401

Ympyrän halkaisija $d = 200$ m ja säde $r = 100$ m.

a) kehän pituus

$$p = \pi d \qquad |d = 200 \text{ m}$$
$$= \pi \cdot 628{,}31...$$
$$\approx 630 \ (\text{m})$$

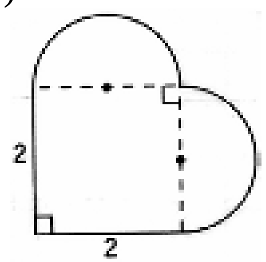
b) pinta-ala

$$A = \pi r^2 \qquad |r = 100 \text{ m}$$
$$= \pi \cdot 100^2$$
$$= 31415{,}92...$$
$$\approx 31\,000 \ (\text{m}^2)$$

Vastaus a) kehän pituus 630 m
b) pinta-ala $31\,000 \text{ m}^2$

402

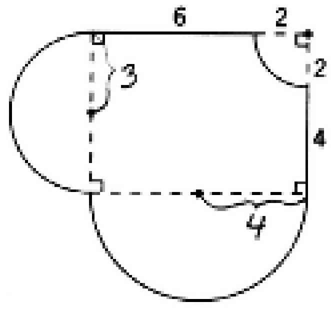
a)



$\text{piiri} = 2 \cdot 2 + 2\pi \cdot 1 = 4 + 2\pi$

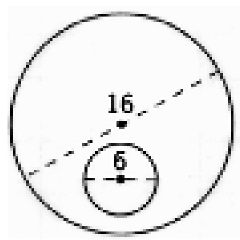
$\text{ala} = 2^2 + \pi \cdot 1^2 = 4 + \pi$

b)



$$\text{piiri} = 6 + 4 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 8$$
$$= 10 + \pi + 3\pi + 4\pi$$
$$= 10 + 8\pi$$
$$\text{ala} = 8 \cdot 6 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2$$
$$= 48 - \pi + \frac{1}{2} \cdot 9\pi + \frac{1}{2} \cdot 16\pi$$
$$= 48 - \pi + \frac{9}{2}\pi + 8\pi$$
$$= 48 + 7\pi + 4\frac{1}{2}\pi$$
$$= 48 + 11\frac{1}{2}\pi$$

c)



$$\text{piiri} = \pi \cdot 16 + \pi \cdot 6$$
$$= 22\pi$$
$$\text{ala} = \pi \cdot 8^2 - \pi \cdot 3^2$$
$$= 64\pi - 9\pi$$
$$= 55\pi$$

Vastaus a) piiri $4 + 2\pi$ ala $4 + \pi$
b) piiri $10 + 8\pi$ ala $48 + 11\frac{1}{2}\pi$
c) piiri 22π ala 55π

403

Ympyrän ala on 200 cm^2.

a)

$$A = 200 \ (\text{cm}^2)$$

$$A = \pi r^2$$

$$r^2 = \frac{A}{\pi}$$

$$r^2 = \frac{200}{\pi}$$

$$r = _{(}\pm_{)}\sqrt{\frac{200}{\pi}}$$

$$r = 7{,}978... \ (\text{cm})$$

halkaisija

$$d = 2r$$

$$= 2 \cdot 7{,}978...$$

$$= 15{,}957...$$

$$\approx 16 \ (\text{cm})$$

b) Kehän pituus

$$p = 2\pi r$$

$$= 2\pi \cdot 7{,}978...$$

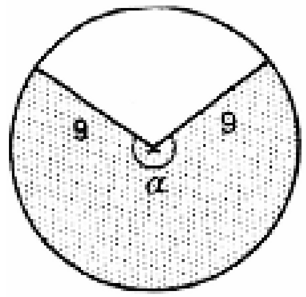
$$= 50{,}132...$$

$$p \approx 50 \ (\text{cm})$$

Vastaus a) halkaisija 16 cm
b) kehän pituus 50 cm

404

Ympyrän halkaisija $d = 18$
ympyrän säde $r = 9$
sektorin keskuskulma $\alpha = 240^\circ$



a) Kaari

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi d \qquad \Big| \alpha = 240^\circ, d = 18$$

$$b = \frac{240^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 18$$

$$b = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 18$$

$$b = \frac{2\pi \cdot \overset{6}{\cancel{18}}}{\cancel{3}}$$

$$b = 12\pi = 37{,}69...$$

b) Ala

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{240^\circ}}}{\underset{3}{\cancel{360^\circ}}} \cdot \pi \cdot 81$$

$$= 54\pi = 169{,}64...$$

Vastaus a) kaaren pituus on $12\pi \approx 38$
b) pinta-ala on $54\pi \approx 170$

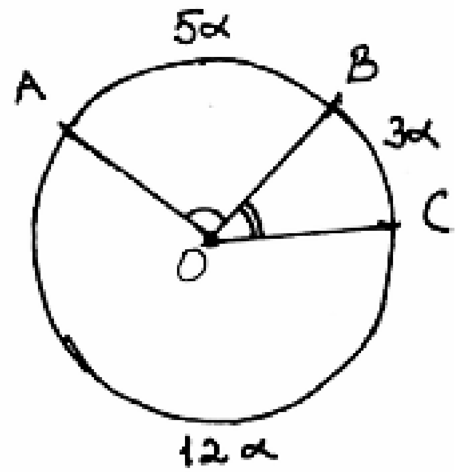
405

Keskuskulma asteluku on sama kuin vastaavan kaaren asteluku. Kehän jakosuhteen mukaan saadaan

$\overset{\frown}{AB} = 5\alpha,\ \overset{\frown}{BC} = 3\alpha$ ja $\overset{\frown}{CA} = 12\alpha$

Siis

$$5\alpha + 3\alpha + 12\alpha = 360^\circ$$
$$20\alpha = 360^\circ$$
$$\alpha = 18^\circ$$



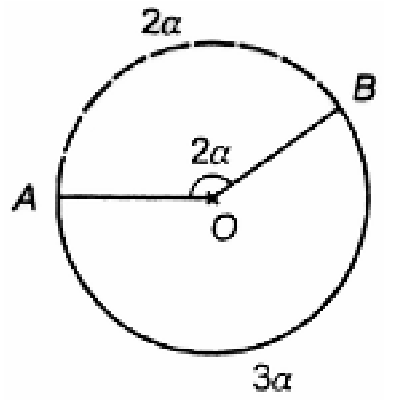
Joten

$$\sphericalangle AOB = 5 \cdot 18^\circ = 90^\circ$$
$$\sphericalangle BOC = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$$
$$\sphericalangle COA = 12 \cdot 18^\circ = 216^\circ$$

Vastaus Keskuskulmat ovat 90°, 54° ja 216°

406

Koska kaarien pituuksien suhde on 2:3, niin kaarien asteluvut ovat 2α ja 3α.



