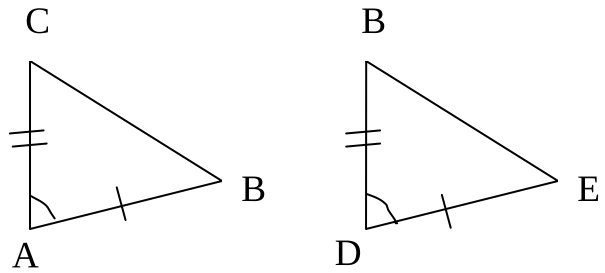
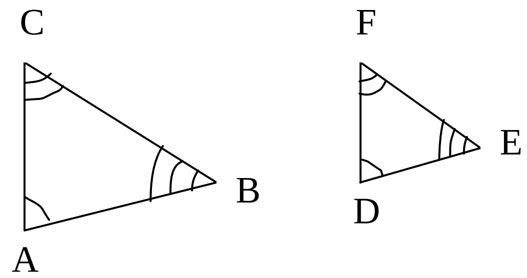
501

a)



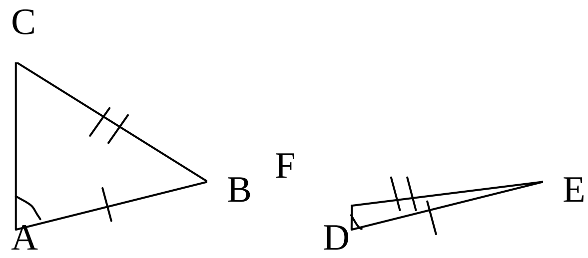
Kolmiossa *ABC* kaksi yhtä pitkää sivua kuin kolmiossa *DEF* ja näiden sivujen väliset kulmat ovat yhtä suuret, joten kolmiot ovat yhtenevät yhtenevyyslauseen sks perusteella.

b)



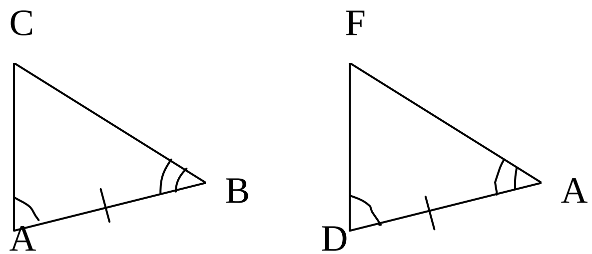
Ei ole olemassa sellaista kolmioiden yhtenevyyslausetta, jossa olisi pelkkiä kulmia. Kolmiot ovat samanmuotoiset, mutta eivät välttämättä samankokoiset, eivätkä siis yhtenevät.

c)



Kolmiossa *ABC* kaksi yhtä pitkää sivua kuin kolmiossa *DEF* ja näistä sivuista toisten vastaiset kulmat ovat yhtä suuret. Tämä viittaa lauseeseen ssk. Kuitenkaan ei ole sanottu, ovatko toisten yhtä pitkien sivujen vastaiset kulmat teräviä vai tylppiä. Kuvassa on esitetty tapaus, jossa toinen näistä kulmista on terävä ja toinen tylppä. Kolmiot eivät siis ole yhteneviä.

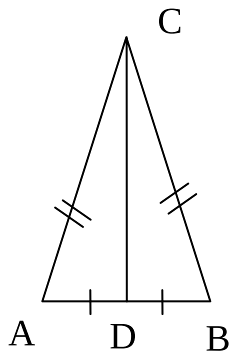
d)



Kolmiossa *ABC* kaksi yhtä suurta kulmaa kuin kolmiossa *DEF* ja näiden kulmien väliset sivut ovat yhtä pitkät, joten kolmiot ovat yhtenevät yhtenevyyslauseen ksk perusteella.

502

a)



Koska

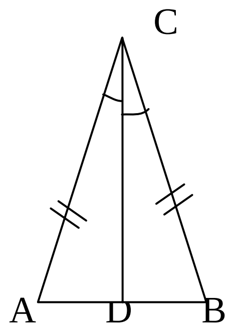
$AC = BC$ (Tasakylkinen kolmio ABC)
$AD = BD$ (CD on mediaani)
CD yhteinen sivu,

niin

$\Delta\, ADC \cong \Delta\, BDC$ (sss).

Tällöin vastinkulmat ovat yhtä suuret, joten $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. $\square$

b)



Koska

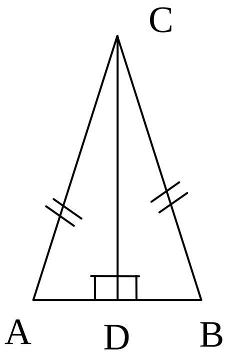
$AC = BC$ (Tasakylkinen kolmio ABC)
$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$ (CD kulman C puolittaja)
CD yhteinen sivu,

niin

$\Delta\, ADC \cong \Delta\, BDC$ (sks)

Tällöin vastinkulmat ovat yhtä suuret, joten $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. $\square$

c)



Koska

AC = *BC* (Tasakylkinen kolmio *ABC*)
CD yhteinen sivu
< *ADC* = < *BDC* (Korkeusjana kohtisuorassa kantaa vastaan)

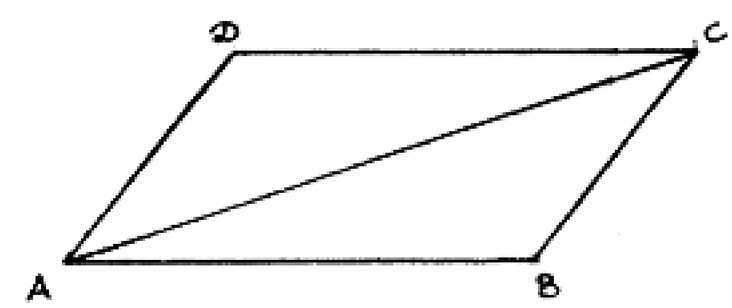
Koska lisäksi yhteisen sivun *CD* vastaiset kulmat *CAD* ja *CBD* ovat molemmat teräviä niin

