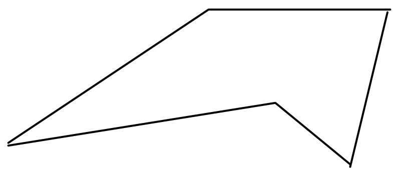
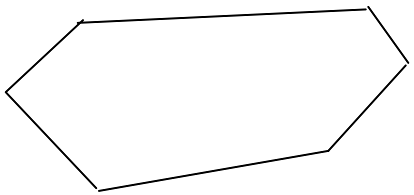
**301**

a) Ainakin yksi kulma yli $180^\circ$.



kovera viisikulmio

b) Kaikki kulmat ovat alle $180^\circ$.



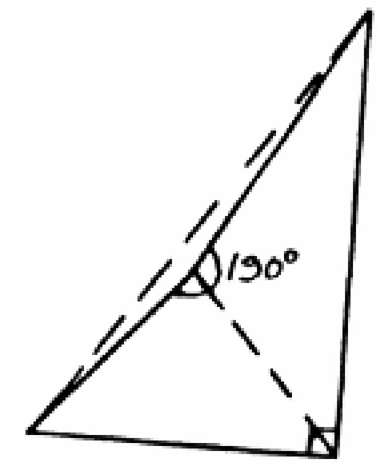
kupera kuusikulmio

**302**

Nelikulmion kulmien summa on $(4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ$.

a) $90^\circ + 190^\circ = 280^\circ < 360^\circ$, joten nelikulmio on olemassa.

Hahmotellaan kuvaaja, johon lävistäjät on piirretty katkoviivalla.

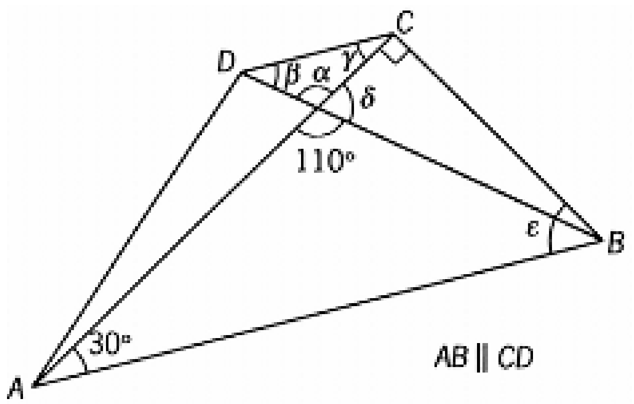



b) $155^\circ + 205^\circ = 360^\circ$, joten ei ole olemassa nelikulmiota, jossa olisi $155^\circ$ ja $205^\circ$ kulmat.

Vastaus a) on b) ei ole

**303**

a)




$\alpha = 110^\circ$ | ristikulmat

$\delta = 180^\circ - \alpha$ | vieruskulmat

$\delta = 180^\circ - 110^\circ$

$\delta = 70^\circ$

$\gamma = 30^\circ$ | samankohtaiset kulmat ja $AB \parallel CD$

$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$ | kolmion kulmien summa

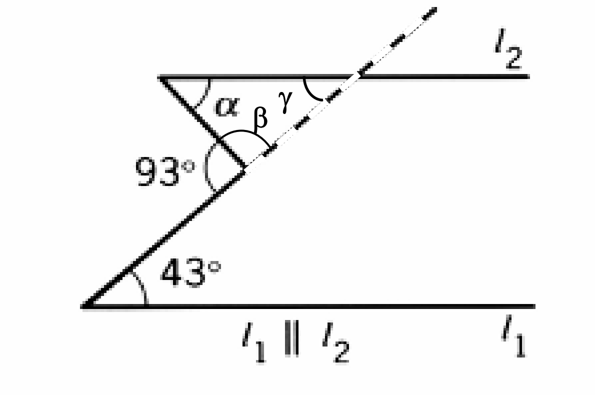
$\beta = 180^\circ - 110^\circ - 30^\circ$

$\beta = 40^\circ$

$\varepsilon = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ$ | kolmion kulmien summa

$\varepsilon = 60^\circ$

b)




$\beta = 180^\circ - 93^\circ = 87^\circ$ | oikokulma

$\gamma = 43^\circ$ | samankohtaiset kulmat ja $l_1 \parallel l_2$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ | kolmion kulmien summa

$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$

$\alpha = 180^\circ - 87^\circ - 43^\circ$

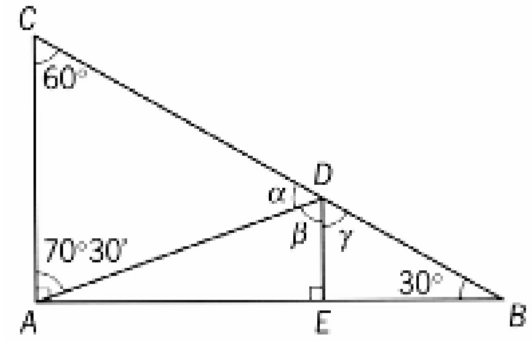
$\alpha = 50^\circ$

Vastaus a) $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\delta = 70^\circ$ ja $\varepsilon = 60^\circ$

b) $\alpha = 50^\circ$

**304**

$CA \parallel DE$




$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ$ | suorakulmainen kolmio $EBD$

$\gamma = 60^\circ$

Toisin

$\gamma = 60^\circ$ | samankohtaiset kulmat ja $CA \parallel DE$

$\beta = 70^\circ\ 30'$ | samankohtaiset kulmat ja $CA \parallel DE$

$= 70^\circ + \left(\frac{30}{60}\right)^\circ$

$= 70,5^\circ$

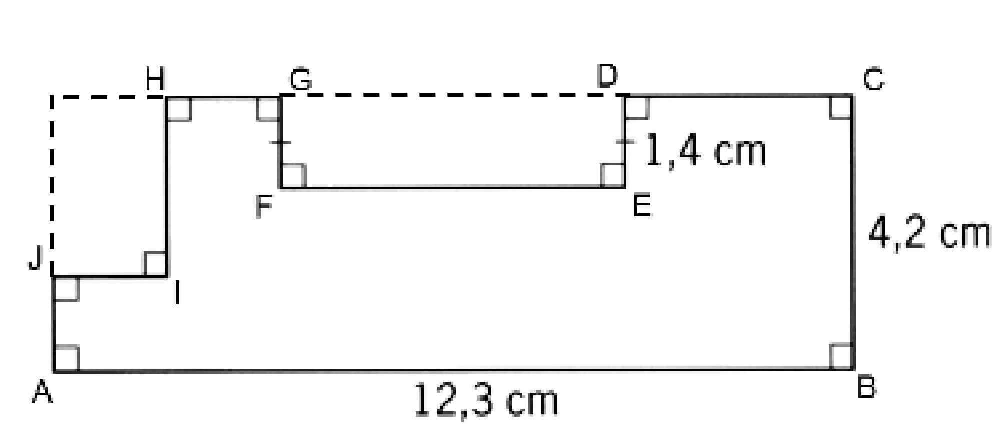
$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$ | oikokulma eli $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$= 180^\circ - 70,5^\circ - 60^\circ$

$= 49,5^\circ$

Vastaus $\alpha = 49,5^\circ,\ \beta = 70,5^\circ,\ \gamma = 60^\circ$

**305**




$AJ + IH = BC = 4,2$ cm

$JI + HG + FE + DC = AB = 12,3$ cm

$FG = ED = 1,4$ cm

Monikulmion $ABCDEFGHIJ$ piiri on

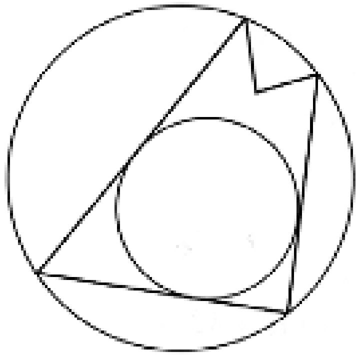
$$p = 2 \cdot 12,3 \text{ cm} + 2 \cdot 4,2 \text{ cm} + 2 \cdot 1,4 \text{ cm} = 35,8 \text{ cm}$$

Vastaus 35,8 cm

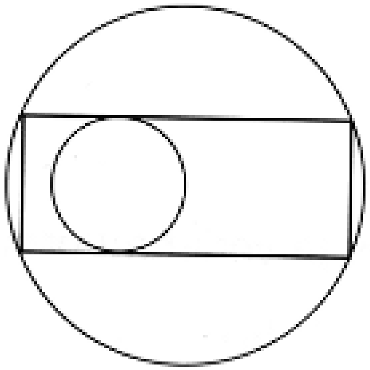
**306**

Esimerkiksi

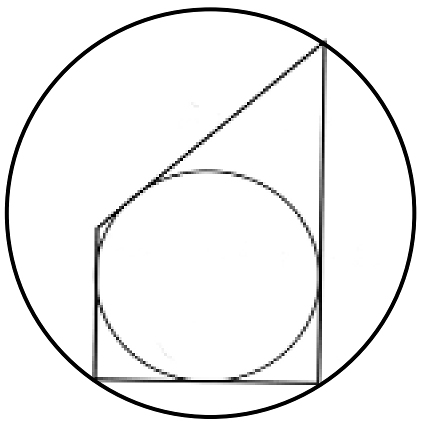
a)



b)



c)



**307**

a) $745\,600\,000 \text{ mm} = \dfrac{745\,600\,000}{1\,000\,000} \text{ km}=745{,}6 \text{ km}$

b) $6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} = \dfrac{6{,}37 \cdot 10^6}{1\,000} \text{ km} = 6{,}37 \cdot 10^{6-3} \text{ km} = 6370 \text{ km}$

c) $0{,}0146 \text{ m} = 0{,}0146 \cdot 100 \text{ cm} = 1{,}46 \text{ cm}$

d) $3\,050 \cdot 10^{-4} \text{ km} = 3\,050 \cdot 10^{-4} \cdot 1\,000 \text{ m} = 3\,050 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 305 \text{ m}$

e) $1\,234\,000\,000 \text{ mm}^2 = \dfrac{1\,234\,000\,000}{1\;0^8} \text{ a} = 1234 \cdot 10^{-2} \text{a} = 12{,}34 \text{ a}$

f) $273{,}8 \cdot 10^7 \text{ cm}^2 = \dfrac{273{,}8 \cdot 10^7}{10^8} \text{ ha} = 273{,}8 \cdot 10^{7-8} \text{ ha} = 27{,}38 \text{ ha}$

g) $0{,}000\,0567 \text{ km}^2 = 0{,}000\,0567 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 56{,}7 \text{ m}^2$

h) $184{,}6 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 = 184{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 \text{cm}^2 = 184{,}6 \text{ cm}^2$

i) $5\,600 \text{ ml} = 5\,600 \cdot 10^{-3} \text{ l} = \dfrac{5\,600}{1\,000} \text{ l} = 5{,}6 \text{ l}$

j) $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$

k) $1\,000 \text{ l} = 1\,000 \text{ dm}^3 = \dfrac{1\,000}{1\,000} \text{ m}^3 = 1 \text{ m}^3$

l) $60\,000 \text{ cl} = 600\,000 \text{ ml} = 600\,000 \text{ cm}^3 = \dfrac{600\,000}{1\,000\,000} \text{ m}^3 = 0{,}6 \text{ m}^3$

m) $3\,345 \cdot 10^9 \text{ dl} = 3\,345 \cdot 10^8 \text{ dm}^3 = \dfrac{3\,345 \cdot 10^8}{10^{12}} \text{ km}^3 = 0{,}3345 \text{ km}^3$

n) $12{,}46 \cdot 10^8 \text{ mm}^3 = 12{,}46 \cdot 10^8 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 = 1{,}246 \text{ m}^3$

0) $1079{,}6 \cdot 10^{-7} \text{m}^3 = 1079{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 107{,}96 \text{ ml}$

**308**

a) Lävistäjien lukumäärä on $\frac{8\cdot(8-3)}{2}=20$.

b) Kulmien summa on $(8-2)\cdot 180^\circ = 1080^\circ$

Vastaus a) 20 b) $1080^\circ$

**309**

a) Merkitään sivujen määrää kirjaimella *n*.

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}(n-2)\cdot 180^\circ &= 3600^\circ \quad \Big| :180^\circ\\ n-2 &= 20\\ n &= 22\end{aligned}$$

b) Merkitään sivujen määrää kirjaimella *n*.

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}(n-2)\cdot 180^\circ &= 1890^\circ \quad \Big| :180^\circ\\ n-2 &= 10{,}5\\ n &= 12{,}5 \notin \mathbb{N}\end{aligned}$$

Vastaus a) 22 sivua b) ei ole

**310**

Olkoon $n$ $(n \geq 3)$ monikulmion sivujen lukumäärä.