Siis

$$2\alpha + 3\alpha = 360^\circ$$
$$5\alpha = 360^\circ$$
$$\alpha = 72^\circ$$

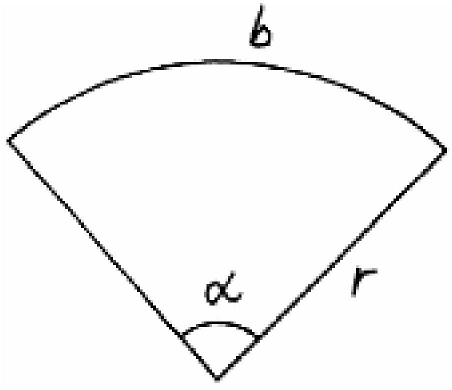
Keskuskulma $AOB = 2 \cdot 72^\circ = 144^\circ$.
Kaaren AB pituus

$$b = \frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \qquad |r = 10$$
$$= \frac{144^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10$$
$$= 8\pi$$
$$= 25{,}132...$$
$$b \approx 25$$

Vastaus Pienemmän kaaren pituus on $8\pi \approx 25$

407

kaaren pituus $b = 12$
ympyrän säde $r = 8$
keskuskulma α



a)

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = b$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 8 = 12$$

$$\alpha = \frac{12}{16\pi} \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = 85{,}943...^\circ \approx 86^\circ$$

b)

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

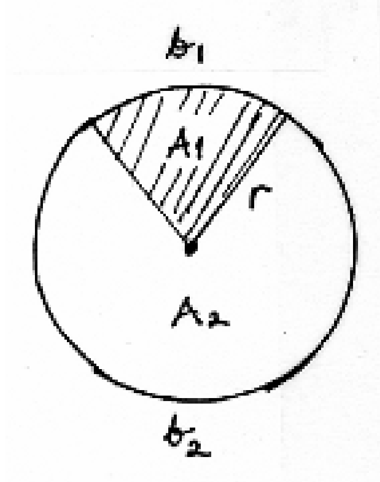
$$= \frac{12}{16\pi} \cdot 360^\circ \cdot \frac{1}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 8^2$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 8^2 = 48 \ \left(\text{m}^2\right)$$

Vastaus a) Kaaren asteluku on 86°
b) Sektorin pinta-ala on 48 m^2

408

Olkoon b_1 Rikun osuus reunasta ja b_2 Panun osuus reunasta.



$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$b_1 = \frac{1}{3} b_2$$

$$A_1 = \frac{1}{2} b_1 r \qquad A_2 = \frac{1}{2} b_2 r$$

Panu saa enemmän kuin Riku prosentteina

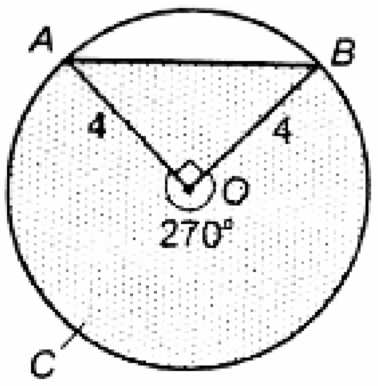
$$\frac{A_2 - A_1}{A_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} b_2 r - \frac{1}{2} b_1 r}{\frac{1}{2} b_1 r} \cdot 100\% \qquad \Big| b_1 = \frac{1}{3} b_2$$

$$= \frac{\frac{1}{2} r \left(b_2 - \frac{1}{3} b_2\right)}{\frac{1}{2} r \cdot \frac{1}{3} b_2} \cdot 100\%$$

$$= \frac{\frac{2}{3} b_2}{\frac{1}{3} b_2} \cdot 100\% = 200\%$$

Vastaus Panu saa pizzaa 200% enemmän kuin Riku

409



Kaari $\overset{\frown}{ACB} = 270^\circ \,(=\alpha)$

$\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$

Siis $\triangle AOB$ on suorakulmainen kolmio.

Segmentin ala

$$A_{\text{seg}} = A_{\text{sektori}} + A_{\text{kolmio}}$$

$$A_{\text{seg}} = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot \pi r^2 + \frac{r\cdot r}{2}$$

$$A_{\text{seg}} = \frac{270^\circ}{360^\circ}\cdot \pi \cdot 4^2 + \frac{4^2}{2}$$

$$A_{\text{seg}} = 12\pi + 8 = 45{,}699...$$

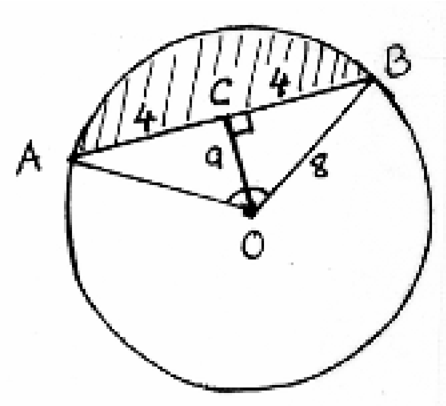
Vastaus Segmentin ala on $12\pi + 8 \approx 46$

410

$AB = 8$

$\sphericalangle AOB = 60^\circ$

Lasketaan kolmion AOB ala.



$\triangle COB$: $\quad a^2 + 4^2 = 8^2$

$$a^2 = 64 - 16$$

$$a^2 = 48$$

$$a = {}_{(}\pm{}_{)} 4\sqrt{3}$$

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{8\cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

Segmentin ala on

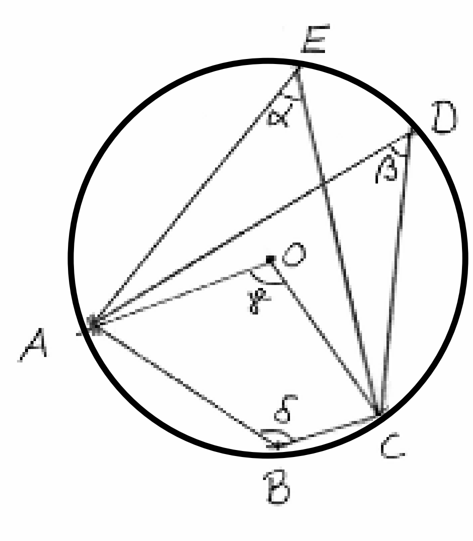
$$A_{\text{segmentti}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}}$$

$$= \frac{\cancel{60^\circ}}{\cancel{360^\circ}_{\cancel{6}\,3}}\cdot \pi \cdot \overset{32}{\cancel{64}} - 16\sqrt{3}$$

$$= \frac{32}{3}\pi - 16\sqrt{3}$$

Vastaus Pienemmän segmentin ala on $\frac{32}{3}\pi - 16\sqrt{3}$

411



a) $\gamma = 110^\circ$, koska kaari ABC on sitä vastaava kaari.