$\Delta\, ADC \cong \Delta\, BDC$ (ssk)

Tällöin vastinkulmat ovat yhtä suuret, joten $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. □

503

Väite: Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.
Todistus:



Piirretään suunnikkaalle *ABCD* lävistäjä *AC*.
Kolmiossa *CAB* ja *ACD* on

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ | samankohtaiset kulmat, sillä $AB \parallel CD$
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$ | samankohtaiset kulmat, sillä $BC \parallel AD$
Sivu AC on yhteinen

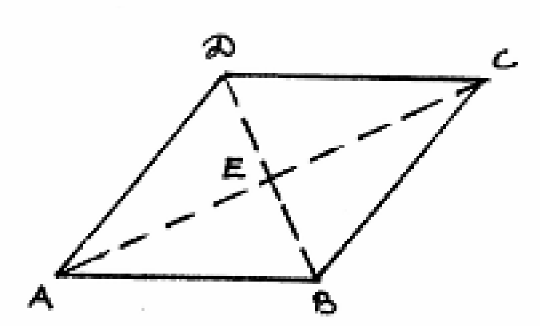
Tällöin $\triangle CAB \cong \triangle ACD$ (ksk).

Yhtenevien kolmioiden vastinosina *AB*=*CD* ja *BC*=*AD*, joten suunnikkaiden vastakkaiset sivut ovat keskenään yhtä pitkät. □

504

Väite: Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Todistus:



Merkitään lävistäjien leikkauspistettä kirjaimella *E*.

$\triangle ABE \cong \triangle CBE \cong \triangle CDE \cong \triangle ADE$ (sss)

$AB = BC = CD = DA$ | neljäkäs

$BE = ED$ ja $AE = EC$ | suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa

$\sphericalangle E$ on vastinkulma yhtenevissä kolmioissa.

Merkitään $\sphericalangle E = \alpha$.

$$4\alpha = 360^\circ$$

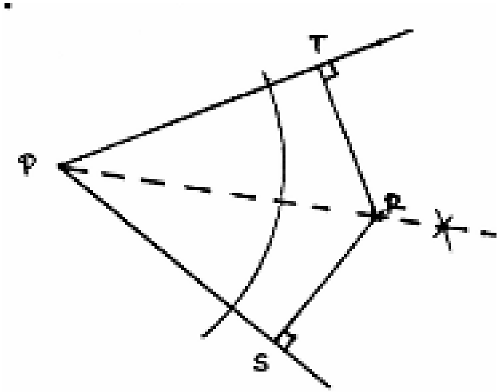
$$\alpha = 90^\circ$$

joten $\sphericalangle E = 90^\circ$ kaikissa kolmioissa.
Siis $AC \perp BD$, joten neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. □

505

Väite: Kulmanpuolittajan jokainen piste on yhtä etäällä kulman kyljistä.

Todistus:



Valitaan kulman *P* puolittajalta mielivaltainen piste *R* ja piirretään pisteen *R* kautta kulman *P* kyljille normaalit. Normaalit leikkaavat kulman kyljet pisteissä *S* ja *T*.

Kolmioissa *PSR* ja *PTR*

$\sphericalangle PTR = \sphericalangle PSR$ | normaalit

$\sphericalangle TPR = \sphericalangle SPR$ | kulman puolitus

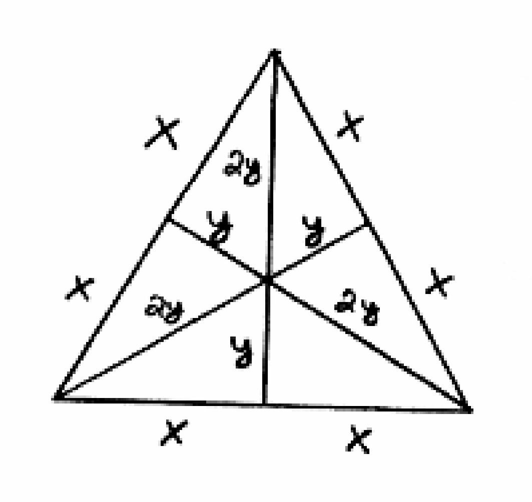
Sivu *PR* on yhteinen

Tällöin $\triangle PSR \cong \triangle PTR$ (kks).
Yhtenevien kolmioiden vastinosina $RT = RS$.

Koska *R* on mielivaltainen kulmanpuolittajalla sijaitseva piste, on kulmanpuolittajan jokainen piste yhtä etäällä kulman kyljistä. □

506

Mediaanit eli keskijanat puolittavat kolmion sivut.
Koska tasasivuisen kolmion keskijanat ovat yhtä pitkät, merkitään osia kirjaimella *x*.



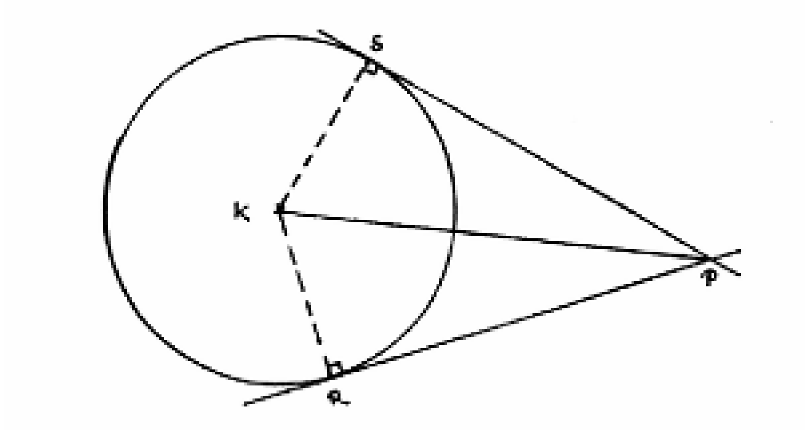
Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit 2:1 kärjestä lukien.
Koska tasasivuisen kolmion mediaanit ovat keskenään yhtä pitkät (symmetrisyys), merkitään mediaanin osia 2*y* ja *y*.