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}\frac{n(n-3)}{2} &= 65 \quad \Big| \cdot 2\\ n(n-3) &= 130\\ n^2-3n-130 &= 0\end{aligned}$$

$$n=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-130)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 23}{2}$$

$n=-10$ tai $n=13$ $\quad \Big| n \geq 3$

ei kelpaa kelpaa

Vastaus Monikulmiossa on 13 sivua.

**311**

Olkoon $n\ (n \geq 3)$ monikulmion sivujen lukumäärä.
Saadaan epäyhtälö

$$\frac{n(n-3)}{2} \leq 9 \qquad \Big| \cdot 2(>0)$$

$$n^2 - 3n \leq 18$$

$$n^2 - 3n - 18 \leq 0$$

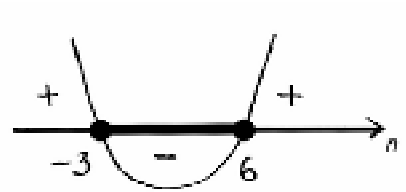
Nollakohdat:

$$n^2 - 3n - 18 = 0$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

$$n = -3 \text{ tai } n = 6$$

Kuvaaja:




Epäyhtälö toteutuu, kun $-3 \leq n \leq 6$,

Koska $n \geq 3$, niin arvot 3, 4, 5 ja 6 kelpaavat.

Vastaus Monikulmion sivujen lukumäärä on 3, 4, 5 tai 6.

**312**

Olkoon $n(n \geq 3)$ monikulmion sivujen lukumäärä.
Saadaan epäyhtälö

$$\frac{n(n-3)}{2} \geq 50 \qquad \Big| \cdot 2(>0)$$

$$n(n-3) \geq 100$$

$$n^2 - 3n - 100 \geq 0$$

Nollakohdat:

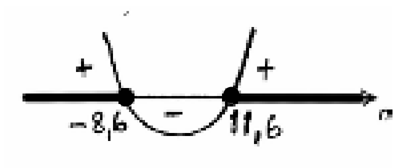
$$n^2 - 3n - 100 = 0$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 400}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{409}}{2}$$

$$n = \frac{3 - \sqrt{409}}{2} = -8{,}61\ldots \text{ tai } n = \frac{3 + \sqrt{409}}{2} = 11{,}61\ldots$$

$$n \approx -8{,}6 \qquad \text{tai } n \approx 11{,}6$$

Kuvaaja:




Epäyhtälö toteutuu, kun

$$n \leq \frac{3 - \sqrt{409}}{2} \approx -8{,}6 \text{ tai } n \geq \frac{3 + \sqrt{409}}{2} \approx 11{,}6$$

Koska $n \geq 3$, niin arvot $n = 12, 13, 14, \ldots$ kelpaavat.

Vastaus Monikulmiossa on vähintään 12 sivua.

**313**

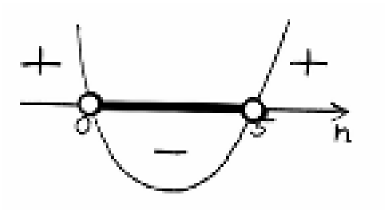
Olkoon $n(n \geq 3)$ monikulmion sivujen lukumäärä.
Saadaan epäyhtälö

$$\frac{n(n-3)}{2} < n \qquad \Big| \cdot 2(>0)$$
$$n(n-3) < 2n$$
$$n^2 - 5n < 0$$

Nollakohdat:

$$n^2 - 5n = 0$$
$$n(n-5) = 0$$
$$n = 0 \text{ tai } n = 5$$

Kuvaaja:




Epäyhtälö toteutuu, kun $0 < n < 5$,
Koska $n \geq 3$, niin arvot $n = 3$ ja $n = 4$ kelpaavat.

Vastaus Monikulmiossa on 3 tai 4 kulmaa.

**314**

Olkoon $n(n \geq 3)$ monikulmion sivujen lukumäärä.

Kaksitoistakulmion kulmien summa on

$$(12-2) \cdot 180^\circ \qquad \Big| (n-2) \cdot 180^\circ$$
$$= 10 \cdot 180^\circ$$

Uuden monikulmion kulmien summa on

$$0,7 \cdot 10 \cdot 180^\circ \qquad \Big| 100\% - 30\% = 70\% = 0,7$$

Toisaalta uuden monikulmion kulmien summa on $(n-2) \cdot 180^\circ$, joten saadaan yhtälö

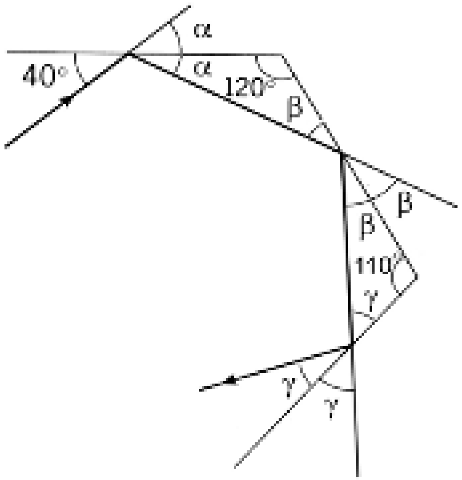
$$(n-2) \cdot 180^\circ = 0,7 \cdot 10 \cdot 180^\circ \qquad \Big| :180^\circ$$
$$n - 2 = 7$$
$$n = 9$$

9-kulmiossa on lävistäjiä

$$\frac{9 \cdot (9-3)}{2} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \qquad \Bigg| \frac{n(n-3)}{2}$$

Vastaus Monikulmiossa on 27 lävistäjää.

**315**




| | |
|---|---|
| $\alpha = 40^\circ$ | heijastuskulma on sama kuin tulokulma |
| $\beta = 180^\circ - 40^\circ - 120^\circ = 20^\circ$ | kolmion kulmien summa |
| $\gamma = 180^\circ - 110^\circ - 20^\circ = 50^\circ$ | kolmion kulmien summa |

Valonsäde kääntyy yhteensä kulman

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma$$
$$= 2 \cdot 40^\circ + 2 \cdot 20^\circ + 2 \cdot 50^\circ$$
$$= 220^\circ > 180^\circ$$

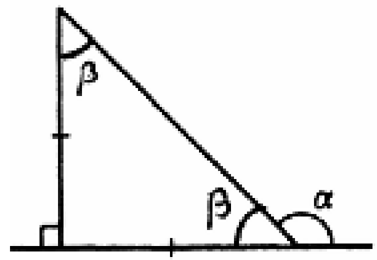
joten valonsäteet kohtaavat toisensa.

Kohtaamiskulma on $220^\circ - 180^\circ = 40^\circ$

Vastaus Valonsäteet kohtaavat $40^\circ$ kulmassa.

**316**

a) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, joten




$$2\beta + 90^\circ = 180^\circ$$
$$2\beta = 90^\circ$$
$$\beta = 45^\circ$$

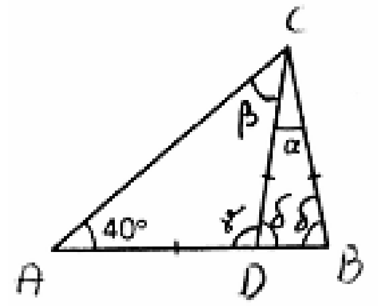
$\alpha$ on kantakulman vieruskulma, joten

$$\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

b) $\beta = 40^\circ$ tasakylkisen kolmion kantakulmana.

Kolmion kulmien summa on $180^\circ$, joten

$$\gamma = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$$




Vieruskulma:

$$\delta = 180^\circ - \gamma$$
$$= 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Tasakylkisestä kolmiosta *DBC* saadaan

$$\alpha = 180^\circ - 2 \cdot \delta$$
$$= 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$$

Vastaus a) $\alpha = 135^\circ$ b) $\alpha = 20^\circ$

**317**

Kolmion ala on $A=\dfrac{a\cdot h}{2}$

a)

$a=6+3=9$

$h=4$

$A=\dfrac{9\cdot 4}{2}=18$

b)

$a=6$

$h=4$

$A=\dfrac{6\cdot 4}{2}=12$

c)

$a=4$

$h=3$

$A=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$

Vastaus a) 18 b) 12 c) 6

**318**

Pythagoraan lauseen mukaan

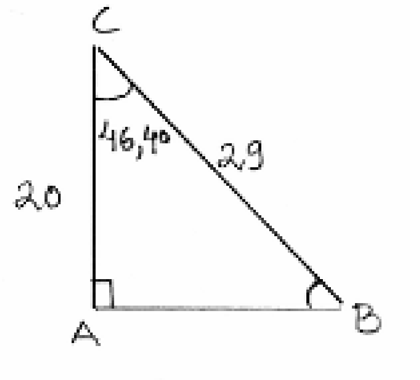
$|AB|^2+20^2=29^2$

$|AB|^2=29^2-20^2$

$|AB|^2=441$

$|AB|=_{(}\pm_{)}\sqrt{441}$

$|AB|=21$




Siis sivun AB pituus on 21.

$\sphericalangle ABC+46,4^\circ+90^\circ=180^\circ$

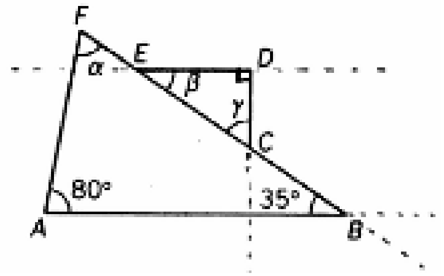
$\sphericalangle ABC=180^\circ-46,4^\circ-90^\circ$

$\sphericalangle ABC=43,6^\circ$

Vastaus a) $AB=21$ ja $\sphericalangle ABC=43,6^\circ$

**319**

a) $ED \perp DC$, joten $\sphericalangle D = 90^\circ$



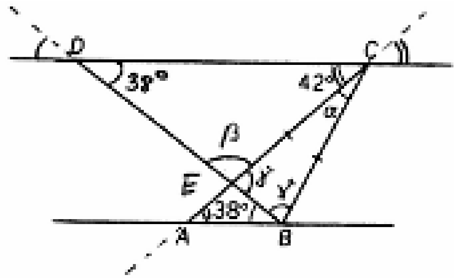

Kolmiosta $ABF$ saadaan
$\alpha = 180^\circ - 80^\circ - 35^\circ = 65^\circ$

Koska $AB \parallel ED$, niin $\beta = 35^\circ$ samankohtaisena kulmana kulman $ABE$ kanssa.

Kolmiosta $ECD$ saadaan

$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

b) $AB \parallel DC$, joten
$\sphericalangle BDC = 38^\circ$ samankohtaisena kulmana kulman $\sphericalangle ABD$ kanssa.



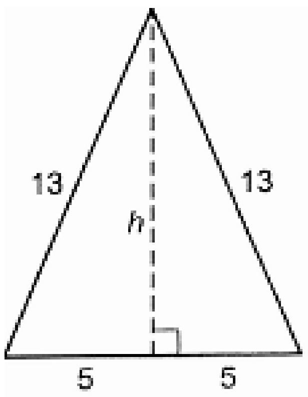

Kolmiosta $DEC$ saadaan
$\beta = 180^\circ - 42^\circ - 38^\circ = 100^\circ$
Vieruskulma $\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

Kolmio $EBC$ on tasakylkinen, joten
$\alpha = 180^\circ - 2 \cdot \gamma = 180 - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$

Vastaus a) $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 35^\circ$ ja $\gamma = 55^\circ$ b) $\alpha = 20^\circ$

**320**

a)




Olkoon kolmion korkeus *h*. Pythagoraan lauseen mukaan

$$h^2 + 5^2 = 13^2$$
$$h^2 = 144$$
$$h = {}_{(}\pm_{)}\sqrt{144}$$
$$h = 12$$

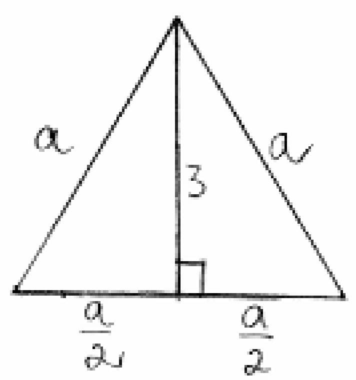
Kolmion ala on

$$A = \frac{a \cdot h}{2} \qquad \Big| a = 10,\ h = 12$$
$$= \frac{10 \cdot 2}{2}$$
$$= 60$$

Vastaus Ala on 60.

