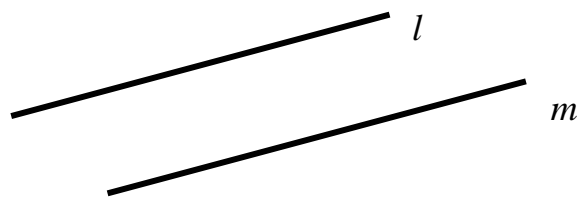


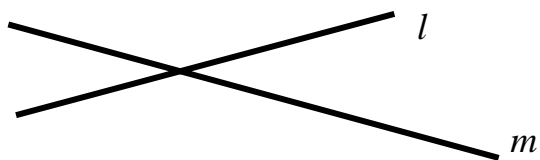
### 201

Saadaan tapaukset

1) Tason suorat  $l$  ja  $m$  voivat olla yhdensuuntaiset, mutta eri suorat, jolloin niillä ei ole yhteisiä pisteitä.



2) Suorat  $l$  ja  $m$  voivat olla erisuuntaiset, jolloin niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste.



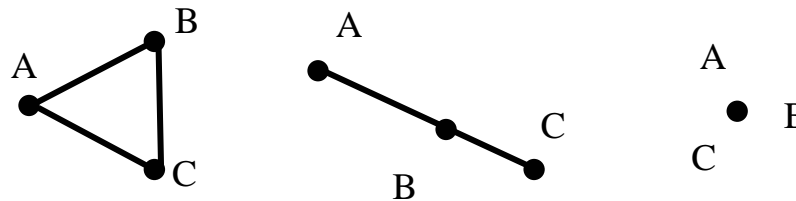
3) Suorat  $l$  ja  $m$  voivat olla samat, jolloin niillä on äärettömän monta yhteistä pistettä.



Vastaus Yhteisiä pisteitä on 0, 1 tai äärettömän monta.

### 202

a)

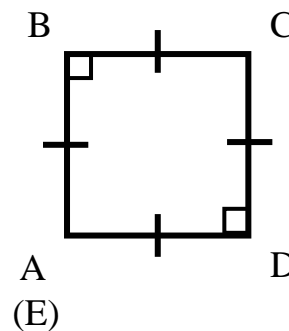


Jos pisteet eivät ole samalla suoralla, muodostuu kolmio.

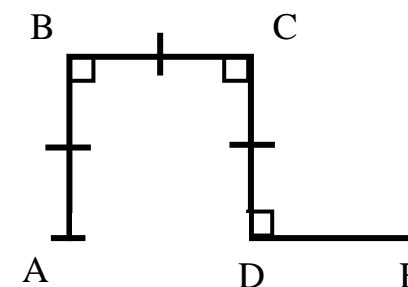
Jos pisteet ovat samalla suoralla mutta eivät yhdy, muodostuu jana.

Jos pisteet yhtyvät, muodostuu vain yksi piste.

b)



Muodostuu neliö

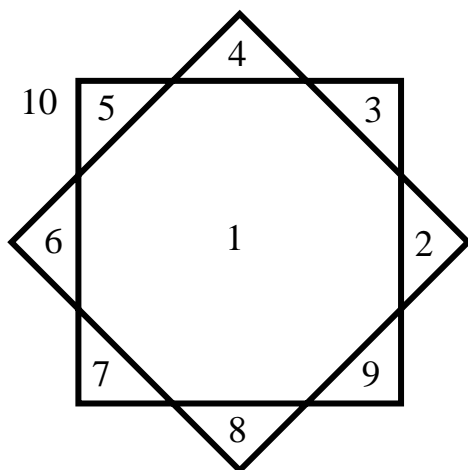


Muodostuu murtoviiva

Vastaus a) Kolmio, jana tai piste  
b) Neliö tai murtoviiva

203

Asetetaan neliöt tasoon niin, että niiden keskipisteet yhtyvät ja eräiden sivujen välille muodostuu  $45^\circ$  kulma.



Tason eri osia ovat neliöiden yhteinen keskusta, kärkiä vastaavat kolmiot (8 kpl) ja ulkopuoli, yhteensä 10 osaa.

204

a) **Tapa 1**

Janan jakosuhteen perusteella saadaan verranto

$$\frac{AP}{PB} = \frac{5}{11}$$



$$11AP = 5PB \quad | PB = AB - AP$$

$$11AP = 5(AB - 5AP)$$

$$11AP = 5AB - 5AP$$

$$16AP = 5AB$$

$$AP = \frac{5}{16} AB \quad | AB = 32$$

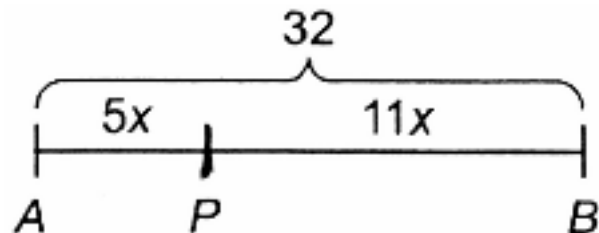
$$AP = \frac{5}{16} \cdot 32 = \frac{5 \cdot 32}{16} = 10$$

Huomautus Janan  $AP$  pituus saadaan myös suoran jakosuhteesta 5:11.

$$AP = \frac{5}{5+11} AB = \frac{5}{16} AB = \frac{5}{16} \cdot 32 = 10$$

### Tapa 2

Jakosuhteen 5:11 perusteella on  $AP = 5x$  ja  $PB = 11x$ .



Saadaan yhtälö

$$5x + 11x = 32$$

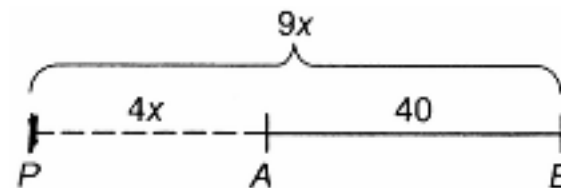
$$16x = 32$$

$$x = 2$$

$$\text{Siis } AP = 5x = 5 \cdot 2 = 10$$

### b) Tapa 1

Jakosuhteen 4:9 perusteella on  $AP = 4x$  ja  $PB = 9x$ , joten piste  $P$  on lähempänä pistettä  $A$  kuin pistettä  $B$  ja sijaitsee siten pisteen  $A$  puoleisella janan jatkeella.