Pienet kuusi kolmiota ovat keskenään yhteneviä sss-yhtenevyyslauseen mukaan. □

507

a)
Väite: Tangenttikulman kärjen ja ympyrän keskipisteen yhdysjana puolittaa tangenttikulman.

Todistus:



Piirretään tangenttikulman kärjen *P* ja ympyrän keskipisteen *K* yhdysjana *PK*.

Kolmioissa *PKR* ja *PKS* on

$KR = KS$ | säde
sivu KP on yhteinen
$\sphericalangle R = \sphericalangle S \; (= 90^\circ)$

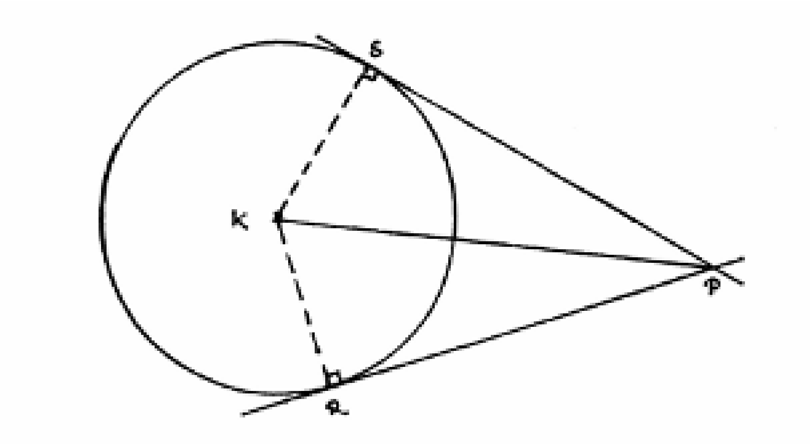
ja sivuja *KR* ja *KS* vastapäätä olevat kulmat ovat teräviä.

Tällöin $\triangle PKR \cong \triangle PKS$ (ssk).

Yhtenevien kolmioiden vastinosina $\sphericalangle SPK = \sphericalangle RPK$, joten yhdysjana *KP* puolittaa tangenttikulman $\sphericalangle SPR$. □

b)
Väite: Tangenttikulman kyljet ovat yhtä pitkät.

Todistus:



Piirretään tangenttikulman kärjen *P* ja ympyrän keskipisteen *K* yhdysjana *PK*.

Kolmioissa *SKP* ja *RKP* on

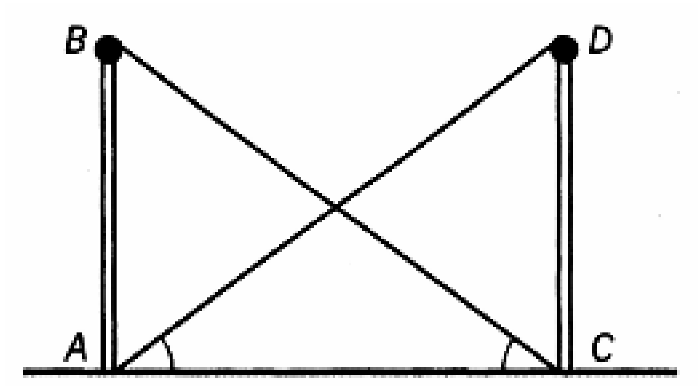
$KR = KS$ | säde
sivu KP on yhteinen
$\sphericalangle R = \sphericalangle S\ (= 90^\circ)$

ja sivuja *KR* ja *KS* vastapäätä olevat kulmat ovat teräviä.

Tällöin $\triangle SKP \cong \triangle RKP$ (ssk).

Yhtenevien kolmioiden vastinosina *PR*=*PS*, joten tangenttikulman kyljet ovat yhtä pitkät. □

508



Kolmioissa *ACB* ja *ACD* on

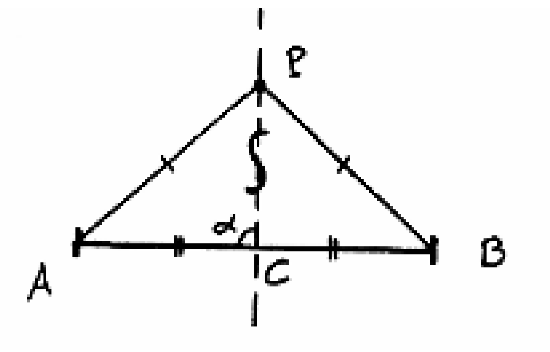
1) AC yhteinen
2) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA = 90^\circ$
3) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DAC$ | oletus

Siis

$\triangle ACB \cong \triangle CAD$ (ksk), joten *AB*=*CD*.

Näin ollen pylväät ovat yhtä korkeat. □

509



Tapaus 1. Piste P ei ole janalla AB.
Olkoon piste C janan AB keskipiste.
Osoitetaan, että $\alpha = 90^\circ$, jolloin suora PC on janan AB keskinormaali.

Koska
AP=BP (Piste P on yhtä kaukana janan AB päätepisteistä)
AC=CB (C on janan AB keskipiste)
PC yhteinen

niin $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ (sss).

Tällöin vastinkulmat ovat yhtä suuret, joten $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCP = \alpha$.
Saadaan

$$\begin{aligned}\sphericalangle ACP + \sphericalangle BCP &= 180^\circ\\ \alpha + \alpha &= 180^\circ\\ 2\alpha &= 180^\circ\\ \alpha &= 90^\circ\end{aligned}$$

Tapaus 2. Piste P on janalla AB.
Väite on triviaali, koska piste P on tällöin janan AB keskipiste. □

510

Pölypunkki ja siitä mikroskoopilla otettu kuva ovat keskenään yhdenmuotoiset. Merkitään punkin kokoa kirjaimella *x*.