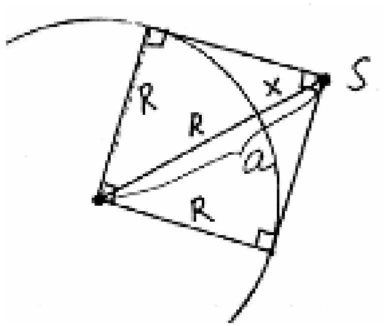
b) Keskuskulmaa γ vastaava kehäkulma on α sekä β.

c) Kehäkulmaa δ vastaava keskuskulma on

$$AOC = 360^\circ - \gamma$$
$$= 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$$

412

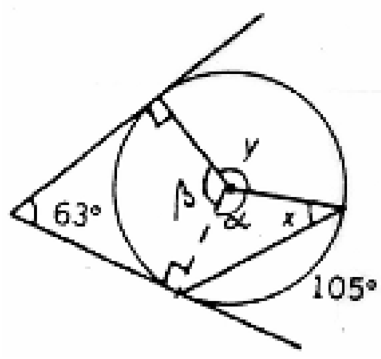
$$a^2 = R^2 + R^2$$
$$a^2 = 2R^2$$
$$a = _{(}\pm_{)}\sqrt{2}R$$
$$x = a - R = \sqrt{2}R - R$$
$$= \left(\sqrt{2} - 1\right)R$$
$$= \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot 6\,400$$
$$= 2650{,}9...$$
$$\approx 2\,700\ (\text{km})$$



Vastaus Satelliitti on 2 700 km korkeudella maanpinnasta

413

Kaarta 105° vastaava keskuskulma α on myös 105°. Tasakylkisen kolmion kantakulma x saadaan yhtälöstä



$$2x + 105^\circ = 180^\circ$$
$$2x = 75^\circ$$
$$x = 37{,}5^\circ$$

Nelikulmion kulmien summa on 360°. Saadaan yhtälö

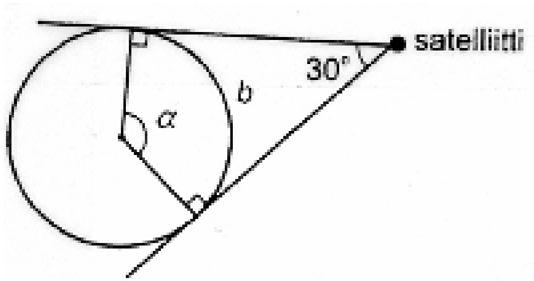
$$\beta + 2 \cdot 90^\circ + 63^\circ = 360^\circ$$
$$\beta = 117^\circ$$

Kulma y saadaan yhtälöstä

$$y + \beta + \alpha = 360^\circ$$
$$y + 117^\circ + 105^\circ = 160^\circ$$
$$y = 138^\circ$$

Vastaus $x = 37{,}5^\circ$ ja $y = 138^\circ$

414

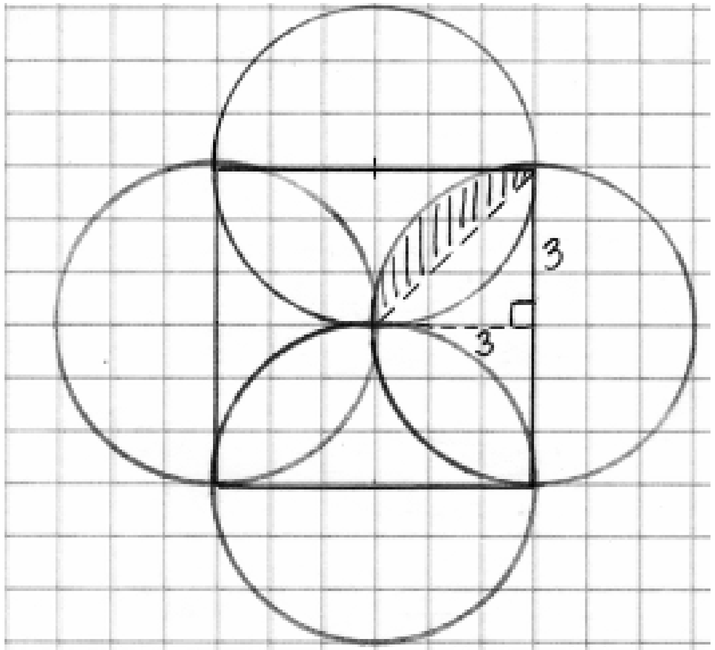


$\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ | α ja 30° ovat suplementtikulmia

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 40\ 000$$
$$= 16\ 666{,}66...$$
$$b \approx 17\ 000\ \text{(km)}$$

Vastaus Kaari b on 17 000 km

415



Nelilehtinen kukkakuvio muodostuu kahdeksasta samanlaisesta segmentistä. Lasketaan yhden segmentin ala.

$$A_{\text{segm}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}}$$
$$A_{\text{segm}} = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{r \cdot r}{2} \qquad |r = 3$$
$$A_{\text{segm}} = \frac{1}{4}\pi \cdot 3^2 - \frac{3 \cdot 3}{2}$$
$$A_{\text{segm}} = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}$$

Kukkakuvion ala on

$$
\begin{aligned}
8A_{\text{segm}} &= 8\left(\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{2}\right)\\
&= 8\cdot\frac{9\pi}{4}-8\cdot\frac{9}{2}\\
&= 18\pi-36
\end{aligned}
$$

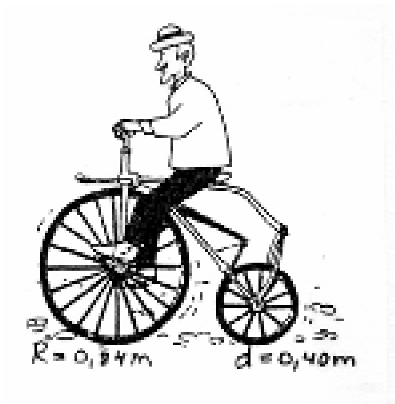
Vastaus Kukkakuvion ala on $18\pi-36$

416

Etupyörän säde $R = 84\text{ cm} = 0{,}84\text{ m}$
Takapyörän halkaisija $d = 40\text{ cm} = 0{,}4\text{ m}$
Takapyörän säde $r = 0{,}2\text{ m}$

a)

$$
\begin{aligned}
s &= 1560\cdot 2\pi\cdot 0.84\\
&= 8233{,}4...\\
&\approx 8200\ (\text{m})
\end{aligned}
$$



b) Saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
x\cdot 2\pi\cdot 0{,}2 &= 1560\cdot 2\pi\cdot 0{,}84\\
x &= \frac{1560\cdot 0{,}84}{0{,}2}\\
x &= 6552
\end{aligned}
$$

Vastaus a) Matka on 8200 m
b) Takapyörä pyörähtää 6552 kertaa

417

Olkoon r_{E} Europan radan säde ja r_{I} Ion radan säde.