Saadaan yhtälö

$$9x = 4x + 40$$

$$5x = 40$$

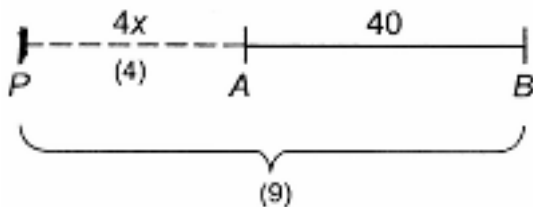
$$x = 8$$

$$\text{Siis } AP = 4x = 4 \cdot 8 = 32$$

## Tapa 2

Janan jakosuhteen perusteella saadaan verranto

$$\frac{AP}{PB} = \frac{4}{9}$$



$$9AP = 4PB \quad | PB = AP + AB$$

$$9AP = 4(AP + AB)$$

$$9AP = 4AP + 4AB$$

$$5AP = 4AB$$

$$AP = \frac{4}{5} AB \quad | AB = 40$$

$$AP = \frac{4}{5} \cdot 40 = 32$$

- Vastaus a) Janan  $AP$  pituus on 10  
 b) Janan  $AP$  pituus on 32

## 205

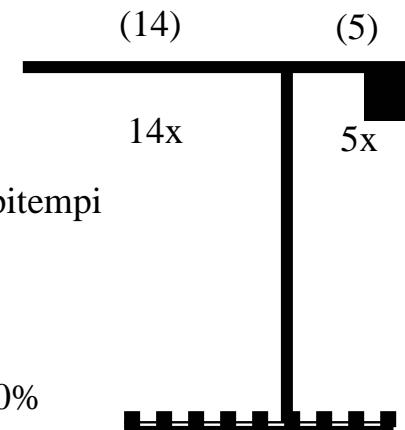
Jakosuhteen 14:5 perusteella puomien pituudet ovat  $5x$  ja  $14x$ .

Nostopuomin ja vastapainopuomin pituuksien erotus on

$$14x - 5x = 9x$$

Nostopuomi on vastapainopuomia pitempi prosentteina

$$\frac{9x}{5x} \cdot 100\% = \frac{900}{5}\% = 180\%$$



Vastaus Nostopuomi on 180% pitempi kuin vastapainopuomi.

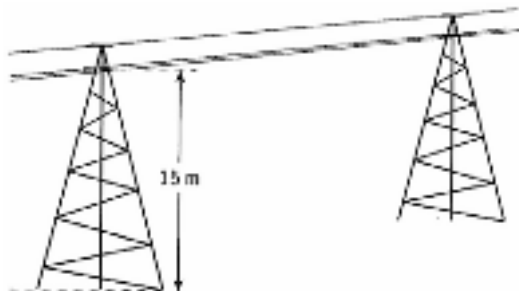
206

Jakosuhteen 3:40 perusteella johtojen kiinnityskohtien korkeudet ovat  $40x$  ja  $43x$ .

$$h_{\text{yläjohtot}} = 43x$$

$$h_{\text{alajohtot}} = 40x$$

$$h_{\text{helikopteri}} = 18 \text{ m}$$



Saadaan yhtälö

$$40x = 15$$

$$x = \frac{3}{8} \text{ (m)}$$

Siis

$$h_{\text{yläjohtot}} = 43 \cdot \frac{3}{8} \text{ m} = 16,125 \text{ m} (< 18 \text{ m})$$

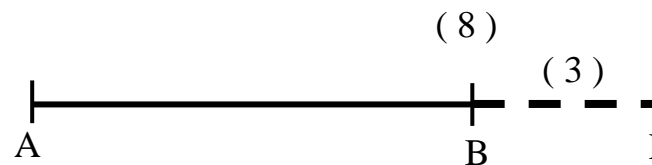
Koska helikopteri lentää yläjohtoja korkeammalla, se ei törmää johtoihin.

Vastaus Ei törmää.

207

**Tapa1**

Janan jakosuhteen perusteella saadaan verranto



$$\frac{AP}{PB} = \frac{8}{3}$$

$$3AP = 8PB \quad |BP = AP - AB$$

$$3AP = 8(AP - AB)$$

$$3AP = 8AP - 8AB$$

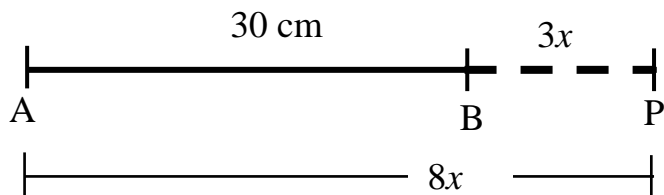
$$5AP = 8AB$$

$$AP = \frac{8}{5} AB \quad |AB = 30 \text{ cm}$$

$$AP = \frac{8}{5} \cdot 30 = 48 \text{ (cm)}$$

**Tapa 2**

Jakosuhteen 8 : 3 perusteella on  $AP = 8x$  ja  $PB = 3x$ .



Saadaan yhtälö

$$30 + 3x = 8x$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

Siis  $AP = 8x = 8 \cdot 6 = 48$  (cm).

Vastaus: Janan  $AP$  pituus on 48 cm.

**208**

$$AC = \frac{5}{3}AB, \text{ joten } \frac{AC}{AB} = \frac{5}{3}$$



Merkitään  $AB = 3x$  ja  $AC = 5x$ .

$$\text{Tällöin } AD = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6} \cdot 3x = \frac{1}{2}x.$$

a) Piste  $B$  jakaa janan  $AC$  suhteessa  $\frac{AB}{BC}$ .

$BC = AC - AB$ , joten saadaan suhde

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AC - AB} = \frac{3x}{5x - 3x} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

b) Pisteet  $D$  ja  $B$  jakavat janan  $AC$  kolmeen osaan, joten lasketaan suhde  $AD:DB:BC$ .

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AD}{AB - AD} = \frac{\frac{1}{2}x}{3x - \frac{1}{2}x} = \frac{\frac{1}{2}x}{2\frac{1}{2}x} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{DB}{BC} = \frac{2\frac{1}{2}x}{2x} = \frac{5}{4}$$

Siis  $AD:DB:BC = 1:5:4$ .