Koska mittakaava on vastinosien pituuksien suhde, saadaan verranto

$$\frac{x}{9} = \frac{1}{300}$$
$$300x = 9$$
$$x = 0{,}03 \quad (cm)$$

Vastaus Pölypunkin koko on 0,3 mm.

511

a) Mittakaava on

$$k = \frac{241{,}5\text{ cm}}{483\text{ km}} = \frac{241{,}5\text{ cm}}{483 \cdot 10^5\text{ cm}} = \frac{1}{200\ 000}$$

b) Olkoon *x* Kitisen pituus. Saadaan verranto

$$\frac{139\text{ cm}}{\text{x}} = \frac{1}{200\ 000}$$

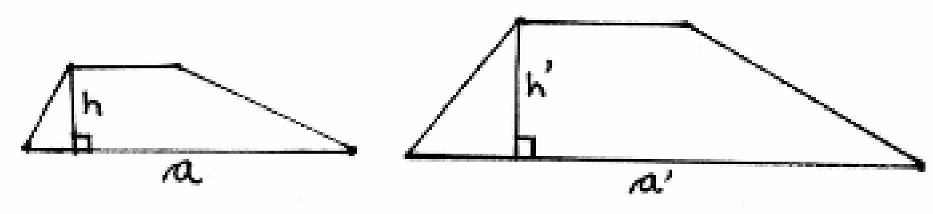
$$x = 200\ 000 \cdot 139\text{ cm}$$

$$x = 27\ 800\ 000\text{ cm}$$

$$x = 278\text{ km}$$

Vastaus a) 1:200 000 b)278 km

512



Merkitään tunnettuja osia kirjaimilla *a*, *h* ja *h'* sekä kysyttyä kantaa kirjaimella *a*'.

Tapa 1

Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen suhde on vakio, joten

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'}$$

$$a' = \frac{ah'}{h} \qquad \left| \begin{array}{l} a = 3{,}8\text{ cm} \\ h = 2{,}3\text{ cm} \\ h' = 3{,}6\text{ cm} \end{array} \right.$$

$$a' = \frac{3{,}8 \cdot 3{,}6}{2{,}3} = 5{,}7\text{ (cm)}$$

Tapa 2

Kuvioiden mittakaava *k* on

$$k = \frac{h}{h'} = \frac{2{,}4}{3{,}6} = \frac{2}{3}$$

Siis vastinjanojen suhde on

$$\frac{a}{a'} = \frac{2}{3}$$

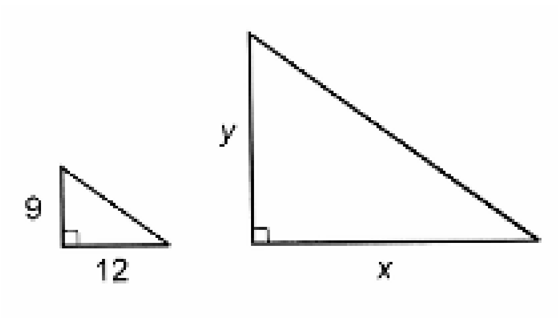
$$a' = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 3{,}8 = 5{,}7\text{ (cm)}$$

Vastaus Tontin kanta on 5,7 cm.

513

Kolmioiden vastinosien suhde on 8:3. Saadaan verranto

$$\frac{8}{12}=\frac{8}{3}$$
$$3x=12\cdot 8$$
$$x=32$$



Vastaavasti

$$\frac{y}{9}=\frac{8}{3}$$
$$3y=9\cdot 8$$
$$y=24$$

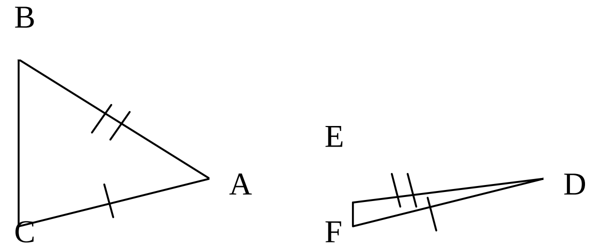
Suurennetun kolmion kateetit ovat 24 ja 32. Hypotenuusa on

$$\sqrt{24^2+32^2}=40$$

Vastaus Kolmion sivut ovat 24, 32 ja 40.

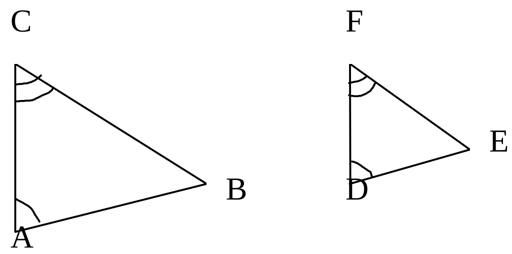
514

a)



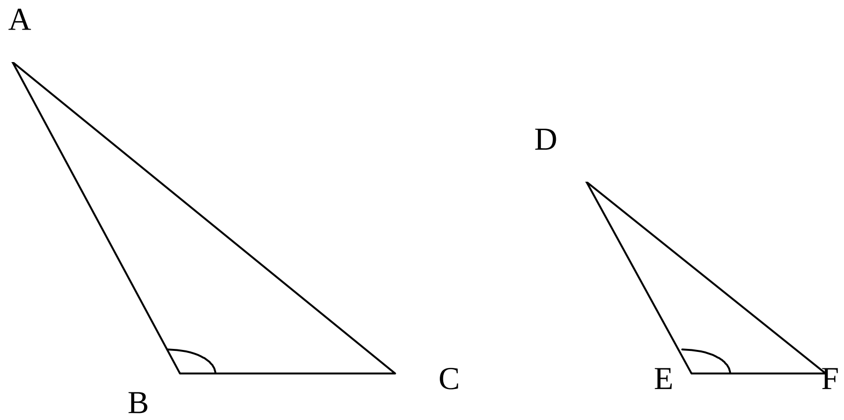
Ei voida, sillä ei ole olemassa yhdenmuotoisuuslausetta ss. Kuvassa on esimerkki, joka täyttää annetut ehdot, mutta kolmiot eivät ole yhdenmuotoiset.

b)