**320**

b)Olkoon kolmion sivu *a*.
Pythagoraan lauseen mukaan




$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+3^2=a^2$$

$$\frac{a^2}{4}+9=a^2$$

$$^{4)}a^2-\frac{a^2}{4}=9$$

$$\frac{3a^2}{4}=9 \qquad \left|\cdot\frac{4}{3}\right.$$

$$a^2=12$$

$$a=_{(\pm)}\sqrt{4\cdot 3}$$

$$a=2\sqrt{3}$$

Kolmion ala on

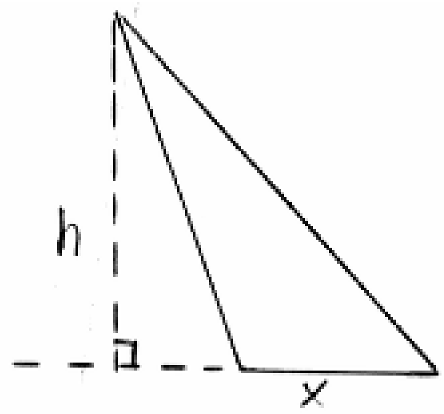
$$A=\frac{a\cdot h}{2} \qquad |a=2\sqrt{3},\ h=3$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{2}$$

$$=3\sqrt{3}$$

Vastaus Ala on $3\sqrt{3}$.

**321**




Olkoon kolmion kanta *x*. Silloin korkeus on 2*x*.
Kolmion ala on

$$A=\frac{a\cdot h}{2} \qquad |A=50,\ a=x,\ h=2x$$

$$50=\frac{x\cdot 2x}{2}$$

$$x^2=50$$

$$x^2=25\cdot 2$$

$$x=_{(\pm)}5\sqrt{2}$$

Siis $2x=10\sqrt{2}$

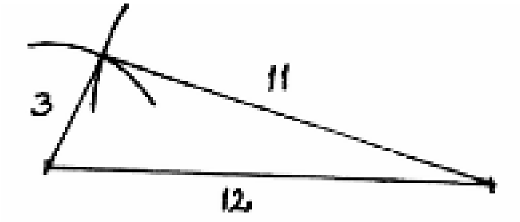
Vastaus Kolmion korkeus on $10\sqrt{2}$.

**322**

Valitaan yksiköksi 0,5 cm.

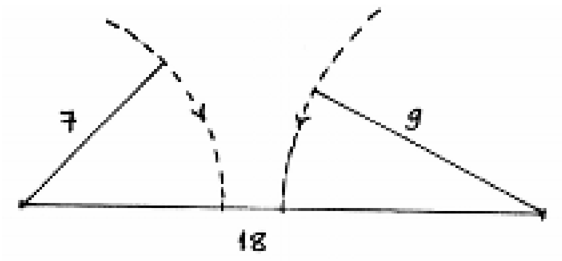
a) Muodostuu kolmio, koska

$$3+11=14>12$$
$$3+12=15>11$$
$$11+12=23>3$$



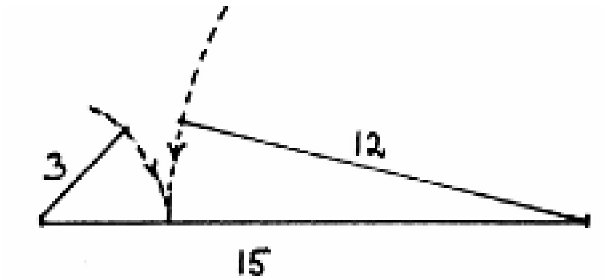

b) Ei muodostu kolmiota, koska

$$7+9=16<18$$




c) Ei muodostu kolmiota, koska

3+12=15




Vastaus a) on b) ei c) ei

**323**

Merkitään kolmion sivuja kirjaimilla *a*, *b* ja *c*, missä *c* on pisin sivu.
Kolmio on suorakulmainen, jos on voimassa ehto $a^2+b^2=c^2$.

a)

$$a=3$$
$$b=5$$
$$c=6$$

Kahden lyhyemmän sivun neliöiden summa on

$$a^2+b^2=3^2+5^2=9+25=34$$

Pisimmän sivun neliö on

$$c^2=6^2=36\neq 34$$

Koska $a^2+b^2\neq c^2$, ei kolmio ole suorakulmainen,

b)

$$a=6$$
$$b=8$$
$$c=10$$

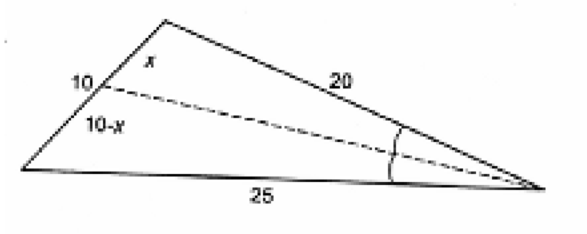
$$a^2+b^2=6^2+8^2=36+64=100$$
$$c^2=10^2=100$$

Koska $a^2+b^2=c^2$, on kolmio suorakulmainen.

Vastaus a) ei b) on

**324**

Lyhimmän sivun vastainen kulma on pienin.




Kulmanpuolittajalauseen mukaan

$$\frac{x}{10-x}=\frac{20}{25}$$
$$\frac{x}{10-x}=\frac{4}{5}$$
$$5x=4(10-x)$$
$$5x=40-4x$$
$$9x=40$$
$$x=\frac{40}{9}=4\frac{4}{9}$$

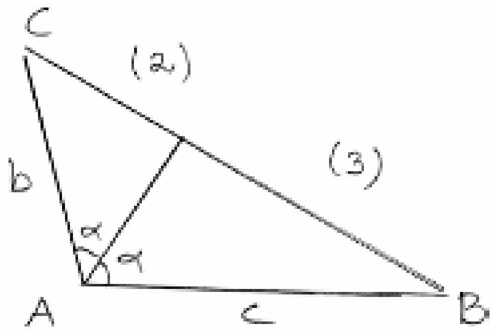
Toinen osa on $10-x=10-4\frac{4}{9}=5\frac{5}{9}$

Osien pituudet ovat $4\frac{4}{9}$ ja $5\frac{5}{9}$.

Vastaus $4\frac{4}{9}$ ja $5\frac{5}{9}$

**325**

$$BC=15$$
$$\text{piiri}=30$$




Kulmanpuolittajalauseen mukaan

$$\frac{b}{c}=\frac{2}{3}$$
$$b=\frac{2}{3}c$$

Koska piiri on 30, niin

$$\frac{2}{3}c+c+15=30$$
$$\frac{2}{3}c+c=15 \quad |\cdot 3$$
$$2c+3c=45$$
$$5c=45 \quad |:5$$
$$c=9$$

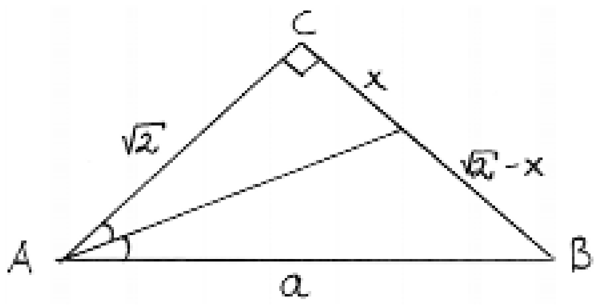
$$b=\frac{2}{3}c=\frac{2}{3}\cdot 9=6$$

Vastaus Muut sivut ovat 6 ja 9.

**326**

Lasketaan kanta $a$.

Kolmiosta $ABC$ saadaan Pythagoraan lauseen mukaan




$$\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = a^2$$
$$a^2 = 4$$
$$a = {}_{(}\pm{}_{)}2$$
$$a = 2$$

Kulmanpuolittajalauseen mukaan

$$\frac{x}{\sqrt{2}-x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$2x = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-x\right)$$
$$2x = 2 - \sqrt{2}x$$
$$2x + \sqrt{2}x = 2$$
$$\left(2+\sqrt{2}\right)x = 2 \qquad |:\left(2+\sqrt{2}\right)$$
$$x = \frac{{}^{2-\sqrt{2})}2}{\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2} = 2-\sqrt{2}$$

Toinen osa

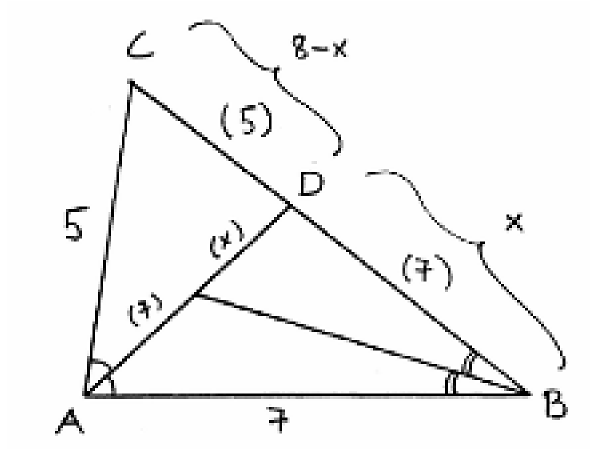
$$\sqrt{2} - \left(2-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2$$

Vastaus Osat ovat $2-\sqrt{2}$ ja $2\sqrt{2}-2$

**327**

Pienin kulma on $\sphericalangle B$. Suurin kulma on $\sphericalangle A$.
Kulman $A$ puolittaja jakaa sivun $BC$ suhteessa 7:5.
Siis

$$\frac{x}{8-x} = \frac{7}{5}$$
$$5x = 7(8-x)$$
$$5x = 56 - 7x$$
$$12x = 56$$
$$x = \frac{56}{12}$$
$$x = \frac{14}{3}$$



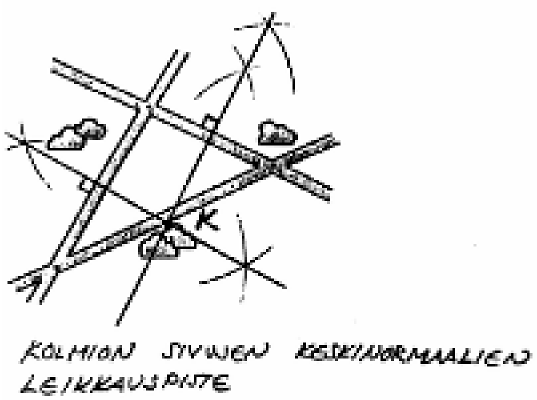

Kulman $B$ puolittaja jakaa sivun $AD$ suhteessa $7:x$ eli

$$7:\frac{14}{3} = \frac{7}{\frac{14}{3}} = \frac{7\cdot 3}{14} = \frac{3}{2}$$

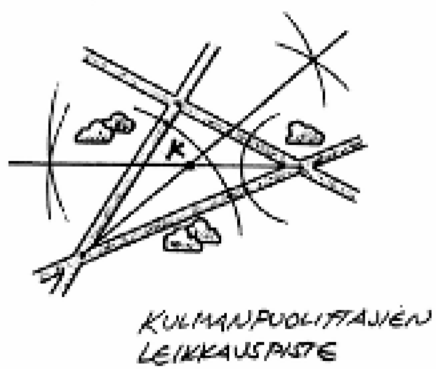
Vastaus 3:2

**328**

a)

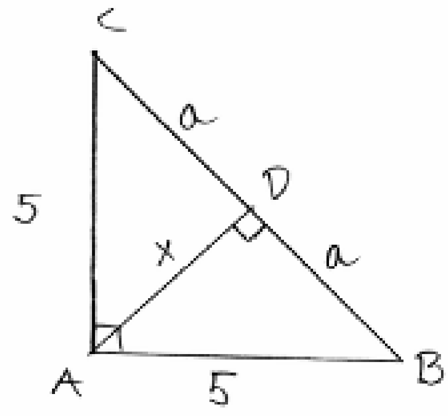



b)




**329**

a) Kolmiossa *ABC* kannalle




*AB* piirretty korkeusjana on *CA*
*AC* piirretty korkeusjana on *BA*
*BC* piirretty korkeusjana on *DA*

Korkeusjanat leikkaavat
toisensa pisteessä *A*.

b) Koska kolmio *ABC* on tasakylkinen, niin
korkeusjana *AD* on myös keskinormaali, joten

$$BD = DC = a$$

Pythagoraan lauseen mukaan

$$(2a)^2 = 5^2 + 5^2$$
$$4a^2 = 25 + 25$$
$$4a^2 = 50$$
$$a^2 = \frac{50}{4}$$
$$a^2 = \frac{25}{2}$$

Kolmiosta *ABD* saadaan

$$x^2 + a^2 = 5^2 \qquad \left| a^2 = \frac{25}{2} \right.$$

$$x^2 + \frac{25}{2} = 25$$

$$x^2 = 25 - \frac{25}{2}$$

$$x^2 = \frac{25}{2}$$

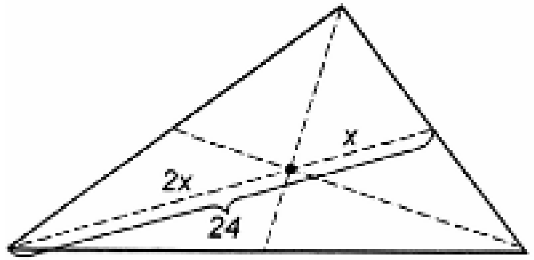
$$x = _{(}\pm_{)} \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Muut korkeusjanat ovat $BA = CA = 5$

Vastaus a) Korkeusjanojen leikkauspiste on suoran kulman kärkipiste.

b) Korkeusjanojen pituudet ovat 5, 5 ja $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

**330**




Mediaanilauseen mukaan mediaani jakautuu suhteessa 2:1 kärjestä lukien.