$$
\begin{aligned}
2\pi r_{\text{E}} - 2\pi r_{\text{I}} &= 1{,}55\cdot 10^6\\
2\pi\left(r_{\text{E}} - r_{\text{I}}\right) &= 1{,}55\cdot 10^6 \quad |:2\pi\\
r_{\text{E}} - r_{\text{I}} &= \frac{1{,}55\cdot 10^6}{2\pi}\\
r_{\text{E}} - r_{\text{I}} &= 246\,690{,}...\\
r_{\text{E}} - r_{\text{I}} &\approx 250\,000\ (\text{km})
\end{aligned}
$$

Vastaus Europa kiertää Jupiteria 250 000 km kauempana kuin Io

418

Pöytälevyn halkaisija 110 cm $(2r)$

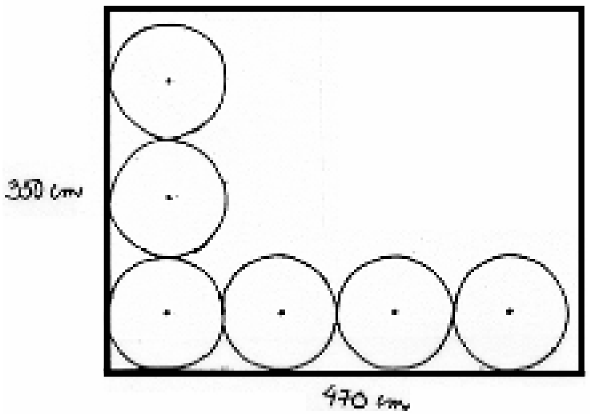
Pituussuunnassa pöytiä $\dfrac{470 \text{ cm}}{110 \text{ cm}} = 4,2727...$ eli 4 pöytää

Leveyssuunnassa pöytiä $\dfrac{350 \text{ cm}}{110 \text{ cm}} = 3,1818...$ eli 3 pöytää

Pöytiä mahtuu yhteensä $4 \cdot 3 = 12$

Pyöreän jalan säde

$$\frac{50}{2} = 25 \text{ (cm)}$$



Vapaa lattiapinta-ala

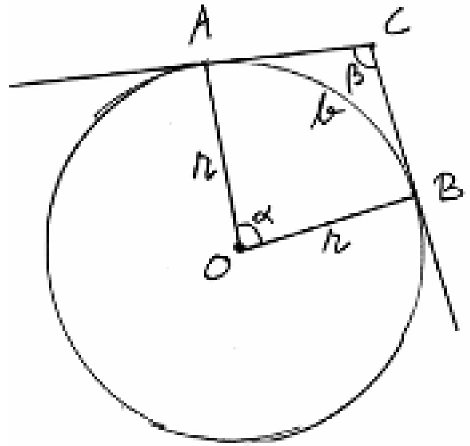
$$A = 350 \cdot 470 \text{cm}^2 - 12 \cdot \pi \cdot 25^2 \text{cm}^2$$
$$= 140\,938,05... \text{ cm}^2$$
$$= 14,09... \text{ m}^2$$
$$\approx 14,1 \text{ m}^2$$

Vastaus Vapaata lattiapintaa jää $14,1 \text{ m}^2$

419

Kaari $AB = b = 1170$ cm

Säde $r = 6400$ km



Kaaren b keskuskulma on α, joten kaaren b pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Saadaan yhtälö

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6400 = 1170 \qquad \Big| \cdot \frac{360^\circ}{2\pi \cdot 6400}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot 1170}{2\pi \cdot 6400}$$

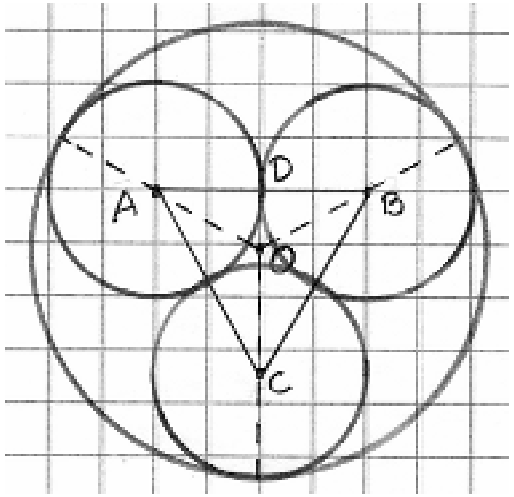
$$\alpha = 10,474...^\circ$$

Keskuskulman ja tangenttikulman summa on 180°, siis

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$
$$= 180 - 10,474...^\circ$$
$$= 169,525...^\circ$$
$$\approx 170^\circ$$

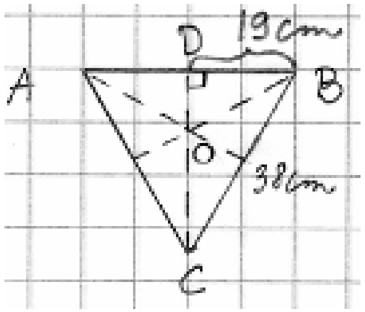
Vastaus Näkökulma on 170°

420



Olkoon pöytätablettien keskipisteet *A*, *B* ja *C* sekä pöydän keskipiste *D*.

Tutkitaan kolmiota *ABC*. Kolmio *ABC* on tasasivuinen, sivun pituus on pöytätabletin halkaisijan pituus 38 cm. Sivu *AB* on 38 cm ja mediaani *CD* puolittaa sen. Siis *DB* on 19 cm.



Lasketaan mediaani *CD* Pythagoraan lauseen avulla kolmiosta *CBD*.

$$CD^2 + 19^2 = 38^2$$

$$CD^2 = 38^2 - 19^2$$

$$CD^2 = (2\cdot 19)^2 - 19^2$$

$$CD^2 = 4\cdot 19^2 - 19^2$$

$$CD^2 = 3\cdot 19^2$$

$$CD = (\pm)\sqrt{19^2\cdot 3}$$

$$CD = 19\sqrt{3}$$

Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin 2:1 kärjestä lukien. Siis

$$CO = \frac{2}{3}CD \qquad \Big| CD = 19\sqrt{3}$$

$$CO = \frac{2}{3}\cdot 19\sqrt{3}$$

a) Pöydän säde

$$\begin{aligned} r &= OC + 19 \\ &= \frac{2}{3}\cdot 19\sqrt{3} + 19 \\ &= 19\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right) \\ &= 40{,}939... \approx 41\ (\text{cm}) \end{aligned}$$