Kyllä, kolmiossa ABC on kaksi yhtä suurta kulmaa kuin kolmiossa DEF, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset lauseen kk perusteella.

c)

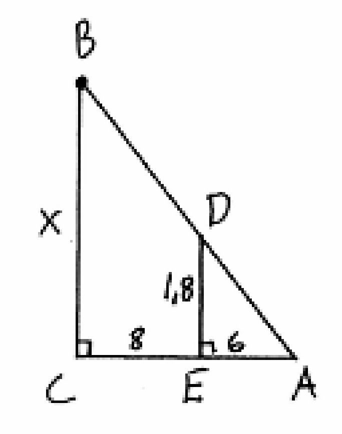


Kolmioissa *ABC* ja *DEF* kaksi sivua ovat verrannolliset ja näistä sivuista toisten vastaiset kulmat ovat yhtä suuret. Tällöin kolmiot ovat yhdenmuotoiset, jos toisten verrannollisten sivujen *BC* ja *EF* vastaiset kulmat ovat samaa tyyppiä eli joko teräviä, suoria tai tylppiä.

Kulmat ABC ja DEF ovat tylppiä. Jos kolmiossa on tylppä kulma, on kaikkien muiden kulmien oltava teräviä, koska kolmion kulmien summa on 180º. Tällöin myös kulmat *CAB* ja *FDE* ovat molemmat teräviä, eli ne ovat teräviä.

Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset lauseen ssk perusteella.

515



Koska $\triangle ABC \sim \triangle ADE$
(kk, yhteinen kulma *A* ja suora kulma), saadaan yhtälö

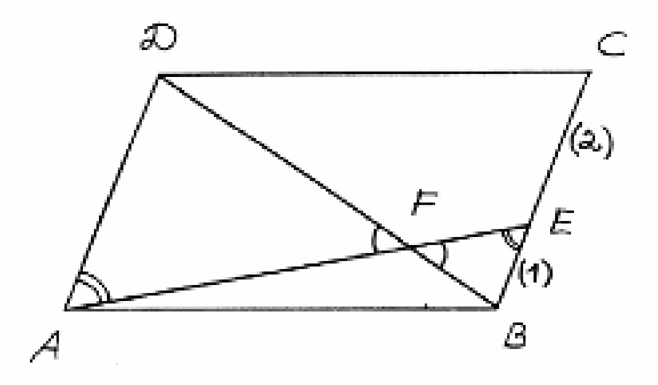
$$\frac{x}{6+8} = \frac{1,8}{6}$$

$$6x = 14 \cdot 1,8$$

$$x = \frac{14 \cdot 1,8}{6} = 4,2 \text{ (m)}$$

Vastaus Pylvään korkeus on 4,2 m.

516



Koska

$\sphericalangle AFD = \sphericalangle BFE$ (ristikulmat)

$\sphericalangle DAF = \sphericalangle FEB$ (samankohtaiset kulmat ja $AD \parallel BC$)

niin

$\triangle AFD \sim \triangle EFB$ (kk)

Tällöin vastinsivut ovat suoraan verrannolliset, joten

$$\frac{BF}{FD} = \frac{EB}{DA} \qquad |DA = CB$$

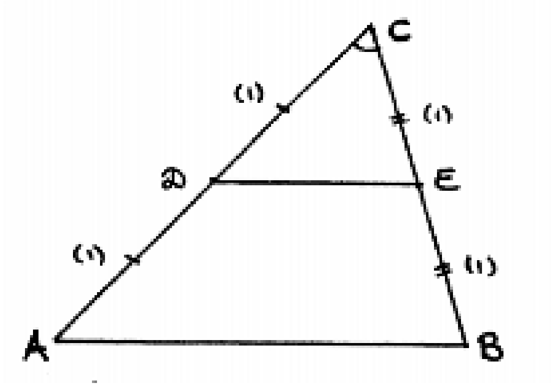
$$\frac{BF}{FD} = \frac{EB}{CB} \qquad \begin{vmatrix} EB = x \\ CB = 3x \end{vmatrix}$$

$$\frac{BF}{FD} = \frac{1}{3}$$

Vastaus $\quad BF : FD = 1 : 3$

517

a)



Todistus:
Kolmioissa ABC ja DEC on

$AC = 2DC \qquad |$ sivun keskipiste

$\sphericalangle ACB$ yhteinen

BC=2EC $\qquad |$ sivun keskipiste

joten $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (sks).
Yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinkulmat ovat yhtä suuret, joten

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CDE$ ja

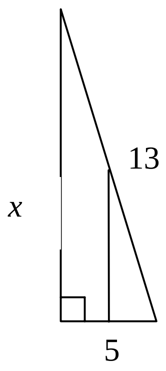
$\sphericalangle CBA = \sphericalangle CED$

Samankohtaiset kulmat ovat keskenään yhtä suuret, joten $DE \parallel AB$.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{1}{2}, \text{ joten } DE = \frac{1}{2}AB.$$

Siis kolmion sivujen keskipisteiden yhdysjana on kolmannen suuntainen ja pituudeltaan puolet siitä.

b)



a)-kohdan tuloksen perusteella kysytyn yhdysjanan pituus on puolet kolmion toisen kateetin pituudesta. Merkitään kolmion toista kateettia kirjaimella *x*.

Pythagoraan lauseen avulla saadaan yhtälö

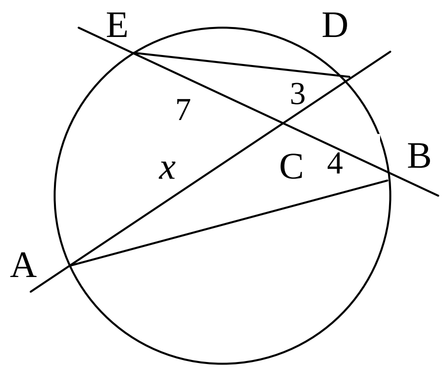
$$
\begin{aligned}
x^2 + 5^2 &= 13^2 \\
x^2 &= 13^2 - 5^2 \\
x^2 &= 169 - 25 \\
x^2 &= 144 \\
x &= \pm 12 \qquad \mid x > 0 \\
x &= 12
\end{aligned}
$$

Siis kysytyn yhdysjana pituus on $12 \cdot 2 = 6$.