Vastaus: a) Piste  $B$  jakaa janan  $AC$  suhteessa 3 :2

b)  $AD:DB:BC = 1:5:4$

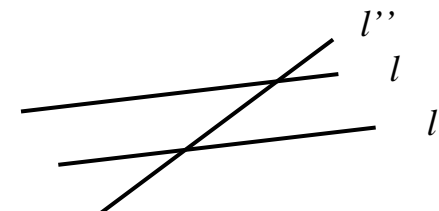
## 209

Tarkastellaan ensin kohtaa b. Olkoot tehtävän suorat  $l$ ,  $l'$  ja  $l''$  ( $l \neq l' \neq l''$ ). Tehtävä jakautuu seuraaviin tapauksiin:

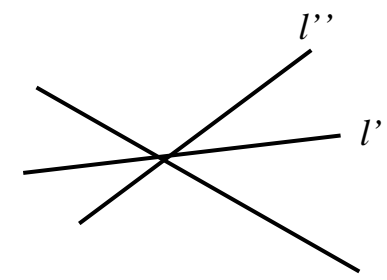
- 1) Suorat ovat yhdensuuntaiset. Tällöin taso jakautuu neljään osaan.



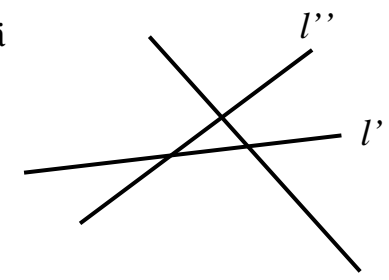
- 2) Suorista kaksi, esim.  $l$  ja  $l'$  ovat yhdensuuntaiset, mutta  $l''$  erisuuntainen. Taso jakautuu kuuteen osaan.



- 3) Suorat ovat kaikki keskenään erisuuntaisia, mutta niillä on yksi yhteinen leikkauspiste. Osia on kuusi.

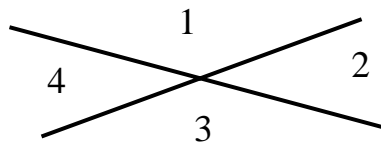


- 4) Suorat ovat kaikki keskenään erisuuntaisia eikä niillä ole yhteistä leikkauspistettä. Osia on seitsemän.

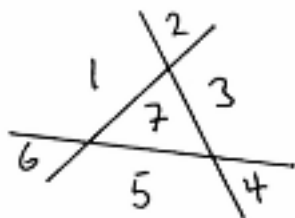


Vastaavalla tavalla voidaan päätellä, että suurin määrä tason osia saadaan aina tilanteessa, jolloin suorat ovat keskenään erisuuntaisia eikä niillä ole yhteistä leikkauspistettä. Piirretään tilanteista mallikuvat ja päätellään tason osien määrä niiden avulla.

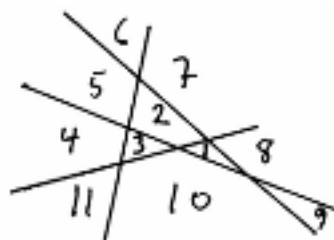
a) neljään osaan



b) seitsemään osaan



c) 11 osaan



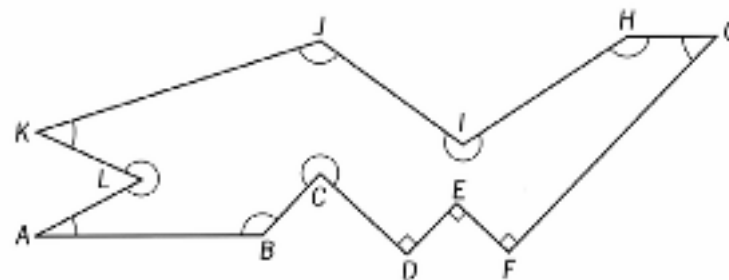
d) Yksi suora jakaa tason kahteen osaan. Kun toinen suora lisätään, tulee kaksi osaa lisää. Kun kolmas suora lisätään, tulee kolme osaa lisää. Kun lisätään  $n$  suoraa, tulee  $n$  osaa lisää.

Yhteensä osia on

$$\begin{aligned} & 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n \\ &= 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n) \\ &= 1 + n \cdot \frac{1+n}{2} = \frac{2}{2} + \frac{n+n^2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2}{2} \end{aligned}$$

Vastaus a) 4    b) 7    c) 11    d)  $\frac{n^2 + n + 2}{2}$

210



a) Teräviä kulmia ovat ne, joiden suuruus on  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .  
Siis kulmat  $A$ ,  $G$  ja  $K$  ovat teräviä.

b) Tylppiä kulmia ovat ne, joiden suuruus on  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .  
Siis kulmat  $B$ ,  $H$  ja  $J$  ovat tylppiä.

c) Kuperia kulmia ovat ne, joiden suuruus on  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ .  
Siis kulmat  $C$ ,  $E$ ,  $I$  ja  $L$  ovat kuperia.

d) Koveria kulmia ovat ne, joiden suuruus on  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ .  
Siis kulmat  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $J$  ja  $K$  ovat koveria.



## 211

$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	terävä kulma	suora kulma	tylppä kulma	oiko-kulma	kovera kulma	kupera kulma
$32^\circ$	$11^\circ$	$43^\circ$	<b>X</b>				<b>X</b>	
$57^\circ$	$33^\circ$	$90^\circ$		<b>X</b>			<b>X</b>	
$112^\circ$	$69^\circ$	$181^\circ$						<b>X</b>
$37^\circ$	$98^\circ$	$135^\circ$			<b>X</b>		<b>X</b>	
$254^\circ$	$106^\circ$	$360^\circ$						
$93^\circ$	$87^\circ$	$180^\circ$				<b>X</b>		

## 212

Merkitään kysyttyä kulmaa kirjaimella  $\alpha$ .