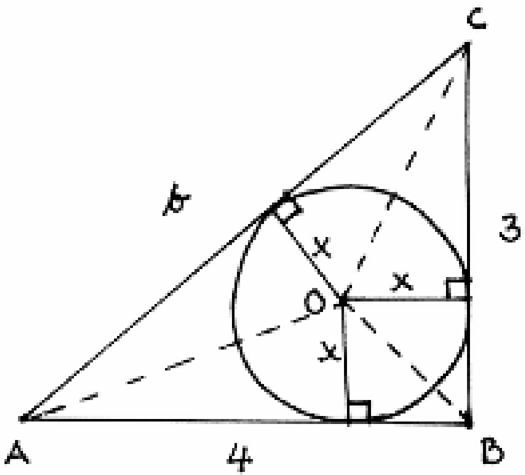
b)

$$\frac{A_{\text{tabletit}}}{A_{\text{pöytä}}} = \frac{3\cdot\pi\cdot\cancel{19^2}}{\pi\cdot\cancel{19^2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}+1\right)^2} = 0{,}6461... \approx 65\%$$

Vastaus a) Pöydän säde on 41 cm
b) Tabletit peittävät 65% pöydästä

421

Ympyrän säde on kohtisuorassa kylkiä vastaan. Yhdistetään kolmion kärkipisteet ympyrän keskipisteeseen. Lasketaan muodostuvien kolmioiden ala.



Pythagoraan lause:

$$3^2 + 4^2 = b^2$$
$$b^2 = 25$$
$$b = (\pm)5$$

$$\triangle ABO : A_1 = \frac{4 \cdot x}{2}$$
$$\triangle BCO : A_2 = \frac{3 \cdot x}{2}$$
$$\triangle ACO : A_3 = \frac{5 \cdot x}{2}$$

Koko kolmion ala on

$$A_{koko} = A_1 + A_2 + A_3$$
$$\frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{4x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{5x}{2}$$
$$12x = 12$$
$$x = 1$$

Vastaus Säde on 1

422

Väite: Sektorin ala on puolet kaaren pituuden ja säteen tulosta eli

$$A_{sektori} = \frac{br}{2}$$

Todistus: Olkoon sektorin keskuskulma α. Sektorin pinta-ala on

$$A_{sektori} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$
$$= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \cdot \frac{r}{2} \qquad \left| b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r \right.$$
$$= b \cdot \frac{r}{2}$$
$$= \frac{br}{2}$$

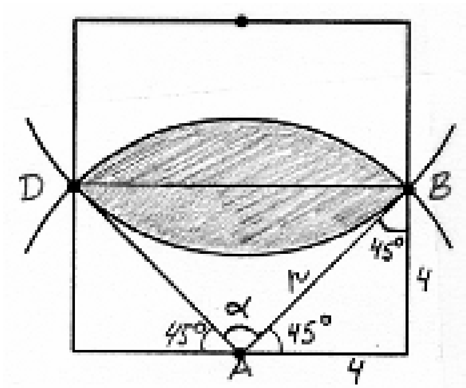
Siis $A_{sektori} = \frac{br}{2}$

□

423

Sektorin säde *r* saadaan Pythagoraan lauseen avulla

$$r^2 = 4^2 + 4^2$$
$$r^2 = 32$$
$$r = _{(}\pm_{)}\sqrt{32}$$
$$r = 4\sqrt{2}$$



Sektorin keskuskulma $\alpha = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot \pi r^2 = \frac{90^\circ}{360^\circ}\cdot \pi \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\cdot 6 \cdot 2 = 8\pi$$

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{1}{2}\cdot r^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 16$$

$$A_{\text{segm}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} = 8\pi - 16$$

Koko varjostettu alue on

$$2\cdot A_{\text{segmentti}} = 2\cdot\left(8\pi - 16\right) = 16\pi - 32$$

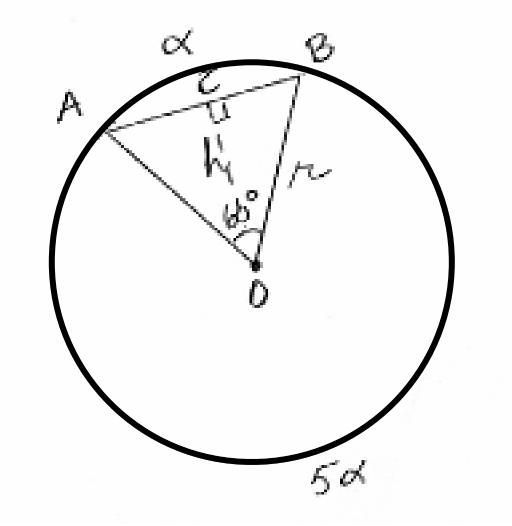
Varjostettu alue prosentteina neliön alasta

$$\frac{16\pi - 32}{8^2}\cdot 100\% = \frac{16\left(p-2\right)}{64}\cdot 100\%$$
$$= \frac{\pi - 2}{4}\cdot 100\% = \left(\pi - 2\right)\cdot 25\%$$
$$= 28{,}53...\% \approx 29\%$$

Vastaus $\left(\pi - 2\right)\cdot 25\% \approx 29\%$

424

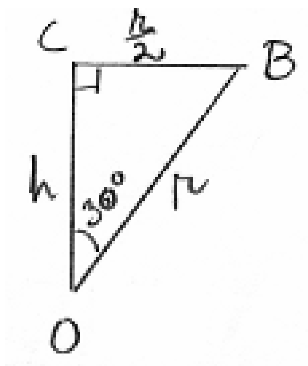
Ympyrän kehä jakaantuu suhteessa 1:5. Siis



$$\alpha + 5\alpha = 360^\circ$$
$$6\alpha = 360^\circ$$
$$\alpha = 60^\circ$$

Kolmio *ABO* on tasasivuinen, koska $AO = BO = r$ ja kolmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle O = 60^\circ$.
Lasketaan kolmion *ABO* pinta-ala.

Ratkaistaan kolmion korkeus *h*.



$$h^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$$
$$h^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3}{4}r^2$$
$$h = _{(}\pm_{)}\sqrt{\frac{3}{4}r^2}$$
$$h = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{rh}{2} = \frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

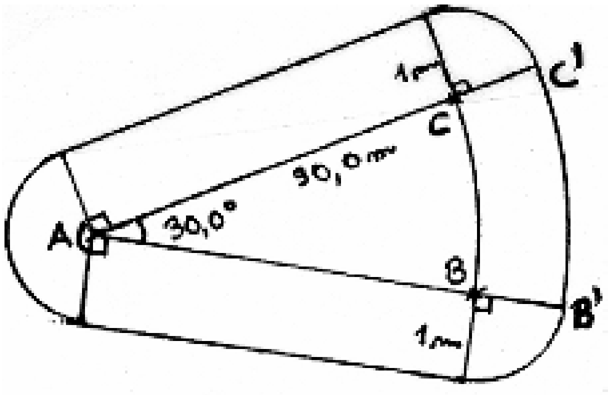
$$A_{\text{iso segm}} = A_{\text{iso sekt}} + A_{\text{kolmio}}$$
$$= \frac{300^\circ}{360^\circ}\cdot\pi r^2 + \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$
$$= r^2\left({}^{2)}\frac{5\pi}{6} + {}^{3)}\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = r^2\left(\frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{12}\right)$$

$$A_{\text{pieni segm}} = A_{\text{pieni sekt}} - A_{\text{kolmio}}$$
$$= \frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$
$$= r^2\left({}^{2)}\frac{\pi}{6} - {}^{3)}\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = r^2\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right)$$

$$\frac{A_{\text{pieni segm}}}{A_{\text{iso segm}}} = \frac{\cancel{r^2}\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right)}{\cancel{r^2}\left(\frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{12}\right)} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{12}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}} = 0{,}2969... \approx 0{,}30$$