Merkitään mediaanin osia vastaavasti $2x$ ja $x$.
Siis

$$2x + x = 24$$

$$3x = 24$$

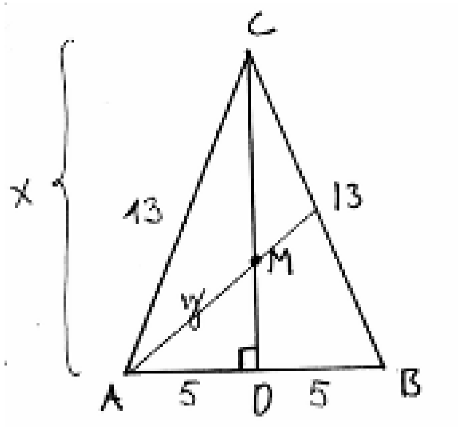
$$x = 8$$

Toinen osa on $2 \cdot 8 = 16$

Osien pituudet ovat 8 ja 16

Vastaus 8 ja 16

**331**




Tasakylkisessä kolmiossa huipusta piirretty mediaani on samalla myös korkeusjana. Olkoon mediaanien leikkauspiste eli painopiste *M* ja huipusta piirretty mediaani $CD = x$.
Pythagoraan lauseen mukaan

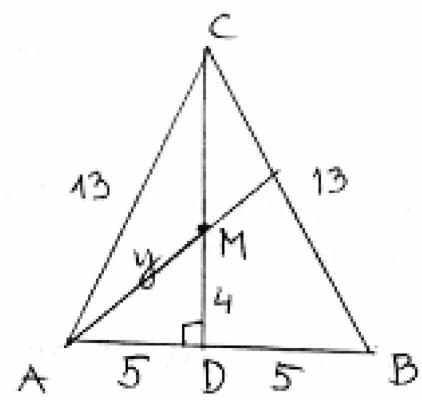
$$\begin{aligned} x^2 + 5^2 &= 13^2 \\ x^2 &= 169 - 25 \\ x^2 &= 144 \\ x &= _{(}\pm_{)} 12 \end{aligned}$$

a) Painopisteen *M* etäisyys huippukulman *C* kärjestä on mediaanilauseen mukaan

$$CM = \frac{2}{3} CD = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$$

b) Merkitään painopisteen *M* etäisyyttä kantakulman *A* kärjestä kirjaimella *y*. Mediaanilauseen mukaan

$$DM = \frac{1}{3} CD = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$




Kolmiosta $ADM$ saadaan

$$\begin{aligned} y^2 &= 5^2 + 4^2 \\ y^2 &= 25 + 16 \\ y^2 &= 41 \\ y &= _{(}\pm_{)} \sqrt{41} \\ y &= 6{,}403\ldots \approx 6{,}4 \end{aligned}$$

Vastaus

a) Painopisteen etäisyys kolmion huippukulman kärjestä on 8.

b) Painopisteen etäisyys kolmion kantakulman kärjestä on $\sqrt{41} \approx 6{,}4$.

**332**

Tasasivuisessa kolmiossa mediaani ja korkeusjana yhtyvät. Painopiste *M* jakaa mediaanit kolmion kärjestä lukien suhteessa 2:1.

Merkitään mediaanin osia *x* ja *2x*. Pythagoraan lauseen mukaan

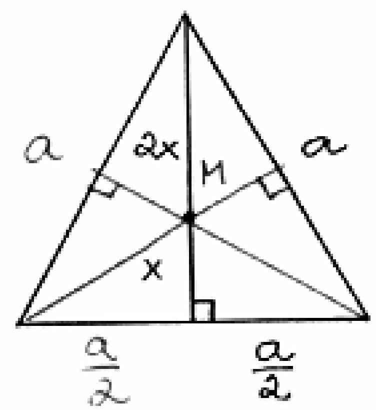
$$(3x)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$9x^2 + \frac{1}{4}a^2 = a^2$$

$$9x^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{12}$$

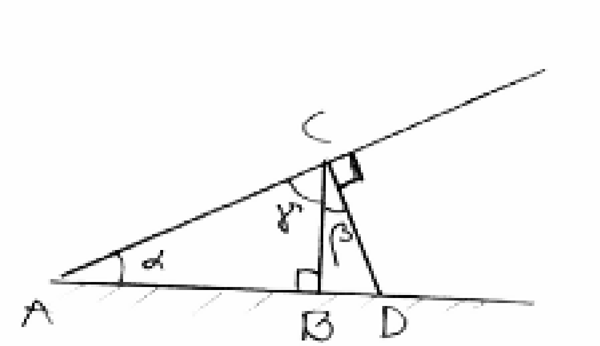
$$x = (\pm)\frac{a}{2\sqrt{3}}$$




Tällöin $2x = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Vastaus Tasasivuisen kolmion painopisteen etäisyys kärjestä on $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

**333**




Olkoon $\sphericalangle ACB = \gamma$. Kolmiossa $ABC$ on voimassa

$$\alpha + \gamma + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + \gamma = 90^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - \alpha$$

Koska $DC \perp AC$, niin

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \gamma \qquad \left|\gamma = 90^\circ - \alpha\right.$$

$$\beta = 90^\circ - (90^\circ - \alpha)$$

$$\beta = 90^\circ - 90^\circ + \alpha$$

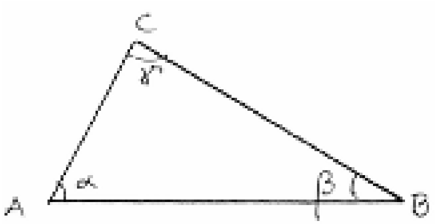
$$\beta = \alpha$$

Vastaus $\beta = \alpha$.

**334**

Olkoon $\sphericalangle A=\alpha,\ \sphericalangle B=\beta$ ja $\sphericalangle C=\gamma$.
Tehtävän ehtojen mukaan

$$\begin{cases}\alpha=\beta+30^\circ\\ \alpha=\gamma-15^\circ\end{cases}$$




Siis

$$\beta+30^\circ=\gamma-15^\circ$$
$$\beta=\gamma-45^\circ$$

Kolmion kulmien summa on $180^\circ$, joten

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \quad \big|\ \text{sijoitetaan } \alpha \text{ ja } \beta$$
$$\gamma-15^\circ+\gamma-45^\circ+\gamma=180^\circ$$
$$3\gamma=180^\circ+15^\circ+45^\circ$$
$$3\gamma=240^\circ \quad \big|:3$$
$$\gamma=80^\circ$$

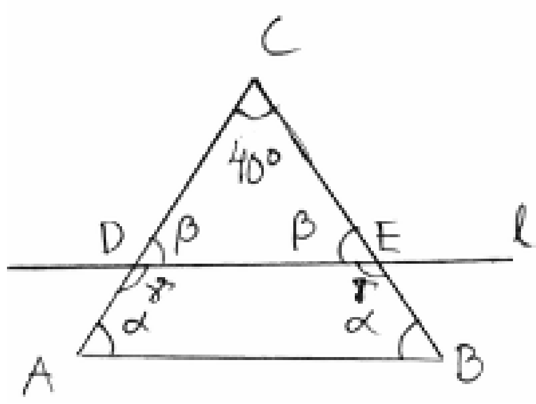
Siis

$$\alpha=80^\circ-15^\circ=65^\circ$$
$$\beta=80^\circ-45^\circ=35^\circ$$

Vastaus Kulma $A$ on $65^\circ$, kulma $B$ on $35^\circ$ ja kulma $C$ on $80^\circ$.

**335**

Koska kolmiota $ABC$ leikkaava suora $l$ on yhdensuuntainen kannan $AB$ kanssa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret. Siis $\alpha=\beta$.




Kolmion kulmien summa on $180^\circ$, joten

$$2\alpha+40^\circ=180^\circ$$
$$2\alpha=140^\circ$$
$$\alpha=70^\circ$$
$$\beta=70^\circ$$

Kulma $\gamma$ on kulman $\beta$ vieruskulma, joten

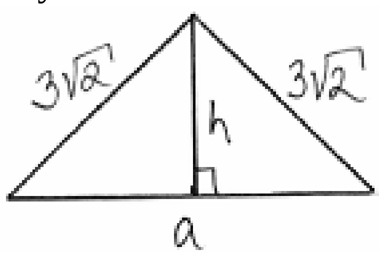
$$\gamma=180^\circ-\beta$$
$$=180^\circ-70^\circ$$
$$=110^\circ>\alpha$$

Näin ollen $\alpha$ on pienin kulma.

Vastaus Nelikulmion pienin kulma on $70^\circ$.

**336**

Piirretään tasakylkinen kolmio, jonka kanta on *a*, korkeus *h* ja kylki $3\sqrt{2}$.




Korkeuden ja kannan suhde on 1:2, joten

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{2}$$
$$a = 2h$$

Pythagoraan lauseen mukaan

$$h^2 + h^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \qquad \left| \frac{a}{2} = \frac{2h}{2} = h \right.$$
$$2h^2 = 9 \cdot 2$$
$$h^2 = 9$$
$$h = _{(}\pm_{)}\sqrt{9}$$
$$h = 3$$

Kolmion ala on

$$A = \frac{a \cdot h}{2} \qquad \left| \begin{array}{l} h = 3 \\ a = 2h = 6 \end{array} \right.$$
$$= \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 3}{\cancel{2}} = 9$$

Vastaus Kolmion ala on 9.

**337**

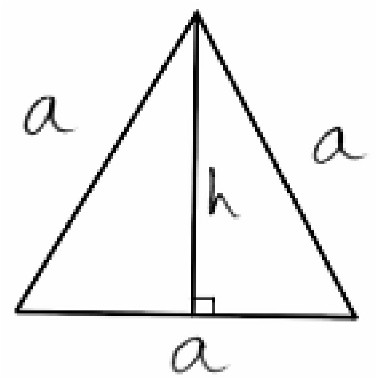
Piirretään tasasivuinen kolmio ja merkitään kylkeä kirjaimella *a* ja korkeutta kirjaimella *h*.

Ala

$$A = \frac{a \cdot h}{2} \qquad \left| A = 2\sqrt{3} \right.$$

Pythagoraan lauseen mukaan

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$
$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$
$$h = _{(}\pm_{)}\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Saadaan yhtälö

$$\frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = 2\sqrt{3}$$
$$a^2 = 8$$
$$a = _{(}\pm_{)}\sqrt{8}$$
$$a = 2\sqrt{2}$$

Kolmion piiri

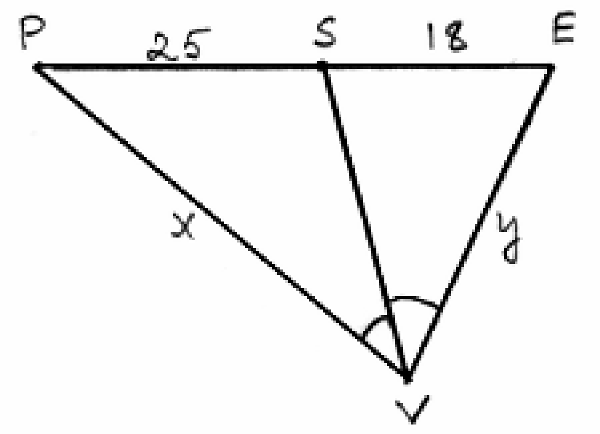
$$3a = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Vastaus Kolmion piiri on $6\sqrt{2}$.

**338**

Merkitään

$P =$ pohjoispää
$E =$ eteläpää
$S =$ sauna
$V =$ vene




Valokiilan keskimmäisin säde osuu rantasaunaan, joten $\sphericalangle PVS = \sphericalangle EVS$.

Kulmanpuolittajalauseen mukaan

$$\frac{x}{y} = \frac{25}{18}$$
$$y = \frac{18}{25}x < x$$

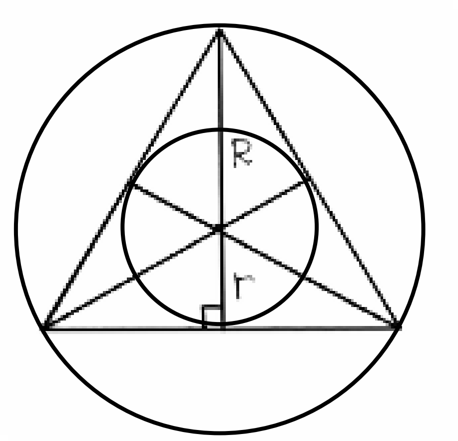
eli matka *VE* on lyhyempi kuin matka *VP*.

Vastaus Riitta soutaa saaren eteläpäähän.

