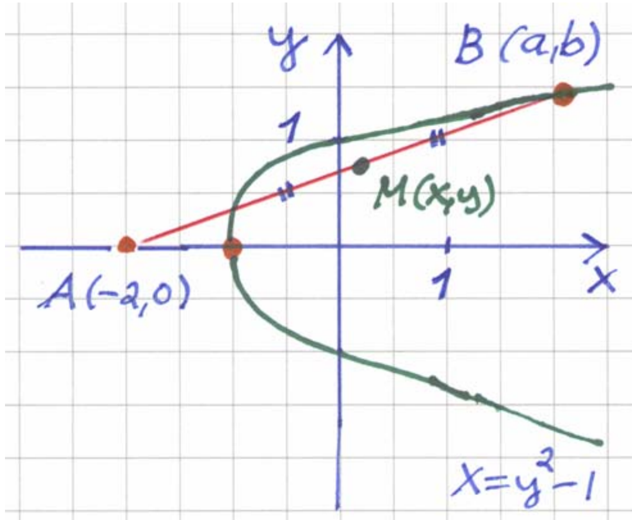
$$y_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2\cdot 1} = 0 \qquad \Big|\, x = y^2 - 1$$

$$x_0 = 0^2 - 1 = -1$$

Huippu on $(-1,0)$.

Olkoon (a,b) paraabelin $x = y^2 - 1$ piste.

Tällöin $a = b^2 - 1$.



Janan *AB* keskipisteen (x, y) koordinaatit ovat

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+a}{2} & \Big| \, a = b^2 - 1 \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0+b}{2} = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{b^2 - 3}{2} \\ y = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

Ratkaistaan keskipisteiden muodostaman käyrän yhtälö eliminoimalla parametri $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{b^2 - 3}{2} & \Big| \cdot 2 \\ y = \dfrac{b}{2} & \Big| \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} 2x = b^2 - 3 \\ 2y = b & \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (1). \end{cases}$$

$$2x = (2y)^2 - 3$$

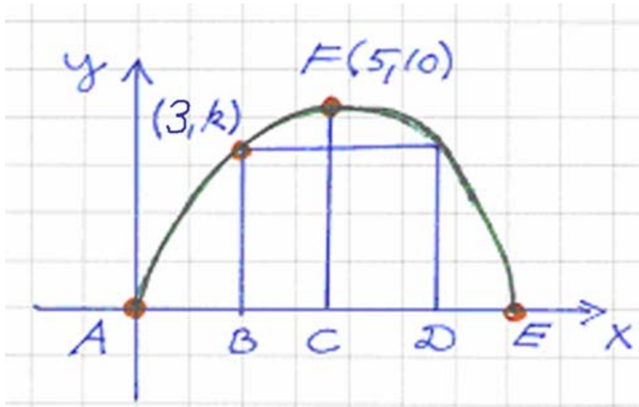
$$2x = 4y^2 - 3 \qquad \Big| :2$$

$$x = 2y^2 - \frac{3}{2}$$

Keskipisteet muodostavat oikealle aukeavan paraabelin $x = 2y^2 - \dfrac{3}{2}$.

865

Asetetaan koordinaatisto oheisen kuvan mukaisesti ja käytetään yksikkönä metriä.



Paraabelin kaaren *AF* yhtälö:

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2, \; a > 0 \qquad \Big| (x_0, y_0) = (0,0)$$

$$x - 0 = a(y - 0)^2$$

$$x = a\,y^2, \; a > 0$$

Piste $(5,10)$ on paraabelilla *AF*, joten

$$5 = a \cdot 10^2$$

$$a = \frac{1}{20} \qquad \Big| \, a > 0$$

kelpaa

Paraabelin kaaren yhtälö on siten $x = \frac{1}{20}y^2$.

Junan suurin korkeus saadaan, kun sijoitetaan paraabelin kaaren yhtälöön piste $(3, k)$:

$$3 = \frac{1}{20} \cdot k^2$$
$$k^2 = 60$$
$$k = _{(}\pm_{)}\sqrt{60} = 7{,}745... \text{ (m)}$$

Vastaus 7,7 m