Vastaus Alojen suhde on $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}} \approx 0{,}30$

425



$\sphericalangle A = 360^\circ - (30^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 150^\circ$

$\sphericalangle B = 90^\circ$

$\sphericalangle C = 90^\circ$

Toimitsija kulkee reitin

$2 \cdot$ säde AB:	$2 \cdot 90{,}0 = 180$
ulkokaari $B'C'$:	$\dfrac{30^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 91{,}0 = \dfrac{\pi}{6} \cdot 91$
$2 \cdot$ nurkka B:	$2 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \pi$
$1 \cdot$ nurkka A:	$\dfrac{150^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 = \dfrac{5}{6}\pi$

Koko reitin pituus on

$$180 + \frac{\pi}{6} \cdot 91 + \pi + \frac{5}{6}\pi = 180 + 17\pi = 233{,}407... \approx 233 \ (\text{m})$$

Vastaus Toimitsija kulkee reitin, jonka pituus on 233 m

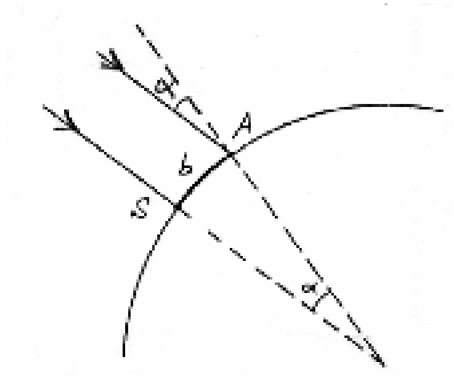
426

$A =$ Aleksandria

$S =$ Syene

Säteiden suunta poikkesi viideskymmenesosan täydestä kulmasta.

Siis $\alpha = \dfrac{360^\circ}{5} = 7{,}2^\circ$



Kaari $b = 5\ 000$ stadionia

Saadaan yhtälö

$$b = 5000 \cdot s \qquad \left| \, b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot p, \ \text{stadion } s = 190 \ \text{m} \right.$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot p = 5000 \cdot 190 \qquad \left| \cdot \frac{360^\circ}{\alpha} \right.$$

$$p = 5000 \cdot 190 \cdot \frac{360^\circ}{\alpha} \qquad \left| \, \alpha = 7{,}2^\circ \right.$$

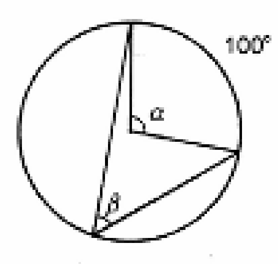
$$p = \frac{5000 \cdot 190 \cdot 360^\circ}{7{,}2^\circ}$$

$$p = 47\ 500\ 000 \ (\text{m})$$

$$p = 47\ 500 \ \text{km}$$

Vastaus Maan ympärysmitta on 47 500 km

427



Kaaren asteluku on sama kuin kaarta vastaavan keskuskulman asteluku, joten $\alpha = 100^\circ$.

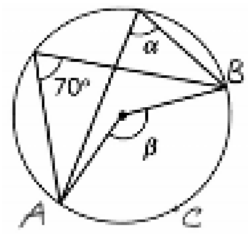
Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta, joten

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

Vastaus Kehäkulma on 50° ja keskuskulma 100°

428

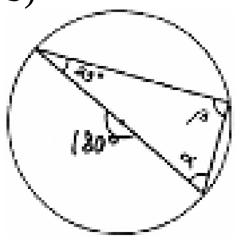
a)



$\alpha = 70^\circ$	Samaa kaarta *ACB* vastaavat kehäkulmat
$\beta = 2\alpha = 140^\circ$	Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta. Kaaren *ACB* kehäkulma on α ja keskuskulma on β

Vastaus $\alpha = 70^\circ$ ja $\beta = 140^\circ$

b)

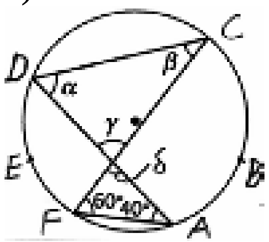


$\beta = 90^\circ$	Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - 25^\circ - \beta \\ &= 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ \\ &= 65^\circ\end{aligned}$$

Vastaus $\alpha = 65^\circ$ ja $= 90^\circ$

c)



$\delta = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

$\gamma = \delta$ | ristikulmat δ ja γ

$\gamma = 80^\circ$

$\alpha = 60^\circ$ | Samaa kaarta ABC vastaavat kehäkulmat

$\beta = 40^\circ$ | Samaa kaarta *DEF* vastaavat kehäkulmat

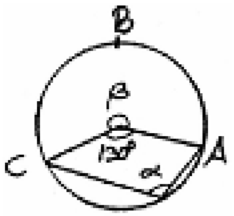
Kulma β toisin:

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$
$$= 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$$

Vastaus $\alpha = 60^\circ,\ \beta = 40^\circ,\ \gamma = 80^\circ$

d)

$\beta = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$



$\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ | Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta. Kaaren *ABC* kehäkulma on α ja keskuskulma β

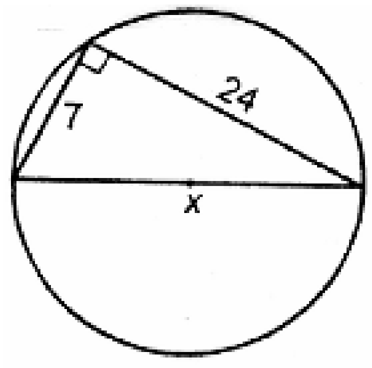
$$\alpha = \frac{230^\circ}{2} = 115^\circ$$