**339**

Olkoon sisään piirretyn ympyrän säde $r$ ja ympäri piirretyn ympyrän säde $R$..

Tasasivuisen kolmion mediaani on myös keskinormaali ja kulmanpuolittaja, joten ympyröillä on sama keskipiste. Mediaanilauseen mukaan




$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

$$R = 2r$$

Halkaisijat ovat siis $d_y = 2R = 4r$ ja $d_s = 2r$.

Ympäri piirretyn ympyrän halkaisija $d_y$ on suurempi kuin sisään piirretyn ympyrän halkaisija $d_s$ prosentteina

$$\frac{d_y - d_s}{d_s} \cdot 100\%$$

$$= \frac{4r - 2r}{2r} \cdot 100\%$$

$$= \frac{2r}{2r} \cdot 100\%$$

$$= 100\%$$

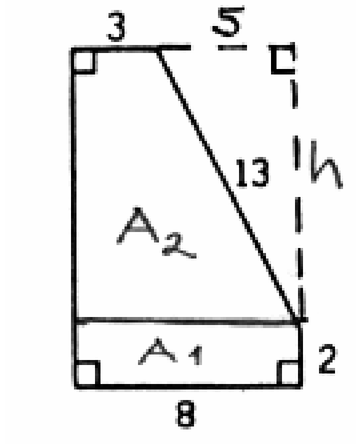
Vastaus 100%

**340**

a) **Tapa 1**
Jaetaan kuvio suorakulmioksi ja puolisuunnikkaaksi.

$$A_1 = A_{\text{suorakulmio}} = 8 \cdot 2 = 16$$

Lasketaan puolisuunnikkaan korkeus katkoviivalla merkitystä kolmiosta.




$$h^2 + 5^2 = 13^2$$

$$h^2 = 169 - 25$$

$$h^2 = 144$$

$$h = _{(}\pm_{)} 12$$

$$A_2 = A_{\text{puolisuunnikas}}$$

$$A_2 = \frac{a+b}{2} \cdot h \qquad \Big| a = 8,\ b = 3,\ h = 12$$

$$= \frac{8+3}{2} \cdot 12$$

$$= \frac{11 \cdot \overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{2}}$$

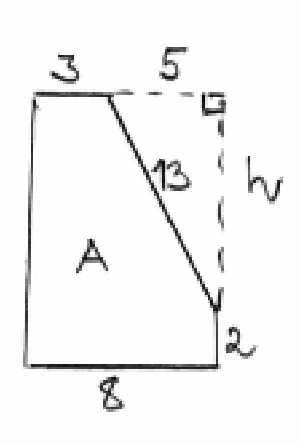
$$= 66$$

$$A_{koko} = A_1 + A_2 = 16 + 66 = 82$$

**Tapa 2**
Täydennetään kuvio suorakulmioksi

Katkoviivalla merkityn kolmion kateetit ovat $8-3=5$ ja $h$.

Pythagoraan lauseen mukaan




$$h^2+5^2=13^2$$
$$h^2=169-25$$
$$h^2=144$$
$$h=_{(}\pm_{)}12$$

Kuvion ala $A$ on

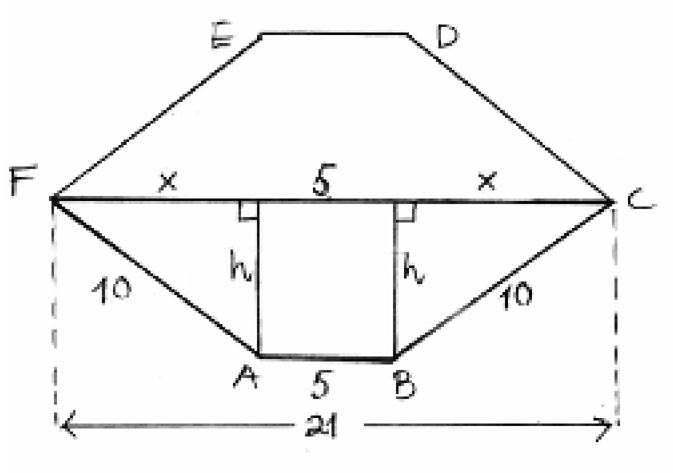
$$A=A_{\text{suorakulmio}}-A_{\text{kolmio}}$$
$$=8\cdot(2+h)-\frac{5\cdot h}{2} \qquad |h=12$$
$$=8\cdot 14-\frac{5\cdot 12}{2}$$
$$=112-30$$
$$=82$$

Vastaus Kuvion pinta-ala on 82.

**340**

b)Koska $AB\parallel ED\parallel FC$, niin kuvio muodostuu kahdesta puolisuunnikkaasta. Koska puolisuunnikas on tasakylkinen, saadaan yhtälö

$$x+5+x=21$$
$$2x=16$$
$$x=8$$




Pythagoraan lauseen mukaan

$$x^2+h^2=10^2 \quad |x=8$$
$$8^2+h^2=10^2$$
$$h^2=100-64$$
$$h^2=36$$
$$h=_{(}\pm_{)}6$$

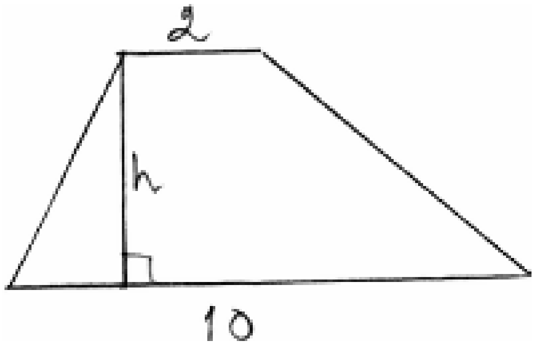
Puolisuunnikkaan ala on

$$A=\frac{a+b}{2}\cdot h \qquad |a=5,\ b=21,\ h=6$$
$$=\frac{5+21}{2}\cdot 6$$
$$=\frac{26}{2}\cdot 6=78$$

Kuvion ala on $2\cdot 78=156$

Vastaus Kuvion ala on 156.

**341**




Olkoon korkeus $h$. Puolisuunnikkaan ala on

$$A_1 = \frac{a+b}{2}\cdot h \qquad \big| A_1 = 30,\ a = 10,\ b = 2$$
$$30 = \frac{10+2}{2}\cdot h$$
$$30 = \frac{12}{2}\cdot h$$
$$6h = 30 \qquad \big| :6$$
$$h = 5$$

Toisen puolisuunnikkaan ala on

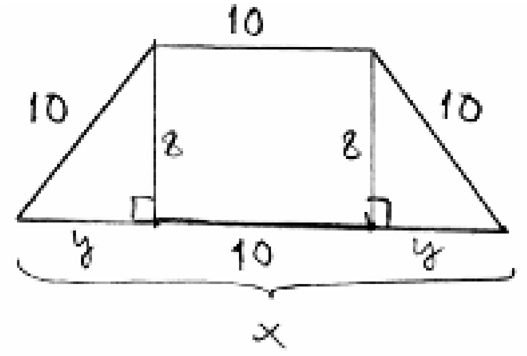
$$A_2 = \frac{a+b}{2}\cdot h \qquad \Big| \frac{a+b}{2} = 20,\ h = 5$$
$$A_2 = 20\cdot 5 = 100$$

Vastaus 100

**342**

Olkoon puolisuunnikkaan pitempi kanta $x$. Koska puolisuunnikas on tasakylkinen, jakavat kannalle piirretyt korkeudet kannan osiin $y$, 10 ja $y$.

Pythagoraan lauseen mukaan




$$y^2 + 8^2 = 10^2$$
$$y^2 = 100 - 64$$
$$y^2 = 36$$
$$y = _{(}\pm_{)}6$$

Siis pitempi kanta on

$$6 + 10 + 6 = 22.$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A = \frac{a+b}{2}\cdot h \qquad \big| a = 22,\ b = 10,\ h = 8$$
$$= \frac{22+10}{2}\cdot 8$$
$$= 128$$

Vastaus Puolisuunnikkaan ala on 128.

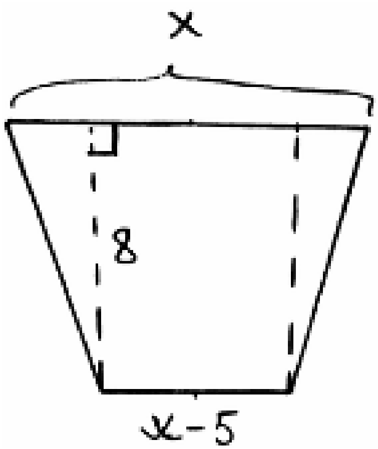
**343**

$A = 76\ \text{m}^2$

$h = 8\ \text{m}$

leveys: $x\ (\text{m})$

pohjan leveys: $x-5\ (\text{m})$




Puolisuunnikkaan ala on

$$A = \frac{a+b}{2}\cdot h \qquad \left| \begin{array}{l} a = x-5, \\ b = x,\ h = 8 \end{array}\right.$$

$$= \frac{x-5+x}{\cancel{2}}\cdot \overset{4}{\cancel{8}}$$

$$= (2x-5)\cdot 4$$

Siis

$$\begin{aligned} (2x-5)\cdot 4 &= 76 \\ 2x-5 &= 19 \\ 2x &= 24 \\ x &= 12,\ \text{joten} \\ x-5 &= 7 \end{aligned}$$

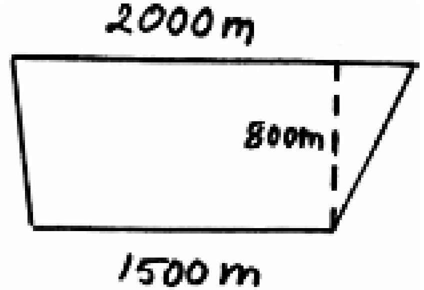
Vastaus Pohjan leveys on 7 m.

**344**

Pellon pinta-ala on

$$A = \frac{1\,500 + 2\,000}{2}\cdot 800\ \text{m}^2 = 1\,400\,000\ \text{m}^2 = 140\ \text{ha}$$

Torjunta-ainetta tarvitaan




$$140\ \cancel{\text{ha}}\cdot 0{,}15\ \frac{l}{\cancel{\text{ha}}} = 21\ l$$

Ruiskutuksen hinta on

$$21\ \cancel{l}\cdot 50\ \frac{€}{\cancel{l}} = 1\,050\ €$$

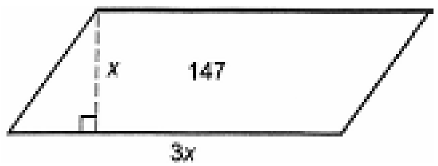
Vastaus Pellon ruiskutus maksaa 1 050 €.

**345**

Merkitään kannaksi $3x$ ja korkeudeksi $x$.

$$A = ah \qquad \left| a = 3x,\ h = x,\ A = 147\right.$$

$$\begin{aligned} 3x\cdot x &= 147 \\ x^2 &= 49 \\ x &= (\pm)\sqrt{49} \\ x &= 7 \end{aligned}$$



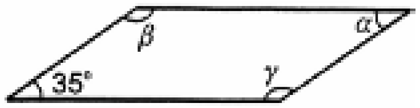

Korkeus on 7, joten kanta on $3\cdot 7 = 21$.

Vastaus Kanta on 21 ja korkeus on 7.

**346**

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, joten

$\alpha = 35^\circ$ ja $\gamma = \beta$.



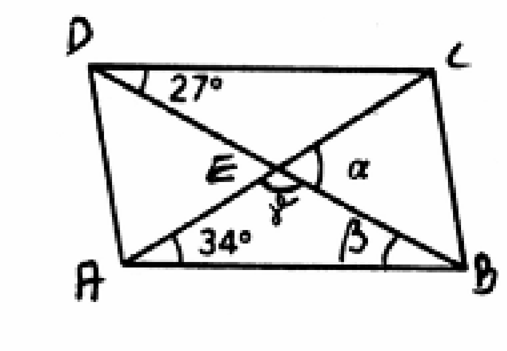

Suunnikkaan (nelikulmion) kulmien summa on $360^\circ$, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 35^\circ + \beta + \alpha + \gamma &= 360^\circ \qquad \left|\, \alpha = 35^\circ,\ \gamma = \beta \right. \\ 35^\circ + \beta + 35^\circ + \beta &= 360^\circ \\ 2\beta &= 290^\circ \\ \beta &= 145^\circ \end{aligned}$$

Siis $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 145^\circ$ ja $\gamma = 145^\circ$.

Vastaus  Suunnikkaan kulmat ovat $35^\circ$, $145^\circ$ ja $145^\circ$.