Vastaus a) Pikkukolmion ala on 16 % alkuperäisen kolmion alasta.
b) Yhdysjanan pituus on 6.

518

a) Piirretään mallikuva ja siihen janat *AB* ja *ED*



Kolmioissa *ABC* ja *EDC*

$\sphericalangle BCA = \sphericalangle ECD$ | ristikulmat

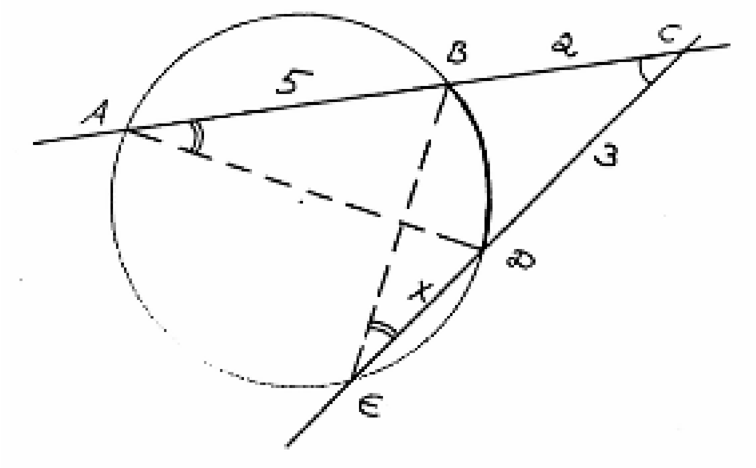
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DEC$ | samaa kaarta vastaavat kehäkulmat

Tällöin kolmiot *ABC* ja *EDC* ovat yhdenmuotoiset (kk)

Kolmioiden vastinosista saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{7} &= \frac{4}{3} \\
3x &= 28 \\
x &= \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

b)



Koska

$\sphericalangle A = \sphericalangle E$ | samaa kaarta vastaavat kehäkulmat

$\sphericalangle C$ on yhteinen

niin

$\triangle ACD \sim \triangle ECB$ (kk)

Saadaan verranto

$$\frac{x+3}{7} = \frac{2}{3}$$

$$3(x+3) = 14$$

$$3x + 9 = 14$$

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Vastaus a) $9\frac{1}{3}$ b) $1\frac{2}{3}$

519

a) Mittakaava

$$k = \frac{7{,}5\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{3}{2}$$

b)

$$\frac{A'}{A} = k^2$$

$$A' = k^2 A$$

$$A' = \frac{9}{4} A$$

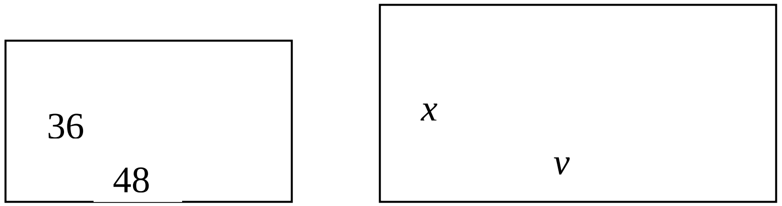
Kuinka monta prosenttia A' on suurempi kuin A ?

$$\frac{A' - A}{A} \cdot 100\ \% = \frac{\frac{5}{4}A - A}{A} = \frac{\frac{5}{4}A}{A} \cdot 100\% = 125\%$$

Vastaus a) 3:2 b) 125 %

520

Merkitään alkuperäisen suorakulmion sivuja kuvan mukaisesti kirjaimilla *x* ja y.



a) Suorakulmion sivuja pienennettiin 36% eli suhteessa 64:100 eli 16:25. Vastinosien suhde on siis 16 : 25.

Saadaan yhtälö

$$\frac{36}{x} = \frac{16}{25}$$
$$16x = 900$$
$$x = \frac{900}{16} = \frac{225}{4} = 56,25 \approx 56 \text{ (mm)}$$

Vastaavasti

$$\frac{48}{x} = \frac{16}{25}$$
$$16x = 1200$$
$$x = \frac{1200}{16} = \frac{300}{4} = 75 \text{ (mm)}$$

b) Suorakulmion alaa pienennettiin 36% eli suhteessa 64:100 eli 16:25.
Koska pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, saadaan yhtälö

$$k^2 = \frac{16}{25}$$
$$k = \pm\frac{4}{5} \qquad \big| k > 0$$
$$k = \frac{4}{5}$$

Vastinosien suhde on siis 4 : 55.
Saadaan yhtälö

$$\frac{36}{x} = \frac{4}{5}$$
$$4x = 180$$
$$x = \frac{180}{4} = 45 \text{ (mm)}$$

Vastaavasti

$$\frac{48}{x} = \frac{4}{5}$$
$$4x = 240$$
$$x = 60 \text{ (mm)}$$

Vastaus a)75 mm ja 56 mm
b)60 mm ja 45 mm

521

Mittakaava on

$$\frac{70\text{ cm}}{20\text{ cm}}=\frac{7}{2}$$

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_{\text{jalkapallo}}}{V_{\text{tennispallo}}}=\left(\frac{7}{2}\right)^3=42{,}875\approx 43$$

Vastaus Jalkapallon tilavuus on 43-kertainen.