Vastaus $\alpha = 115^\circ$

429

Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.
Pythagoraan lauseen mukaan

$$x^2 = 7^2 + 24^2$$
$$x^2 = 625$$
$$x = _{(}\pm_{)}\sqrt{625}$$
$$x = 25$$



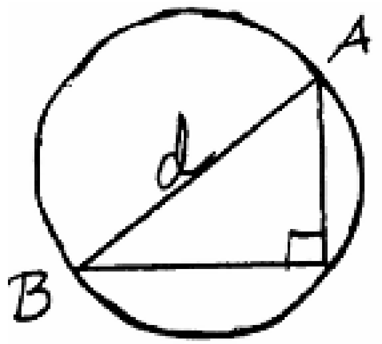
Ympyrän säde on $\dfrac{x}{2} = \dfrac{25}{2} = 12\dfrac{1}{2}$

Vastaus $12\dfrac{1}{2}$

430

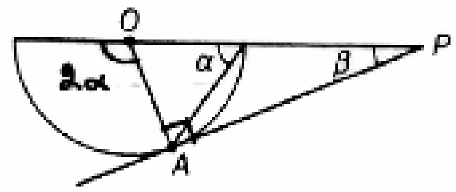
Kehäkulma on suora, joten alkupisteen ja loppupisteen yhdysjana *AB* on ympyrän halkaisija *d*.

$$d = \sqrt{250^2 + 150^2}$$
$$= 291{,}5...$$
$$d \approx 290\ \text{m}$$



Vastaus Suon halkaisija on 290 m

431



Säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten $\sphericalangle A = 90^\circ$.

Kehäkulmaa α vastaava keskuskulma on 2α, jonka vieruskulmana on

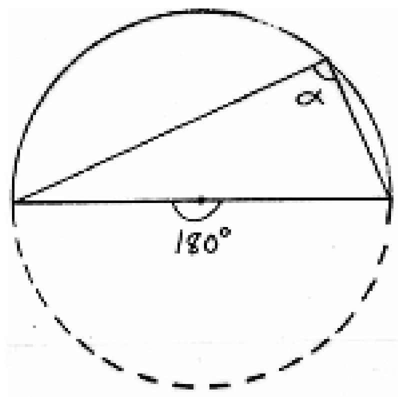
$$\sphericalangle AOP = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\triangle APO: \quad 90^\circ + \beta + \sphericalangle AOP = 180^\circ$$
$$90^\circ + \beta + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ$$
$$\beta = 2\alpha - 90^\circ$$

Vastaus $\quad \beta = 2\alpha - 90^\circ$

432

a)

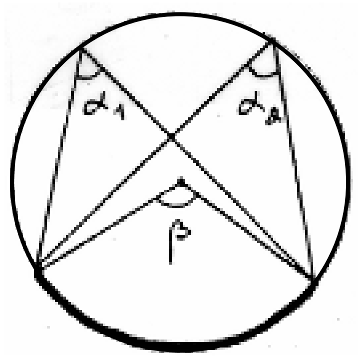


Puoliympyrää vastaava keskuskulma on 180°.
Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta, joten

$$\alpha = \frac{180^\circ}{2}$$
$$\alpha = 90^\circ$$

□

b)

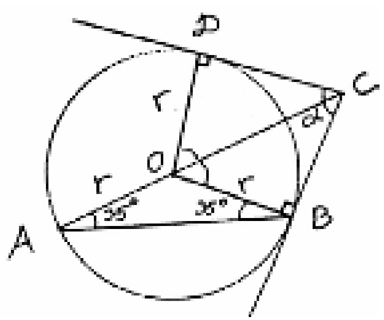


Väite: $\quad \alpha_1 = \alpha_2$
Todistus:

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{2} \text{ ja } \alpha_2 = \frac{\beta}{2}$$ | Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta

Siis $\alpha_1 = \alpha_2$. □

433



Kolmio *AOB* on tasakylkinen, joten $\sphericalangle ABO = 35^\circ$.

$\sphericalangle AOB = 180^\circ - 2\cdot 35^\circ = 110^\circ$

$\sphericalangle BOC = 180^\circ - \sphericalangle AOB$

$= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

(Toisin: $\sphericalangle BOC = 2\cdot\sphericalangle CAB = 70^\circ$, koska kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta)

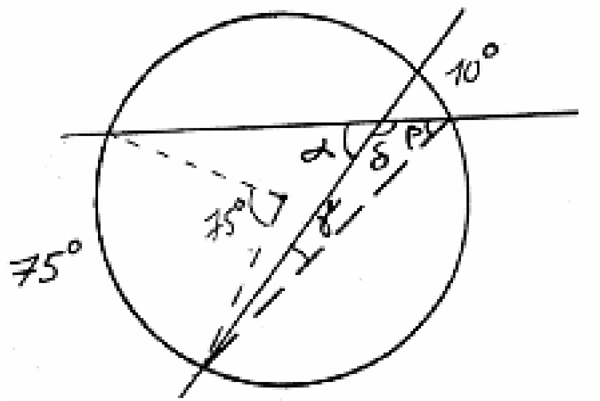
$\sphericalangle COD = \sphericalangle COB = 70^\circ$, koska suorakulmaiset kolmiot *COD* ja *COB* ovat yhtenevät, sillä kateetit *OD* ja *OB* ovat yhtä pitkät ja hypotenuusa *OC* on yhteinen ja Pythagoraan lauseen mukaan kateetit *DC* ja *BC* ovat myös keskenään yhtä pitkät.
Nelikulmiosta *BCDO* saadaan

$90^\circ + \alpha + 90^\circ + 2\cdot 70^\circ = 360^\circ$

$\alpha = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 140^\circ$

$\alpha = 40^\circ$

b)



$\beta = \dfrac{75^\circ}{2}$ | Kehäkulma β on puolet keskuskulmasta 75° (kaaren asteluku)

$\beta = 37{,}5^\circ$

$\gamma = \dfrac{10^\circ}{2}$ | Kehäkulma γ on puolet keskuskulmasta 10° (kaaren asteluku)

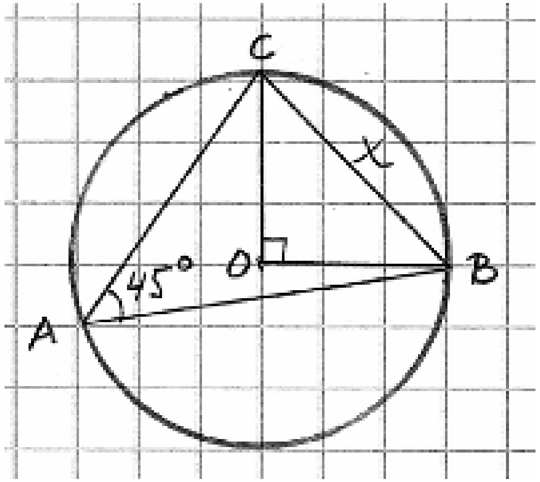
$\gamma = 5^\circ$

$\delta = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 37{,}5^\circ - 5^\circ = 137{,}5^\circ$

$\alpha = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 137{,}5^\circ = 42{,}5^\circ$

Vastaus a) $\alpha = 40^\circ$
b) $\alpha = 42{,}5^\circ$

434



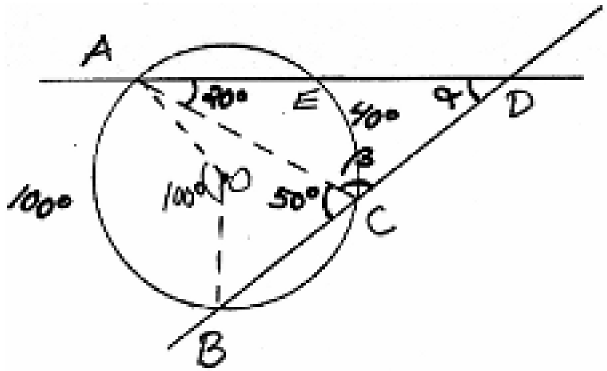
Kehäkulma $CAB\_ = 45^{\circ}$, joten sitä vastaava keskuskulma $COB = 2 \cdot 45^{\circ} = 90^{\circ}$.