**347**




Kulma $\beta = 27^\circ$ $\quad\left|\,\text{samankohtaiset kulmat ja } AB \parallel DC\right.$

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - 34^\circ - \beta^\circ \qquad \left|\, \triangle ABE \text{ kulmien summa } 180^\circ \right. \\ &= 146^\circ - 27^\circ \\ &= 119^\circ \end{aligned}$$

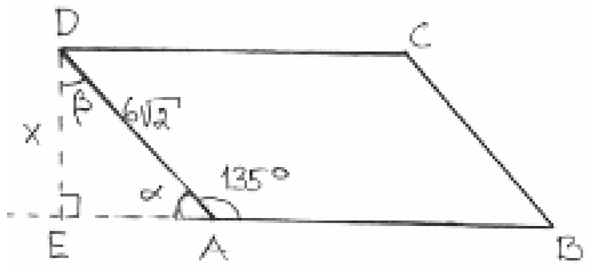
$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - 119^\circ \qquad \left|\, \alpha \text{ ja } \gamma \text{ vieruskulmat} \right. \\ &= 61^\circ \end{aligned}$$

Vastaus  Lävistäjien välinen kulma on $61^\circ$.

**348**

Merkitään suunnikkaan korkeutta kirjaimella *x*. Koska kulma $EAD$ on kulman $DAB$ vieruskulma, on

$\alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$




Siis

$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ$

$\beta = 45^\circ$

Näin ollen $\triangle EAD$ on tasakylkinen, joten $EA = ED = x$.
Pythagoraan lauseen mukaan

$$x^2 + x^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2$$
$$2x^2 = 36 \cdot 2$$
$$x^2 = 36$$
$$x = _{(}\pm_{)}6$$

Kanta $AB = \sqrt{2}AD = \sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12$

Suunnikkaan ala on

$$A = ah \qquad \left| a = 12,\ h = 6 \right.$$
$$= 12 \cdot 6$$
$$= 72$$

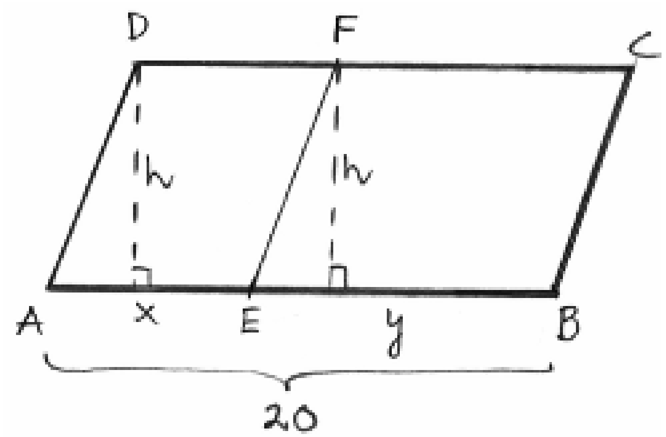
Vastaus Suunnikkaan ala on 72.

**349**

Koska $EF \parallel AD$, niin nelikulmiot $AEFD$ ja $EBCF$ ovat suunnikkaita. Olkoon *h* suunnikkaiden korkeus, $AE = x$ ja $EB = y$. Suunnikkaan ala on $A = ah$, joten

$A_{AEFD} = x \cdot h$

$A_{EBCF} = y \cdot h$




Siis

$$\frac{x \cdot h}{y \cdot h} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$
$$x = \frac{2}{3}y$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} (1) & x = \frac{2}{3}y \qquad \text{| sijoitetaan yhtälöön (2)} \\ (2) & x + y = 20 \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}y + y = 20 \qquad |\cdot 3$$
$$2y + 3y = 60$$
$$5y = 60 \qquad |:5$$
$$y = 12$$

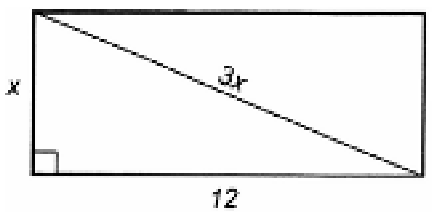
$$(1) \qquad x = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$$

Vastaus Osat ovat 8 ja 12.

**350**

Merkitään suorakulmion lävistäjäksi $3x$, jolloin toinen suorakulmion sivu on $x$. Pythagoraan lauseen mukaan

$$
\begin{aligned}
x^2 + 12^2 &= (3x)^2 \\
x^2 + 144 &= 9x^2 \\
8x^2 &= 144 \\
x^2 &= \frac{144}{8} \\
x^2 &= 18 \\
x &= _{(}\pm_{)}\sqrt{18} \\
x &= 3\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

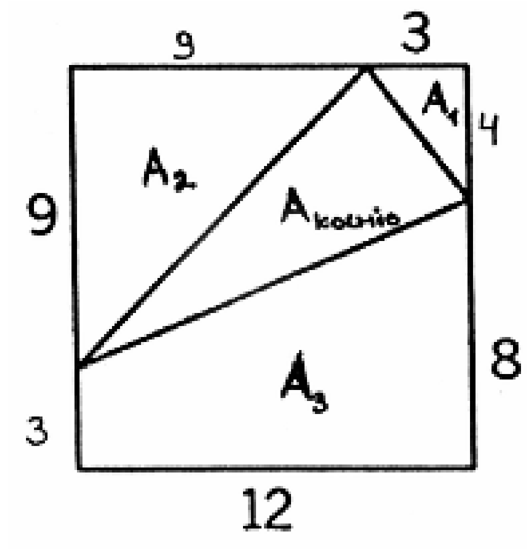



Siis $3x = 9\sqrt{2}$

Vastaus Suorakulmion lävistäjä on $9\sqrt{2}$.

**351**

Lasketaan kolmiota ympäröivien kuvioiden alat.




$$A_1 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$A_2 = \frac{9 \cdot 9}{2} = \frac{81}{2} = 40\frac{1}{2}$$

$A_3$ on puolisuunnikas, jossa $a = 8,\ b = 3$ ja $h = 12$

$$A_3 = \frac{8+3}{2} \cdot 12 = 66$$

$$A_{\text{neliö}} = 12 \cdot 12 = 144$$

$$
\begin{aligned}
A_{\text{kolmio}} &= A_{\text{neliö}} - (A_1 + A_2 + A_3) \\
&= 144 - \left(6 + 40\frac{1}{2} + 66\right) \\
&= 31\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Kolmion ala on neliön alasta

$$\frac{33\frac{1}{2}}{144} \cdot 100\% = 21\frac{7}{8}\% = 21{,}875\% \approx 21{,}9\%$$

Vastaus Kolmion ala on $31\frac{1}{2}$ ja se on $21\frac{7}{8}\% \approx 21{,}9\%$ neliön alasta.

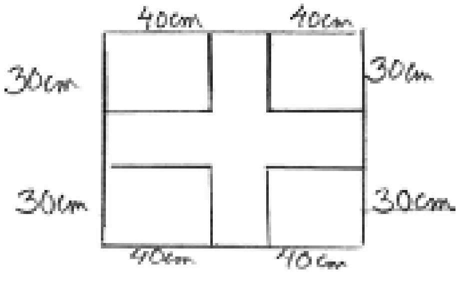
**352**

a) Esimerkiksi kaksi tarjotinta sijoitetaan pöydän reunojen suuntaisesti niin, että sivujen summa on

$40\ \text{cm} + 40\ \text{cm} = 80\ \text{cm} < 100\ \text{cm}$

ja

$30\ \text{cm} + 30\ \text{cm} = 60\ \text{cm} < 100\ \text{cm}$.

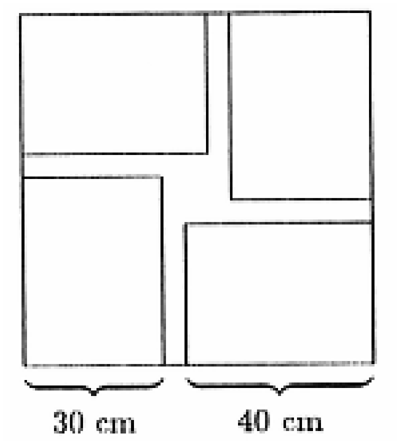



Siis tarjottimet mahtuvat pöydälle.

b) Asetellaan tarjottimet pöydälle niin, että jokainen niistä koskettaa yhtä pöydän kärjistä kuvion mukaisesti. Koska

$30\ \text{cm} + 40\ \text{cm} = 70\ \text{cm} < 75\ \text{cm}$,

niin tarjottimet mahtuvat pöydälle.



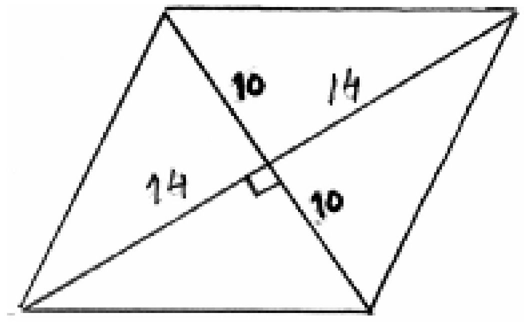

c) Yksittäisen tarjottimen pinta-ala on $30\ \text{cm} \cdot 40\ \text{cm} = 1\,200\ \text{cm}$.

Neljä tarjotinta tarvitsee pinta-alaa yhteensä
$4 \cdot 1200\ \text{cm}^2 = 4\,800\ \text{cm}^2$.

Koska pöydän pinta-ala on vain
$(68\ \text{cm})^2 = 4\,624\ \text{cm}^2 < 4\,800\ \text{cm}^2$,
niin tarjottimet eivät mahdu pöydälle.

Vastaus a) kyllä b) kyllä c) ei

**353**



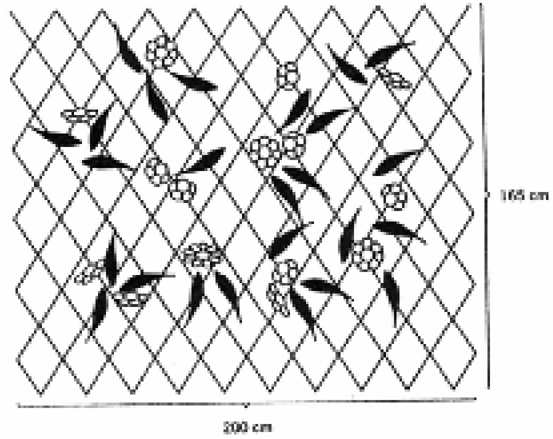

Vinoneliön eli neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja puolittavat toisensa. Tällöin syntyy neljä samanlaista suorakulmaista kolmiota. Siis

$$\begin{aligned} A_{\text{neljäkäs}} &= 4 \cdot A_{\text{kolmio}} \\ &= 4 \cdot \frac{a \cdot h}{2} \qquad \left| a = 10,\ h = 14 \right. \\ &= 4 \cdot \frac{10 \cdot 14}{2} \\ &= 280 \end{aligned}$$

Vastaus Vinoneliön ala on 280.

**354**

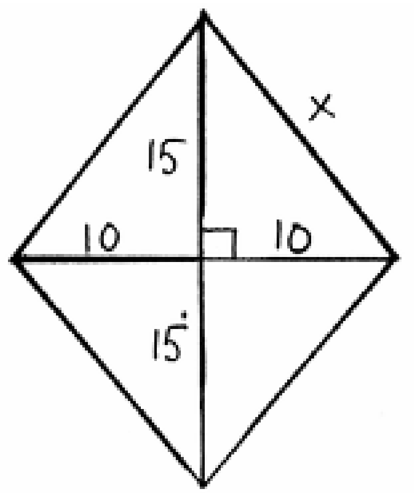
a) Säleikössä on neljäkkäitä pystysuunnassa $5\frac{1}{2}$ kpl ja vaakasuunnassa 10 kpl.




Neljäkkäiden lävistäjät ovat

$$\frac{165\text{ cm}}{5{,}5} = 30\text{ cm}$$

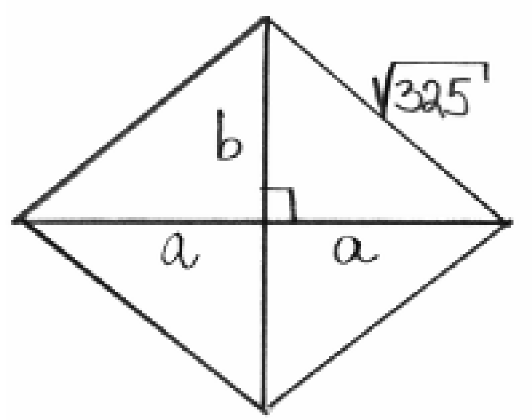
$$\frac{200\text{ cm}}{10} = 20\text{ cm}$$




Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten

$$x^2 = 15^2 + 10^2$$
$$x^2 = 325$$
$$x = _{(}\pm_{)}\sqrt{325}$$
$$x = 18{,}027... \approx 18\ (\text{cm})$$

b) Säleikön leveys on 300 cm ja vaakasuunnassa on 10 neljäkästä, joten neljäkkään vaakasuora lävistäjä on 30 cm.




Kuviossa on yksikkönä cm.

Neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa. Siis $a = 15(\text{cm})$.

Pythagoraan lauseen mukaan

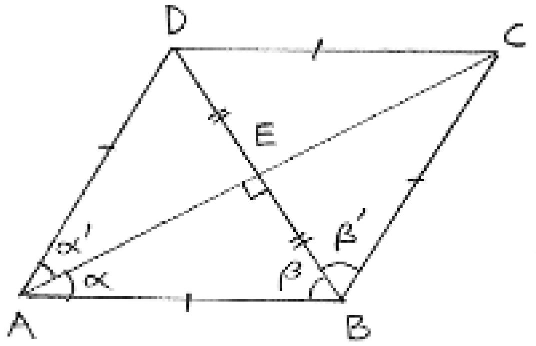
$$a^2 + b^2 = \left(\sqrt{325}\right)^2 \qquad \vert\, a = 15$$
$$15^2 + b^2 = 325$$
$$b^2 = 325 - 225$$
$$b^2 = 100$$
$$b = _{(}\pm_{)}10\ (\text{cm})$$

Pystysuunnassa on $5\frac{1}{2}$ neljäkästä, joten säleikön korkeus on

$$5\frac{1}{2}\cdot 2b = 11b = 11\cdot 10 = 110\ (\text{cm})$$

Vastaus a) Neljäkkään sivun pituus on 18 cm.
b) Säleikön korkeus on 110 cm.

**355**




Neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa ja ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Siis $BE = ED$ ja $AE \perp BD$, joten $AE$ on tasakylkisen kolmion $ABD$ mediaani, keskinormaali ja huippukulman $A$ puolittaja. Vastaavasti $CE$ on kulman $C$ puolittaja ja $BD$ on kulmien $B$ ja $D$ puolittaja.

Olkoon $\sphericalangle A = 80^\circ$. Tällöin $\alpha = \alpha' = \dfrac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

Merkitään $\sphericalangle B = \beta + \beta'$, missä $\beta = \beta'$.

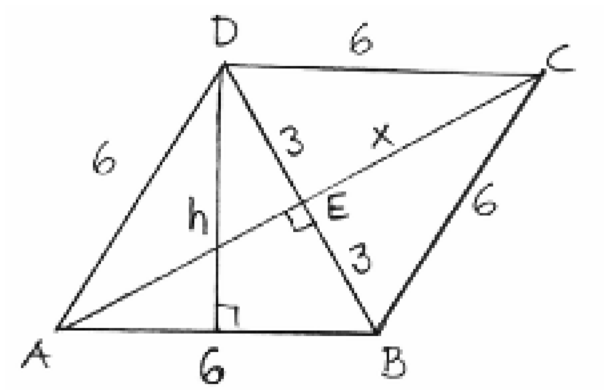
Kolmion kulmien summa on $180^\circ$, joten

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \qquad \Big| \alpha = 40^\circ$$
$$40^\circ + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ$$
$$\beta = 50^\circ$$
$$\beta' = 50^\circ$$

Koska $\sphericalangle C = \sphericalangle A$, jakautuu se kahteen $40^\circ$ kulmaan.
Koska $\sphericalangle D = \sphericalangle B$, jakautuu se kahteen $50^\circ$ kulmaan.

Vastaus Toinen pari vastakkaisia kulmia jakautuu kahteen $40^\circ$ kulmaan ja toinen pari kahteen $50^\circ$ kulmaan.

**356**




a) Koska kolmio $ABD$ on tasasivuinen, on neljäkkään korkeus

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad \Big| a = 6$$
$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$
$$h = 3\sqrt{3}$$

Neljäkkään ala on

$$A = ah \qquad \Big| a = 6,\ h = 3\sqrt{3}$$
$$A = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

b) Neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa. Merkitään

$$AE = EC = x$$
$$BE = ED = 3$$

Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten

$$\begin{aligned} A_{\text{neljäkäs}} &= 4 \cdot A_{\text{kolmio}} \\ &= 4 \cdot \frac{3 \cdot x}{2} \\ &= 6x \end{aligned}$$

Toisaalta

$$A_{\text{neljäkäs}} = 18\sqrt{3}$$

Siis

$$6x = 18\sqrt{3} \qquad |:6$$

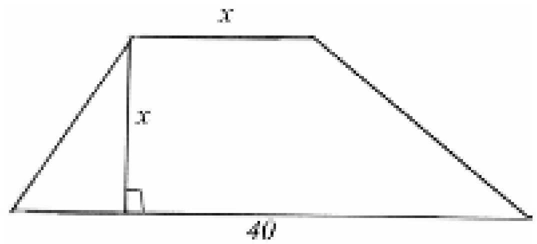
$$x = 3\sqrt{3}$$

Pidempi lävistäjä on

$$AC = 2x = 6\sqrt{3}$$

Vastaus a) Neljäkkään ala on $18\sqrt{3}$.
b) Pitempi lävistäjä on $6\sqrt{3}$.

**357**




Kuviossa on yksikkönä metri

Puolisuunnikkaan ala on

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h \qquad \left| \begin{array}{l} a = 40,\ b = x,\ h = x, \\ A = 1\,482 \end{array} \right.$$

$$1482 = \frac{40+x}{2} \cdot x \qquad |\cdot 2$$

$$(40+x)x = 2964$$

$$x^2 + 40x - 2964 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2964)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-40 \pm \sqrt{13456}}{2} \\ &= \frac{-40 \pm 116}{2} \end{aligned}$$

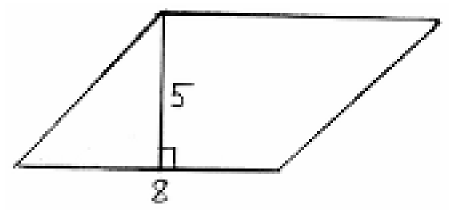
$$x = \frac{-40-116}{2} = -78,\ \text{ei kelpaa } (x > 0)$$

$$x = \frac{-40+116}{2} = 38,\ \text{kelpaa}$$

Vastaus Lyhyempi yhdensuuntaisista sivuista on 38 m.

**358**

Alkuperäisen suunnikkaan ala on




$A = ah \qquad | a = 8,\ h = 5$

$A = 8 \cdot 5 = 40$

Uuden suunnikkaan

kanta $\quad a = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \qquad$ | kanta pienenee 75%, jäljellä 25% eli $\frac{1}{4}$

korkeus $\quad h = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot 5 \qquad$ | korkeus suurenee p%

ala $\quad A = 2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot 5$

$\quad = 10\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

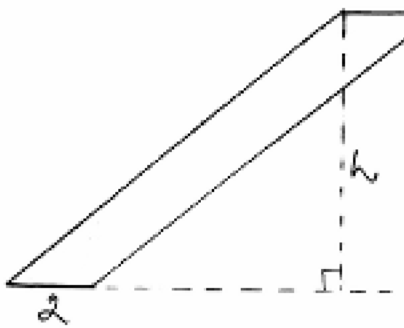
Siis

$10 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 40 \qquad |:10$

$1 + \frac{p}{100} = 4$

$\frac{p}{100} = 3$

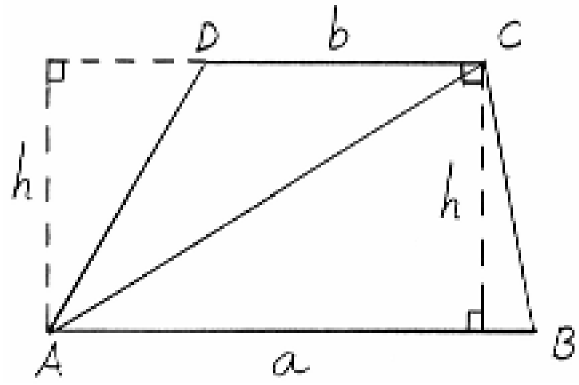
$p = 300$




Vastaus Korkeus suurenee 300%.

**359**

Oletus: $AB \parallel DC$




Väite: Ala on $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$

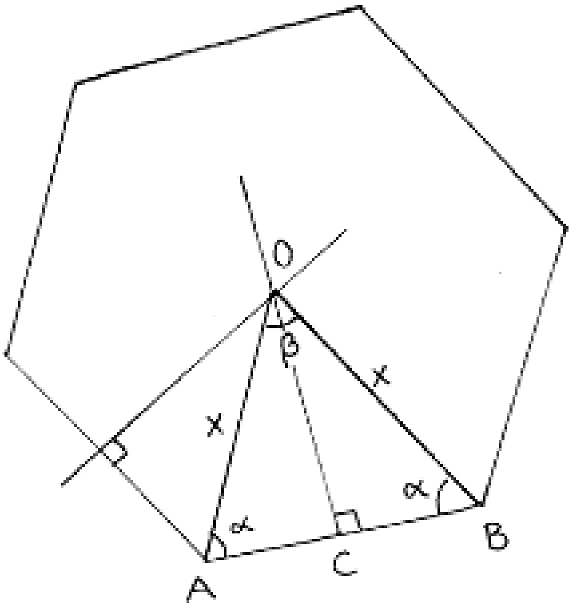
Todistus: Jaetaan puolisuunnikas kahteen kolmioon yhdistämällä kaksi vastakkaista kärkeä (esimerkiksi $A$ ja $C$). Tällöin puolisuunnikkaan ala on yhtä suuri kuin kolmioiden $ABC$ ja $ACD$ alojen summa eli

$$A = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{ah + bh}{2} = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Siis väite on tosi.

□

**360**




Koska piiri on 24 ja kuusikulmio on säännöllinen, niin sivu on $\dfrac{24}{6}=4$. Siis $AB=4$.

Kuusikulmion kulmien summa on

$$(n-2)\cdot 180^\circ \qquad \left| n=6 \right.$$
$$=(6-2)\cdot 180^\circ$$
$$=720^\circ$$

Säännöllisen kuusikulmion yksi kulma on

$$\frac{720^\circ}{6}=120^\circ$$

Säännöllisen monikulmion keskipiste on yhtä kaukana jokaisesta kärjestä, joten $\triangle ABO$ on tasakylkinen.
Merkitään kantakulmia $\alpha$:lla.

Kolmion $ABO$ huippukulma on

$$\beta=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$$

Kolmion kulmien summa on $180^\circ$, joten

$$\alpha+\alpha+\beta=180^\circ$$
$$2\alpha=180^\circ-\beta \qquad \left|\beta=60^\circ\right.$$
$$2\alpha=120^\circ$$
$$\alpha=60^\circ$$

Näin ollen kolmio $ABO$ on tasasivuinen, joten $x=AB=4$.

Vastaus Kuusikulmion kulma on $120^\circ$.
Keskipisteen etäisyys kärjestä on 4.

Huomautus

Koska säännöllisen kuusikulmion ympäri piirretyn ympyrän säde on yhtä pitkä kuin kuusikulmion sivu, voidaan säännöllinen kuusikulmio piirtää seuraavalla tavalla:

Piirretään ensin ympyrä. Valitaan kehältä mielivaltainen piste. Erotetaan kehältä tästä pisteestä lähtien peräkkäin säteen pituisia jänteitä. Nämä jänteet muodostavat säännöllisen kuusikulmion.

**361**

Monikulmion kulmien summa on $(n-2)\cdot 180^\circ$.
Olkoon $\alpha$ monikulmion kulma.

a) $n=8$

$$8\cdot\alpha=(8-2)\cdot 180^\circ$$
$$8\alpha=6\cdot 180^\circ$$
$$\alpha=\frac{6\cdot 180^\circ}{8}=135^\circ$$

b) $n=16$

$$16\cdot\alpha=(16-2)\cdot 180^\circ$$
$$16\alpha=14\cdot 180^\circ$$
$$\alpha=\frac{14\cdot 180^\circ}{16}=157{,}5^\circ$$

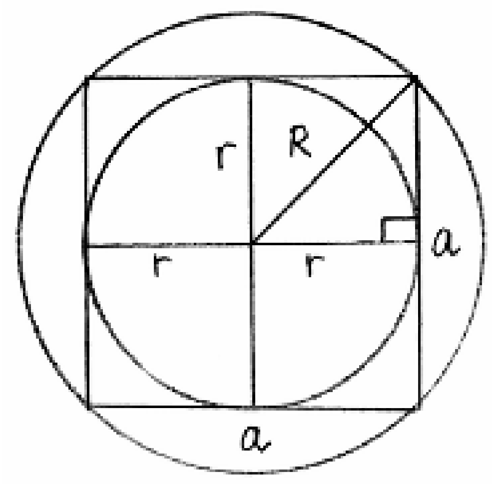
Monikulmion lävistäjien lukumäärä on $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

a) $\dfrac{8\cdot(8-3)}{2}=4\cdot 5=20$

b) $\dfrac{16\cdot(16-3)}{2}=8\cdot 13=104$

Vastaus a) $135^\circ$; 20 lävistäjää
b) $157{,}5^\circ$; 104 lävistäjää

**362**




Sisään piirretyn ympyrän säde on

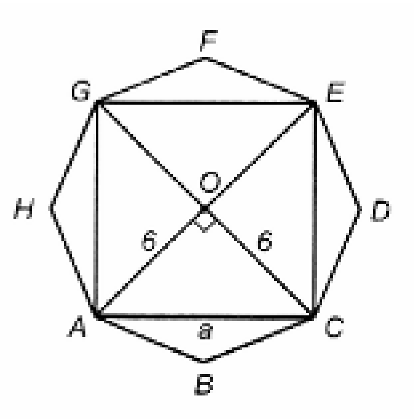
$$r=\frac{a}{2}=4 \qquad \Big| a=8$$

Ympäri piirretyn ympyrän säde olkoon *R*. Pythagoraan lauseen mukaan

$$R^2=4^2+4^2$$
$$R^2=16+16$$
$$R^2=2\cdot 16$$
$$R=_{(}\pm_{)}\sqrt{2\cdot 16}$$
$$R=4\sqrt{2}$$

Vastaus Säteet ovat 4 ja $4\sqrt{2}$.