a) Komplementtikulmien summa on  $90^\circ$ , joten saadaan yhtälö

$$36,4^\circ + \alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - 36,4^\circ$$

$$\alpha = 53,6^\circ$$

b) Supplementtikulmien summa on  $180^\circ$ , joten saadaan yhtälö

$$36,4^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 36,4^\circ$$

$$\alpha = 143,6^\circ$$

c) Eksplementtikulmien summa on  $360^\circ$ , joten saadaan yhtälö

$$36,4^\circ + \alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 36,4^\circ$$

$$\alpha = 323,6^\circ$$

Vastaus a)  $53,6^\circ$       b)  $143,6^\circ$       c)  $323,6^\circ$

**213**

a)

$$\begin{aligned} 3^\circ &= 3 \cdot 60' = 180' \\ &= 180 \cdot 60'' = 10800'' \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 7,2^\circ &= 7,2 \cdot 60' = 432' \\ &= 432 \cdot 60'' = 25\,920'' \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 13^\circ 42' &= 13^\circ + \left(\frac{42}{60}\right)^\circ \\ &= 13^\circ + 0,7^\circ \\ &= 13,7^\circ \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 427' &= \left(\frac{427}{60}\right)^\circ = \left(7\frac{7}{60}\right)^\circ \\ &= 7^\circ + \left(\frac{7}{60}\right)^\circ \\ &= 7^\circ 7' \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 2^\circ 20' 15'' &= 2 \cdot 60 \cdot 60'' + 20 \cdot 60'' + 15'' \\ &= 7200'' + 1200'' + 15'' = 8415'' \\ &= \left(\frac{8415}{60}\right)' = 140,25' \\ &= \left(\frac{140,25}{60}\right)^\circ = 2,3375^\circ \end{aligned}$$

f)

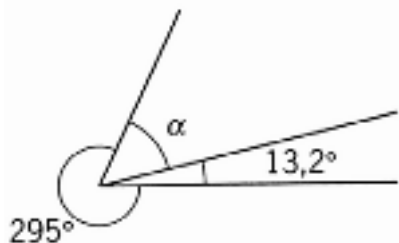
$$\begin{aligned} 5362'' &= \left(\frac{5362}{60}\right)' = \left(89\frac{22}{60}\right)' = 89' + \left(\frac{22}{60}\right)' \\ &= \left(\frac{89}{60}\right)^\circ + 22'' = \left(1\frac{29}{60}\right)^\circ + 22'' \\ &= 1^\circ + \left(\frac{29}{60}\right)^\circ + 22'' = 1^\circ + 29' + 22'' \\ &= 1^\circ 29' 22'' \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} 19,52^\circ &= 19^\circ + 0,52^\circ = 19^\circ + 0,52 \cdot 60' \\ &= 19^\circ + 31,2' = 19^\circ + 31' + 0,2' \\ &= 19^\circ + 31' + 0,2 \cdot 60'' = 19^\circ + 31' + 12'' \\ &= 19^\circ 31' 12'' \end{aligned}$$

214

a)



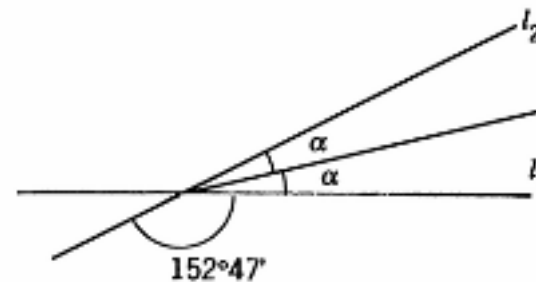
Kulmat muodostavat täyskulman, joten saadaan yhtälö

$$\alpha + 13,2^\circ + 295^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 295^\circ - 13,2^\circ$$

$$\alpha = 51,8^\circ$$

b)



Kulmat muodostavat oikokulman, joten saadaan yhtälö

$$\alpha + \alpha + 152^\circ 47' = 180^\circ$$

$$2\alpha = 180^\circ - 152^\circ 47'$$

$$2\alpha = 27^\circ 13'$$

$$\alpha = 13,5^\circ + 6,5'$$

$$\alpha = 13^\circ + 30' + 6' + 30''$$

$$\alpha = 13^\circ 36' 30''$$

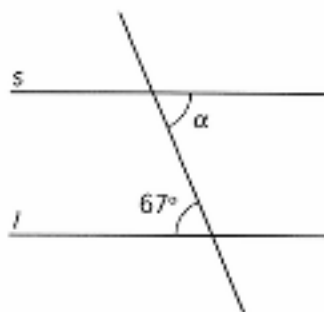
Vastaus a)  $\alpha = 51,8^\circ$

b)  $\alpha = 13^\circ 36' 30''$

215

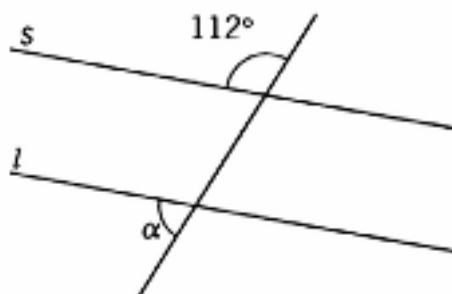
Suorat  $l$  ja  $s$  ovat yhdensuuntaiset, kun samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

a)



Oltava  $\alpha = 67^\circ$ , sillä  $67^\circ$  kulma on samankohtainen kulman  $\alpha$  kanssa.

b)



Kulman  $\alpha$  kanssa samankohtainen kulma on kulman  $112^\circ$  vieruskulma. Siis on oltava

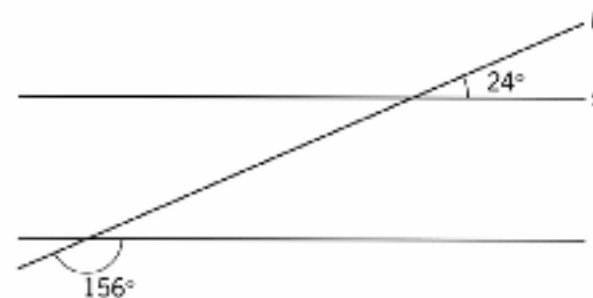
$$\alpha = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$$

Vastaus a)  $\alpha = 67^\circ$  b)  $\alpha = 68^\circ$

216

Suorat  $l$  ja  $s$  ovat yhdensuuntaiset, jos samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

a)



Kulman  $24^\circ$  kanssa samankohtainen kulma on kulman  $156^\circ$  vieruskulma  $180^\circ - 156^\circ = 24^\circ$ .  
Kulmat ovat yhtä suuret, joten  $l \parallel s$ .