Jänteen *BC* pituus saadaan Pythagoraan lauseen avulla

$$x^2 = 15^2 + 15^2$$
$$x^2 = 15^2 \cdot 2$$
$$x = _{(}\pm_{)} \sqrt{15^2 \cdot 2}$$
$$x = 15\sqrt{2}$$
$$x = 21{,}21... \approx 21 \text{ (m)}$$

Vastaus Jänteen pituus on 21 m

435



Kaaren asteluku on yhtä suuri kuin kaarta vastaavan keskuskulman asteluku.
Siis kulma $\sphericalangle AOB = 100^{\circ}$.
Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.

Siis kulma $ACB = \dfrac{100^{\circ}}{2} = 50^{\circ}$.

Samoin kulma *DAC* on puolet sitä vastaavasta keskuskulmasta *EOC*.

Siis kulma $DAC = \dfrac{40^{\circ}}{2} = 20^{\circ}$.

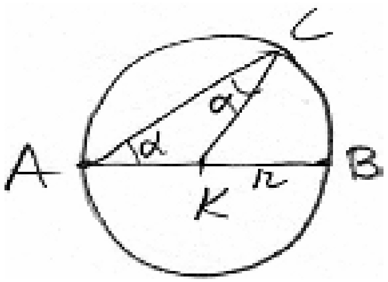
$\beta = 180^{\circ} - 50^{\circ} = 130^{\circ}$ | Vieruskulmat

$\alpha = 180^{\circ} - 20^{\circ} - \beta$
$= 180^{\circ} - 20^{\circ} - 130^{\circ} = 30^{\circ}$ | Kolmion kulmien summa on 180°

Vastaus $\alpha = 30^{\circ}$

436

Merkitään $\sphericalangle CAB = \alpha$.



Kolmio *AKC* on tasakylkinen, sillä $AK = KC = r$

$\sphericalangle AKC = 180^\circ - 2\alpha$ | Kolmion kulmien summa on 180°

$\sphericalangle CKB = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha)$ | Vieruskulmat

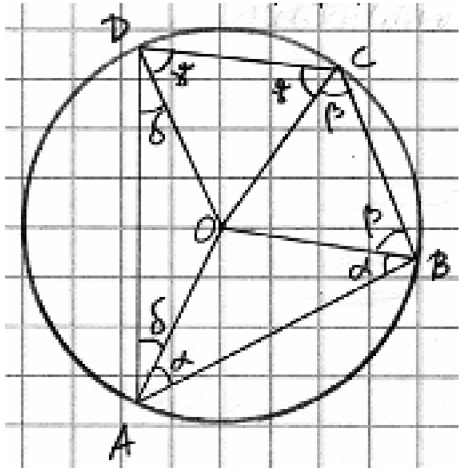
$\sphericalangle CKB = 2\alpha$

Siis $\sphericalangle CAB = \frac{1}{2}\sphericalangle CKB$

□

437

Tapaus 1: Ympyrän keskipiste nelikulmion sisällä.



Kolmiot *AOB*, *BOC*, *COD* ja *DOA* ovat kaikki tasakylkisiä kolmioita, sillä niillä on kylkinä ympyrän säteet.

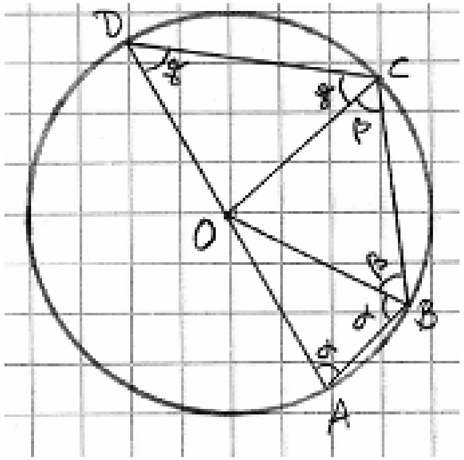
Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.

Nelikulmion kulmien summa on 360°. Saadaan

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$$
$$2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360^\circ \quad |:2$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ on jännenelikulmion vastakkaisten kulmien summa, joka on siis 180°. Siten jännenelikulmion vastakkaiset kulmat ovat toistensa suplementtikulmia.

Tapaus 2: Ympyrän keskipiste on nelikulmion sivulla.



Muodostetaan nelikulmion kulmien summa kuten edellä.

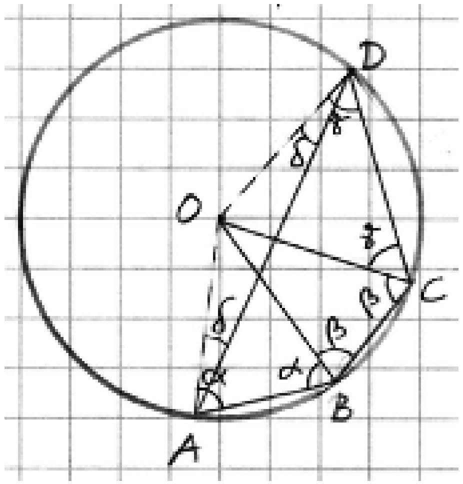
$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ \quad |:2$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$\alpha + \beta + \gamma$ on jännenelikulmion vastakkaisten kulmien summa, joka on siis 180°.
Siten jännenelikulmion vastakkaiset kulmat ovat toistensa suplementtikulmia.

Tapaus 3: Ympyrän keskipiste on nelikulmion ulkopuolella.



Nelikulmion kulmien summa on

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\delta = 360^\circ$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma - \delta) = 360^\circ \quad |:2$$

$$\alpha + \beta + \gamma - \delta = 180^\circ$$

$\alpha + \beta + \gamma - \delta$ on jännenelikulmion vastakkaisten kulmien summa, joten myös tässä tapauksessa jännenelikulmion vastakkaiset kulmat ovat toistensa suplementtikulmia.