522

Vastinosien pituuksien suhde on mittakaava

$$k=\frac{8\text{ cm}}{11\text{ cm}}=\frac{8}{11}$$

Pinta-alojen suhde on

$$\frac{A'}{A}=k^2 \qquad \left| \begin{array}{l} A=298\text{ cm}^2 \\ k=\dfrac{8}{11} \end{array} \right.$$

$$A'=k^2A$$

$$A'=\left(\frac{8}{11}\right)^2\cdot 298\text{ cm}^2$$

$$A'=157{,}619...\text{ cm}^2$$

$$A'\approx 158\text{ cm}^2$$

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V'}{V}=k^3 \qquad \left| \begin{array}{l} V=4{,}8\text{ dl} \\ k=\dfrac{8}{11} \end{array} \right.$$

$$V'=k^3V$$

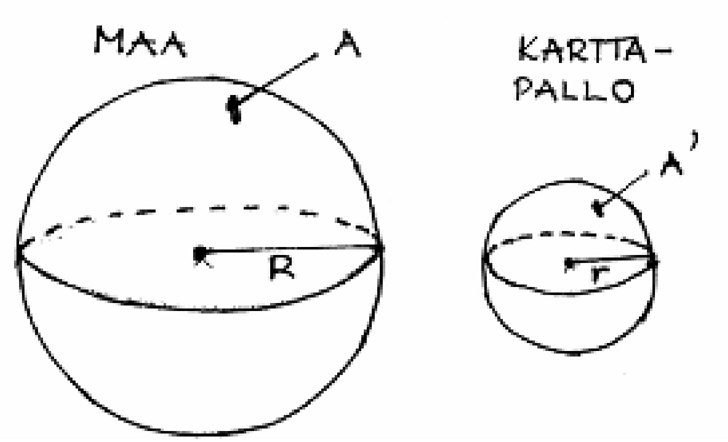
$$V'=\left(\frac{8}{11}\right)^3\cdot 4{,}8\text{ dl}$$

$$V'=1{,}846...\text{ dl}$$

$$V'=1{,}8\text{ dl}$$

Vastaus Pienemmän rasian ala on 158 cm^2 ja tilavuus 1,8 dl.

523



$R = 6400 \text{ km}$

$r = 15 \text{ cm}$

Mittakaava

$$k = \frac{r}{R} = \frac{15 \text{ cm}}{6400 \cdot 10^5 \text{ cm}} = \frac{15}{64} \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{A'}{A} = k^2$$

$$\frac{A'}{337\ 000} = \left(\frac{15}{64} \cdot 10^{-7}\right)^2$$

$$A' = \frac{225}{4096} \cdot 337\ 000 \cdot 10^{-14}$$

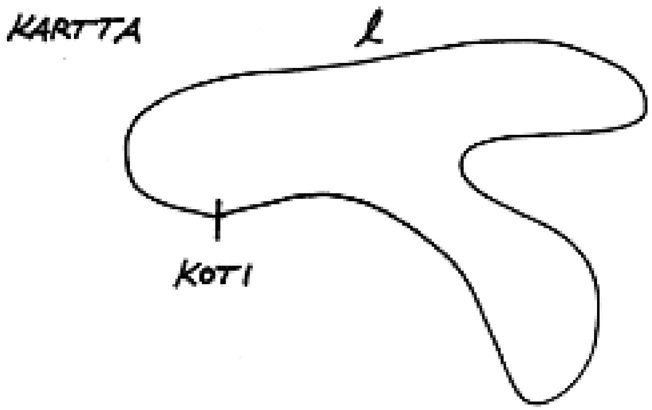
$$A' = 18\ 511{,}96... \cdot 10^{-14} \text{ km}^2$$

$$A' = 18\ 511{,}96... \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$$

$$A' = 1{,}851196... \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2 \approx 1{,}9 \text{ cm}^2$$

Vastaus 1,9 cm^2

524



$l = 75 \text{ cm}$

$k = 1 : 20\ 000$

Olkoon
pyöräilylenkin pituus luonnossa x.
Saadaan yhtälö

$$k = \frac{l}{x}$$

$$\frac{1}{20\ 000} = \frac{75 \text{ cm}}{x}$$

$$x = 20\ 000 \cdot 75 \text{ cm}$$

$$x = 1\ 500\ 000 \text{ cm}$$

Pekka polki siis 15 km.
Koska pyöräily kesti puolitoista tuntia, keskivauhti oli

$$v = \frac{\text{matka}}{\text{aika}} = \frac{15 \text{ km}}{1{,}5 \text{ h}} = 10 \text{ km/h}$$

Vastaus Matka oli 15 km ja keskinopeus 10 km/h.

525

Olkoon uuden lakanan pituus 100 x. Tällöin pestyn lakanan pituus on 94 x. Lakanoiden mittakaava on

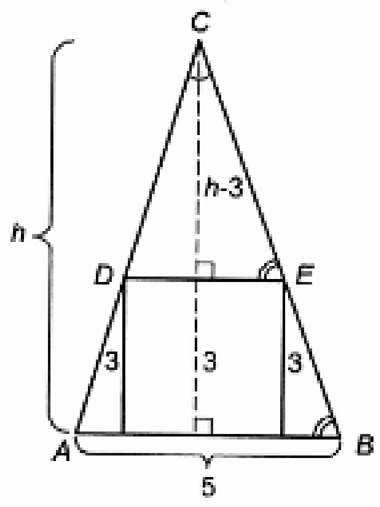
$$k = \frac{94x}{100x} = \frac{47}{50}$$

Alojen suhde on

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A} \cdot 100\% &= \left(\frac{47}{50}\right)^2 \cdot 100\% \\ &= 88{,}36\% \\ &\approx 88\% \end{aligned}$$

Vastaus 88 %

526



Neliön ala $A_{\text{neliö}} = 9$.

Olkoon neliön sivu x.