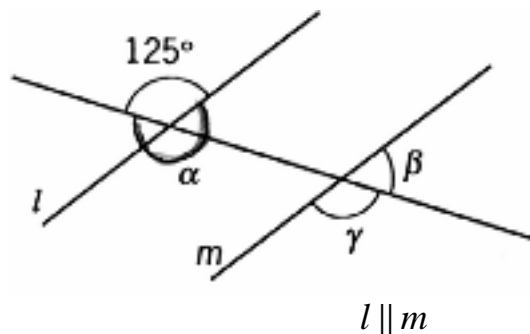
b) Kulman  $53^\circ$  kanssa samankohtainen kulma on kulman  $128^\circ$  vieruskulma  $180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$ .  
 $53^\circ \neq 52^\circ$ , joten  $l \not\parallel s$ .



Vastaus a) Ovat b) Eivät ole

217

a)



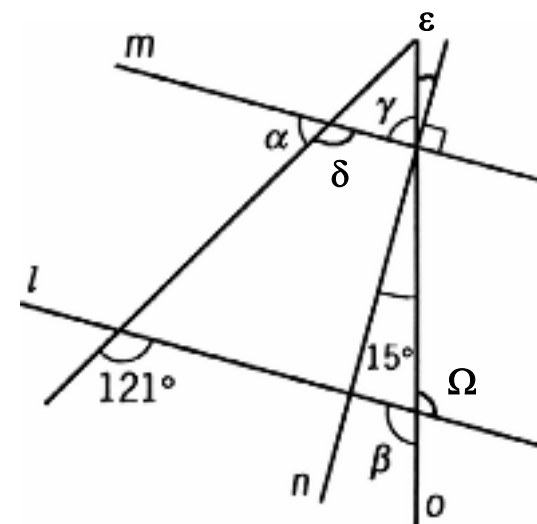
$$\alpha = 360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$$

$$\gamma = 125^\circ \quad \left| \text{samankohtaiset kulmat ja } m \parallel l \right.$$

$$\beta = 180^\circ - \gamma \quad \left| \text{vieruskulmat (oikokulma)} \right.$$

$$= 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

b)



$l \parallel m$

$$\delta = 121^\circ \quad \left| \text{samankohtaiset kulmat ja } m \parallel l \right.$$

$$\alpha = 180^\circ - \delta \quad \left| \text{vieruskulmat (oikokulma)} \right.$$

$$= 180^\circ - 121^\circ = 59^\circ$$

$$\varepsilon = 15^\circ \quad \left| \text{ristikulmat} \right.$$

$$\gamma = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ \quad \left| \text{komplementtikulmat } \gamma \text{ ja } \varepsilon \right.$$

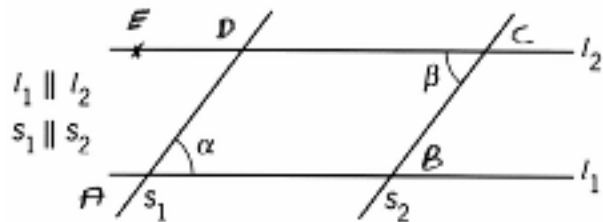
$$\Omega = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ \quad \left| \text{samankohtaiset kulmat ja } m \parallel l \right.$$

$$\beta = 105^\circ \quad \left| \text{ristikulmat} \right.$$

Vastaus a)  $\alpha = 235^\circ$ ,  $\beta = 55^\circ$  ja  $\gamma = 125^\circ$

b)  $\alpha = 59^\circ$ ,  $\beta = 105^\circ$  ja  $\gamma = 75^\circ$

218



Väite:  $\alpha = \beta$

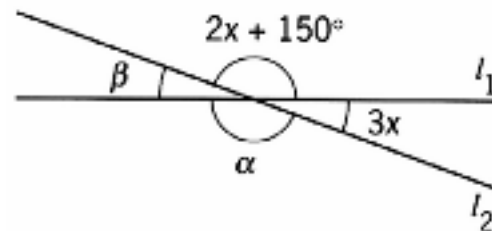
Todistus:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ADE = \alpha & \quad | \text{samankohtaiset kulmat ja } l_1 \parallel l_2 \\ \sphericalangle ADE = \beta & \quad | \text{samankohtaiset kulmat ja } s_1 \parallel s_2 \end{aligned}$$

Siis  $\alpha = \beta$   $\square$

219

a)



$$2x + 150^\circ + 3x = 180^\circ \quad | \text{vieruskulmat}$$

$$5x = 180^\circ - 150^\circ$$

$$5x = 30^\circ$$

$$x = 6^\circ$$

$$\beta = 3x \quad | \text{ristikulmat, } x = 6^\circ$$

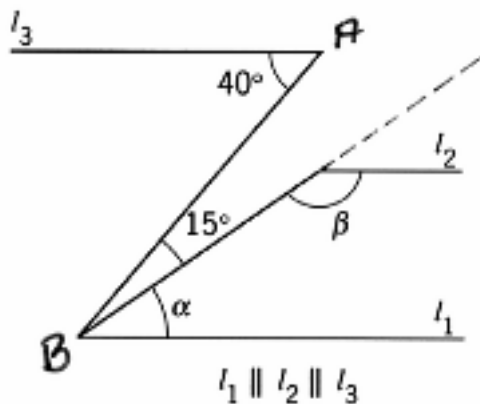
$$\beta = 3 \cdot 6^\circ = 18^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ \quad | \text{vieruskulmat, } \beta = 18^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 18^\circ$$

$$\alpha = 162^\circ$$

b)



$$\sphericalangle B = \sphericalangle A \quad | \text{ samankohtaiset kulmat ja } l_1 \parallel l_3$$

$$\alpha + 15^\circ = 40^\circ$$

$$\alpha = 40^\circ - 15^\circ = 25^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Kulman  $\alpha$  kanssa samankohtainen kulma on kulman  $\beta$  vieruskulma ja  $l_1 \parallel l_2$ .