**363**




Neliön lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten $\triangle ACO$ on suorakulmainen kolmio.
Lisäksi $AO = CO = 6$.

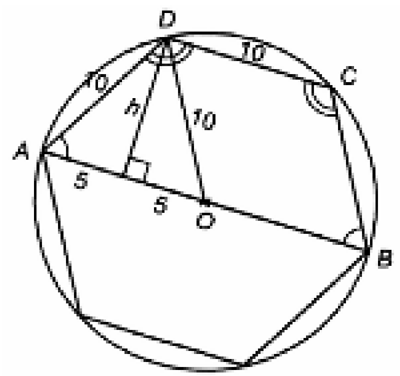
Pythagoraan lauseen mukaan

$$a^2 = 6^2 + 6^2$$
$$a^2 = 36 + 36$$
$$a^2 = 72$$

Nelikulmion ala
$$A = a^2 = 72$$

Vastaus Ala on 72.

**364**

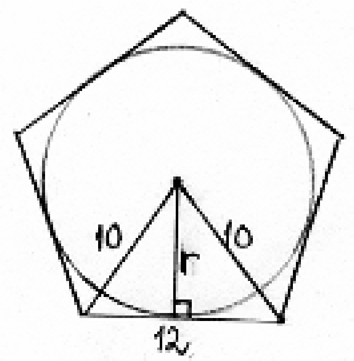



a) Kuusikulmion kulmien summa on
$$(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$$
Siis yksi kulma on $\dfrac{720^\circ}{6} = 120^\circ$.
Lävistäjä *AB* puolittaa kulmat *A* ja *B*.
Puolisuunnikkaan kulmat ovat
$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = 60^\circ$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle D = 120^\circ$$

b) Kolmio *AOD* on tasasivuinen, joten korkeusjana puolittaa kannan. Pythagoraan lauseen mukaan
$$5^2 + h^2 = 10^2$$
$$h^2 = 100 - 25$$
$$h^2 = 75$$
$$h = _{(}\pm_{)}\sqrt{75}$$
$$h = \sqrt{25\cdot 3}$$
$$h = 5\sqrt{3}$$

Vastaus a) Puolisuunnikkaan kulmat ovat
$60^\circ$, $60^\circ$, $120^\circ$ ja $120^\circ$.
b)Puolisuunnikkaan korkeus on $5\sqrt{3}$.

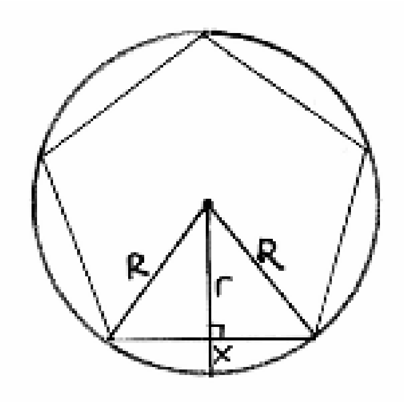
**365**




a) Säännöllisen monikulmion keskipiste on myös sisään piirretyn ympyrän keskipiste.
Säännöllinen viisikulmio voidaan jakaa viideksi samanlaiseksi tasakylkiseksi kolmioksi.
Pythagoraan lauseen mukaan

$$r^2 + 6^2 = 10^2$$
$$r^2 = 100 - 36$$
$$r^2 = 64$$
$$r = _{(}\pm_{)} 8$$

Siis $r = 8$.

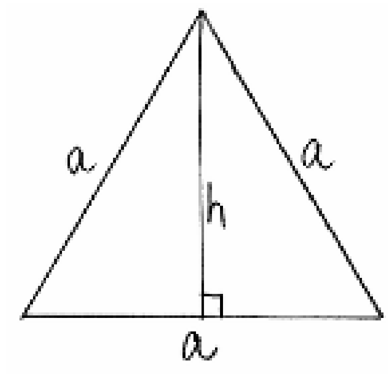



b) Ympäri piirretyn ympyrän säde on $R = 10$.
Ympyrän kehän suurin etäisyys sivusta on

$$x = R - r \qquad \Big| R = 10,\ r = 8$$
$$x = 10 - 8$$
$$x = 2$$

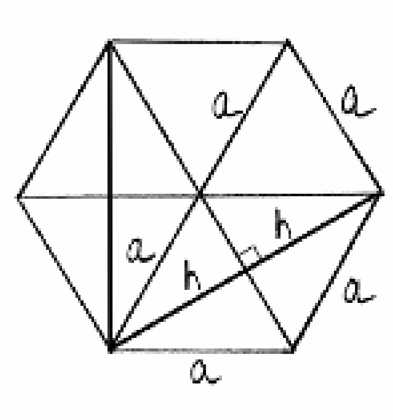
Vastaus a) Sisään piirretyn ympyrän säde on 8.
b) Etäisyys on 2.

**366**




Merkitään tasasivuisen kolmion sivua kirjaimella $a$. Pythagoraan lauseen mukaan

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$
$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$
$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$
$$h = _{(}\pm_{)} \frac{a\sqrt{3}}{2}$$




Kolmion ala on

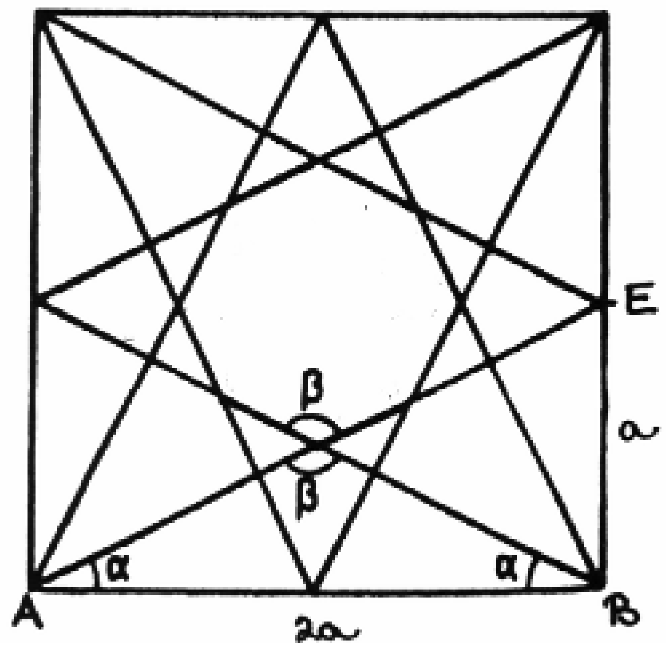
$$A = \frac{ah}{2} \qquad \Big| A = \sqrt{3}$$
$$\frac{ah}{2} = \sqrt{3}$$
$$\frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{3}$$
$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \qquad \Big| \cdot 4$$
$$a^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \qquad \Big| : \sqrt{3}$$
$$a^2 = 4$$
$$a = _{(}\pm_{)} 2$$

Koska säännöllinen kuusikulmio on symmetrinen, riittää tarkastella yhdestä kärkipisteestä piirrettyjä lävistäjiä.

Lävistäjien pituudet ovat $2a$ ja $2h$. Koska $a > h$, niin pisin lävistäjä on $2a = 2 \cdot 2 = 4$.

Vastaus Kuusikulmion pisimmän lävistäjän pituus on 4.

**367**




Olkoon neliön sivu $2a$. Kolmiosta $ABE$ saadaan

$\tan \alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, joten $\alpha = 25{,}56...^\circ \approx 26{,}6^\circ$.

Kahdeksankulmion yksi kulmista on suuruudeltaan

$\beta = 180^\circ - 2\alpha = 126{,}86...^\circ \approx 126{,}9^\circ$.

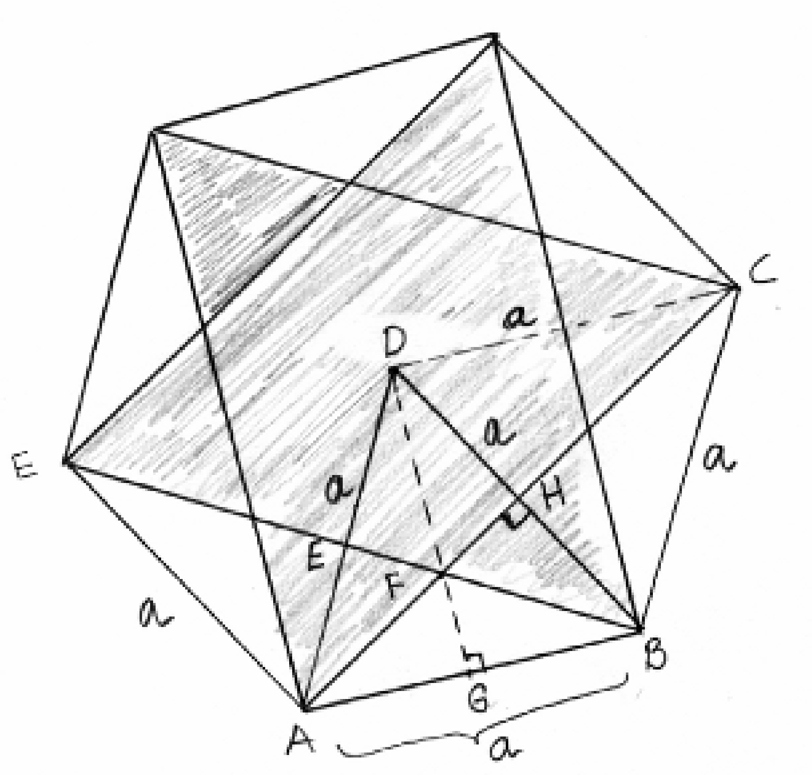
Säännöllisen 8-kulmion kulmien summa on

$(8-2) \cdot 180^\circ = 1\,080^\circ$, joten yksi kulma on $\frac{1\,080^\circ}{8} = 135^\circ$.

Kulma $\beta < 135^\circ$, joten monikulmio ei ole säännöllinen.

□

**368**




Olkoon säännöllisen kuusikulmion sivu $a$. Säännöllinen kuusikulmio muodostuu kuudesta tasasivuisesta kolmiosta.

$$A_{\text{kuusikulmio}} = 6 \cdot A_{\text{tasas.kolmio}}$$

$$A_{\text{tasas.kolmio}} = \frac{a \cdot h}{2} \qquad \left| h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \right.$$

$$= \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{kuusikulmio}} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

$$A_{\text{tähti}} = A_{\text{kuusikulmio}} - 6 \cdot A_{\text{kolmio}}$$

Lasketaan kolmion *ABF* ala.

Nelikulmio *ABCD* on neljäkäs, sillä

1) $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$ | samankohtaiset kulmat yhtä suuret

2) $AB = BC = CD = CA = a$

Neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa, joten *AH* on kolmion *ABD* mediaani. Samoin voidaan osoittaa, että *BE* on mediaani.

Tasasivuisen kolmion *ABD* korkeusjana *DG* on samalla myös mediaani.

Siis mediaanilauseen mukaan

$$FG = \frac{1}{3}DG \qquad \Big| \; DG = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{6}a\sqrt{3}$$

Kolmion *ABF* ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{a \cdot \frac{1}{6}a\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}$$

Näin ollen

$$A_{\text{tähti}} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} - 6 \cdot \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$$

$$= a^2\sqrt{3}$$

Prosentteina

$$\frac{A_{\text{tähti}}}{A_{\text{kuusikulmio}}} \cdot 100\%$$

$$= \frac{\cancel{a^2\sqrt{3}}}{\frac{3}{2}\cancel{a^2\sqrt{3}}} \cdot 100\%$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 100\%$$

$$= \frac{200}{3}\%$$

$$= 66\frac{2}{3}\%$$

$$= 66{,}66...\%$$

$$\approx 66{,}7\%$$

Vastaus $66\frac{2}{3}\% \approx 66{,}7\%$