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

$$= 180^\circ - 25^\circ$$

$$= 155^\circ$$

Vastaus a)  $\alpha = 162^\circ$  ja  $\beta = 18^\circ$

b)  $\alpha = 25^\circ$  ja  $\beta = 155^\circ$

220

a)

$$\begin{array}{r} 27^\circ 38' 28'' \\ + 12^\circ 21' 42'' \\ \hline 39^\circ 59' 70'' \end{array}$$

Muunnetaan saatu summa isommiksi yksiköiksi.

$$\begin{aligned} 39^\circ 59' 70'' &= 39^\circ + 59' + 60'' + 10'' & | \quad 60'' = 1' \\ &= 39^\circ + 60' + 10'' & | \quad 60' = 1^\circ \\ &= 40^\circ + 10'' = 40^\circ 10'' \end{aligned}$$

b)

Muunnetaan ensin kulmat sellaisiksi yksiköiksi, että on helpompi laskea allekkain.

$$76^\circ 14' 32'' = 76^\circ 13' 92'' = 75^\circ 73' 92''$$

$$\begin{array}{r} 75^\circ 73' 92'' \\ - 12^\circ 14' 45'' \\ \hline 63^\circ 59' 47'' \end{array}$$

Vastaus a)  $40^\circ 10''$  b)  $63^\circ 59' 47''$

**221**

Merkitään kysyttyä kulmaa kirjaimella  $x$ .

a) Komplementtikulmien summa on  $90^\circ$ , joten

$$x + 43^\circ = 90^\circ$$

$$x = 57^\circ$$

b) Suplementtikulmien summa on  $180^\circ$ , joten

$$x + 43^\circ = 180^\circ$$

$$x = 137^\circ$$

c) Saadaan a)-kohdan tuloksen avulla yhtälö

$$x + 57^\circ = 180^\circ$$

$$x = 123^\circ$$

d) Eksplementtikulmien summa on  $360^\circ$ , ja suplementtikulma on b)-kohdan tuloksen mukaan  $137^\circ$ . Saadaan yhtälö

$$x + 137^\circ = 360^\circ$$

$$x = 223^\circ$$

Vastaus a)  $57^\circ$  b)  $137^\circ$  c)  $123^\circ$  d)  $223^\circ$

**222**

Merkitään kulman  $\alpha$  komplementtikulmaa kirjaimella  $\beta$ .

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} (1) \alpha = \beta + 13^\circ \\ (2) \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{sijoitetaan yhtälöön (2)} \end{array} \right.$$

$$\beta + 13^\circ + \beta = 90^\circ$$

$$2\beta = 77^\circ$$

$$\beta = 38,5^\circ$$

$\left| \begin{array}{l} \text{sijoitetaan yhtälöön (1)} \end{array} \right.$

$$\alpha = 38,5^\circ + 13^\circ = 51,5^\circ$$

Kulman  $\alpha$  vieruskulma on

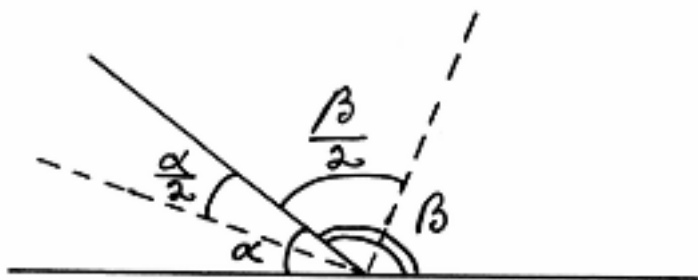
$$180^\circ - \alpha = 180^\circ - 51,5^\circ = 128,5^\circ$$

Vastaus Vieruskulma on  $128,5^\circ$



223

Piirretään kulma ja sen vieruskulma sekä niiden puolittajat. Merkitään kulmaa kirjaimella  $\alpha$  ja sen vieruskulmaa kirjaimella  $\beta$ .

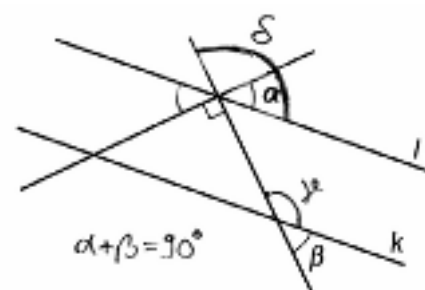


$$\alpha + \beta = 180^\circ \quad | :2$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ,$$

joten vieruskulmien puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

224



Merkitään samankohtaisia kulmia kirjaimilla  $\gamma$  ja  $\delta$ .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

| komplementtikulmat

$$\gamma = 180^\circ - \beta$$

| vieruskulmat

$$\delta = \alpha + 90^\circ$$

| ristikulmat,  $\alpha = 90^\circ - \beta$

$$= (90^\circ - \beta) + 90^\circ$$

$$= 180^\circ - \beta = \gamma$$

Koska  $\delta = \gamma$  ja ne ovat samankohtaiset kulmat, on oltava  $k \parallel l$ .

225

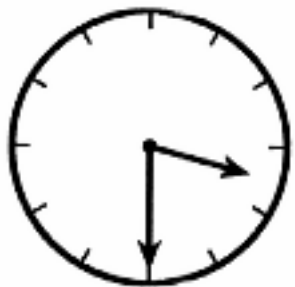
5 minuuttia on koko kellotaulusta 12. osa, joten minuutti viisari kulkee 5 minuutin aikana kulman  $\frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 30^\circ$ .

a) klo 19.00



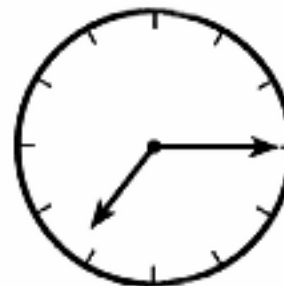
Osoittimien välinen pienempi kulma on 5 tällaista yksikköä, joten kulma on  $\frac{5}{12}$  koko kellotaulusta eli kulma on  $\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$ .

b) klo 03.30



Osoittimien välinen pienempi kulma on  $2,5 \cdot 30^\circ = 75^\circ$ , sillä tuntiviisari on kellotaulun numeroiden 3 ja 4 välissä.

c) klo 07.15



Osoittimien välinen pienempi kulma on  $4\frac{1}{4} \cdot 30^\circ = 127,5^\circ$ .

Tuntiviisari on siirtynyt  $\frac{1}{4}$  välin verran kellotaulun numerosta 7 kohti numeroa 8, sillä minuutteja on kulunut  $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$  koko tunnista.

Vastaus a)  $150^\circ$       b)  $75^\circ$       c)  $127,5^\circ$

226

Minuuttiviisarin nopeus on  $\frac{360^\circ}{60 \text{ min}} = 6^\circ / \text{min}$

Tuntiviisarin nopeus on  $\frac{360^\circ}{12 \cdot 60 \text{ min}} = 0,5^\circ / \text{min}$

Viisarit ovat oikokulmassa seuraavan kerran klo 7 jälkeen.

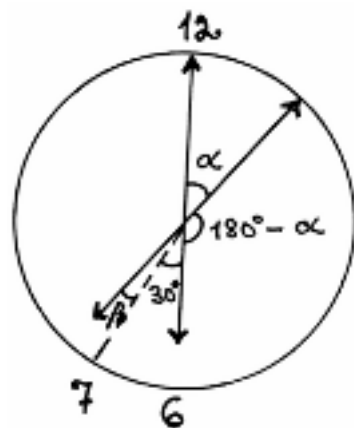
Olkoon viisarit oikokulmassa  $x$  minuuttia klo 7 jälkeen.

Minuuttiviisari on kiertynyt kulman  $\alpha = 6^\circ \cdot x$

Tuntiviisari on kiertynyt kulman  $\beta = 0,5^\circ \cdot x$

Saadaan yhtälö

$$\beta + 30^\circ = \alpha \quad \left| \begin{array}{l} \text{ristikulmat ja} \\ \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ \end{array} \right.$$



$$0,5^\circ \cdot x + 30^\circ = 6^\circ \cdot x$$

$$-5,5^\circ \cdot x = -30^\circ$$

$$x = \frac{-30^\circ}{-5,5^\circ} = 5,45 \text{ (min)}$$

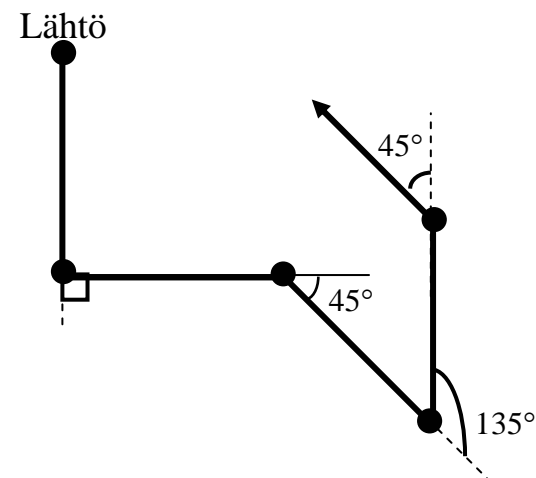
$$0,45 \text{ min} = 0,45 \cdot 60 \text{ s} = 27,27 \text{ s}$$

$$5,45 \text{ min} \approx 5 \text{ min } 27 \text{ s}$$

Vastaus klo 7.05.27

227

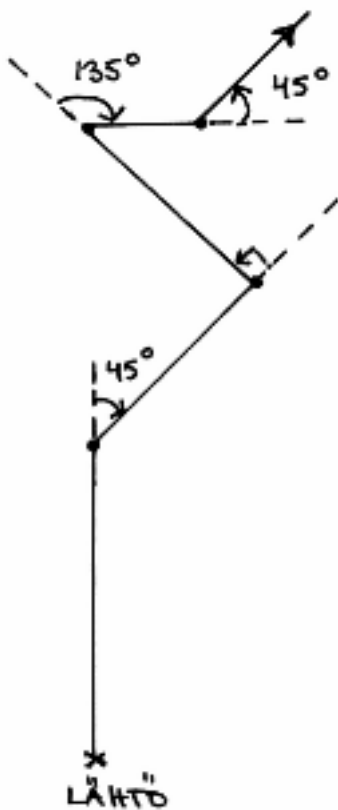
Piirretään tilanteesta kuva.



Vastaus Luoteeseen

228

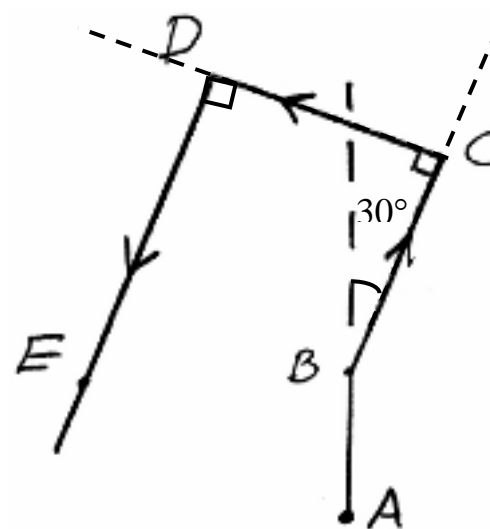
Piirretään tilanteesta kuva



Vastaus Koilliseen

229

Piirretään tilanteesta kuva



Olkoon  $A$  lähtöpiste,  $B$  piste, jossa Juha ensimmäisen kerran kääntyy,  $C$  seuraava piste ja  $D$  viimeinen kääntymispiste. Olkoon  $E$  mielivaltainen piste reitillä viimeisen kääntymisen jälkeen.

$BC \parallel DE$ , sillä  $\sphericalangle BCD = 90^\circ$  ja  $\sphericalangle CDE = 90^\circ$ .

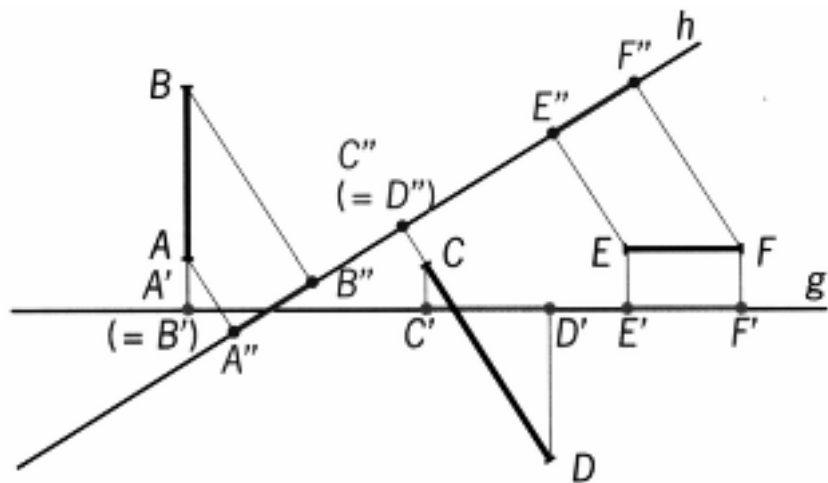
Piste  $A$  jää suoran  $BC$  oikealle puolelle, pisteestä  $D$  alkava puolisuora  $DE$  taas vasemmalle.

Siis Juha ei löydä perille tällä tavalla.

Vastaus Juha ei löydä perille

230

Piirretään suorille  $g$  ja  $h$  janojen päätepisteiden kautta normaalit.



Janan  $AB$  projektiot ovat piste  $A'$  ( $=B'$ ) ja jana  $A''B''$ .

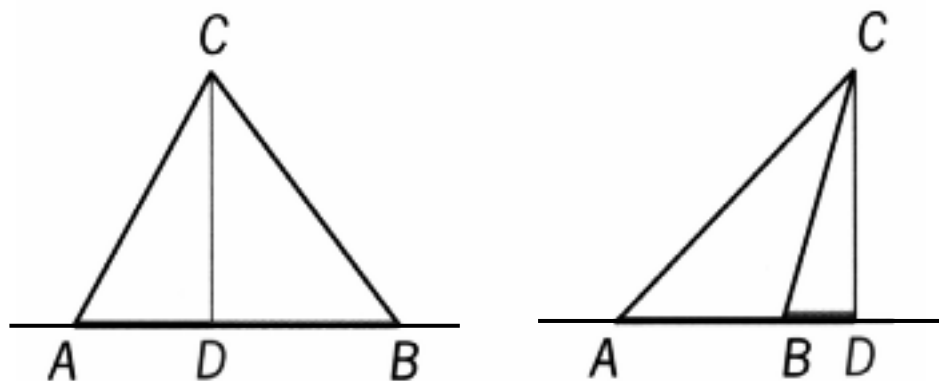
Janan  $CD$  projektiot ovat jana  $C'D'$  ja piste  $C''(=D'')$ .

Janan  $EF$  projektiot ovat jana  $E'F'$  ja jana  $E''F''$ .

231

Piirretään sivulle  $AB$  tai sen jatkeelle pisteen  $C$  kautta normaali.

Normaali leikkaa sivun  $AB$  tai sen jatkeen pisteessä  $D$ .

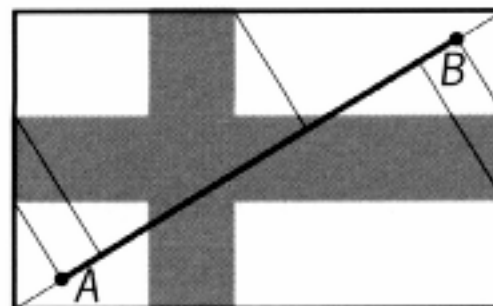


Sivun  $AC$  projektio suoralla  $AB$  on  $AD$ .

Sivun  $BC$  projektio suoralla  $AB$  on  $DB$ .

232

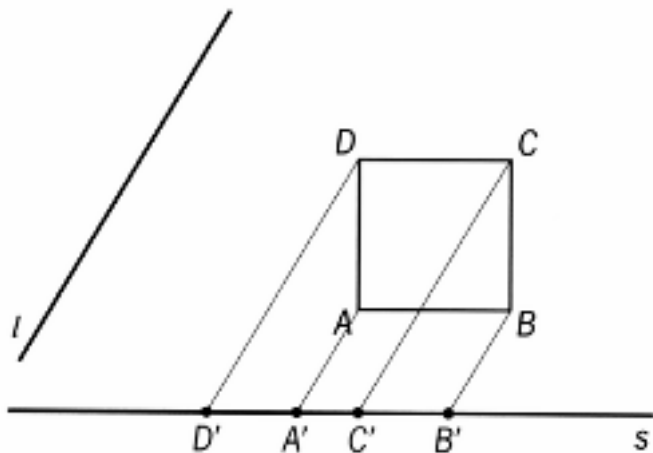
Piirretään rististä normaaleja lipun lävistäjälle.



Projektio on jana  $AB$ .

233

Piirretään suoran  $l$  suuntaiset suorat neliön  $ABCD$  kärjistä siten, että ne leikkaavat suoran  $s$ . Merkitään näitä projektiopisteitä vastaavasti  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , ja  $D'$

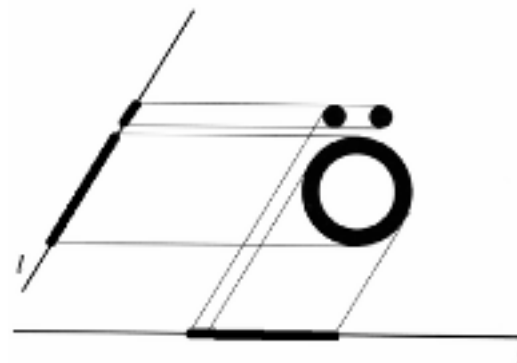


Projektiopisteet ovat suoralla  $s$  järjestyksessä  $D'$ ,  $A'$ ,  $C'$  ja  $B'$ .

234

a) Piirretään suoran  $s$  suuntaisia suoria  $ö$ -kirjaimen ääripisteistä siten, että ne leikkaavat suoraa  $l$ .

Projektiio on kaksi janaa, jotka on kuvassa lihavoitu.



b) Piirretään suoran  $l$  suuntaisia suoria  $ö$ -kirjaimen ääripisteistä siten, että ne leikkaavat suoraa  $s$ .

Projektiio on jana, joka on kuvassa lihavoitu.