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 \\ x &= _{(}\pm_{)}3 \end{aligned}$$

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (kk), sillä

1) $\sphericalangle C$ on yhteinen
2) $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, samankohtaiset kulmat ja $DE \parallel AB$

$$\begin{aligned} \frac{AB}{DE} &= \frac{h}{h-3} \\ \frac{5}{3} &= \frac{h}{h-3} \\ 5(h-3) &= 3h \\ 5h - 15 &= 3h \\ 2h &= 15 \\ h &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Kolmion ala

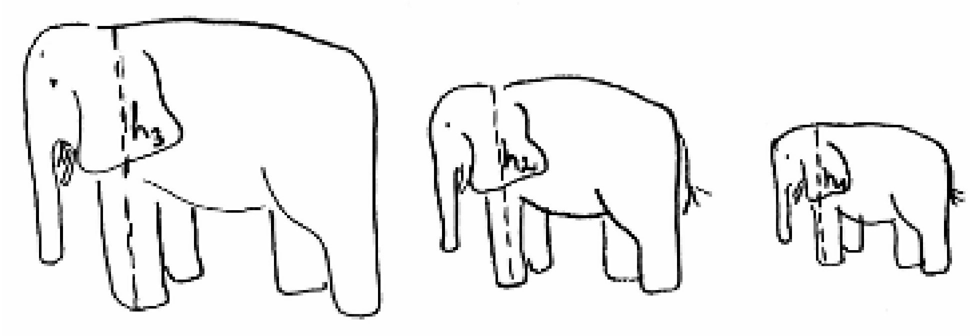
$$A_{\text{kolmio}} = \frac{5 \cdot \frac{15}{2}}{2} = \frac{75}{4}$$

Prosentteina

$$\begin{aligned}
&\frac{A_{\text{neliö}}}{A_{\text{kolmio}}}\cdot 100\,\% \\
&= \frac{9}{\frac{75}{4}}\cdot 100\,\% \\
&= \frac{9\cdot 4}{75}\cdot 100\,\% \\
&= 48\,\%
\end{aligned}$$

Vastaus 48 %

527



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{7}{10} \quad \text{eli} \quad h_2 = \frac{10}{7}h_1$$

$$\frac{h_3}{h_2} = \frac{10}{7} \quad \text{eli} \quad h_3 = \frac{10}{7}h_2$$

Siis

$$h_3 = \frac{10}{7}\cdot\frac{10}{7}h_1 \qquad \Big| h_1 = 19 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned}
h_3 &= \frac{100}{49}\cdot 19 \text{ mm} \\
&= 38{,}77\ldots \text{ mm} \approx 39 \text{ mm}
\end{aligned}$$

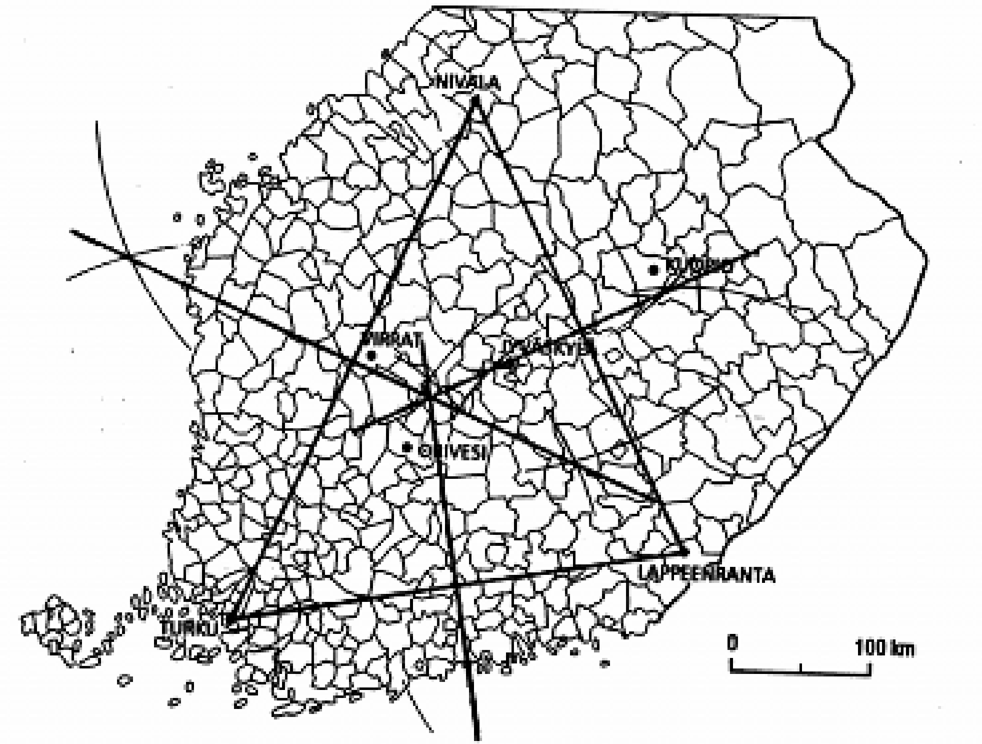
Vastaus 39 mm

528

a) Kartan mittakaava on

$$k = \frac{1\text{ cm}}{100\text{ km}} = \frac{1\text{ cm}}{100\ 000\text{m}} = \frac{1\text{ cm}}{10\ 000\ 000\text{ cm}} = 1:10\ 000\ 000$$

b) Piirretään kolmio, jonka kärkinä ovat Turku, Lappeenranta ja Nivala. Kärjistä on yhtä pitkä matka paikkaan, jossa kolmion keskinormaalit leikkaavat. Piirretään kolmiolle keskinormaalit.



Keskinormaalit leikkaavat paikassa , josta on matkaa kärkiin noin 2,1 cm.

Matka luonnossa on $2{,}1 \cdot 100 = 210$ (km).

Vastaus: a) Mittakaava on 1:10 000 000
b) Tapaaminen Mäntässä, jonne on linnuntietä Turusta noin 210 km.

529

a) Kun pienennetään A3-paperi kokoon A4, pinta-ala pienenee puoleen eli pinta-alojen suhde on 1:2.
Koska pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, saadaan yhtälö

$$k^2 = \frac{1}{2}$$

$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad |\, k > 0$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (= 0{,}707...)$$

Tällöin pienennetyn pohjapiirroksen mittakaava on

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{50} = \frac{1}{50\sqrt{2}} = 1:50\sqrt{2} \approx 1:71$$

b) Olohuoneen todelliset mitat ovat

65 mm · 70,7… ≈ 4600 mm = 4,6 m ja

52 mm · 70,7… ≈ 3700 mm = 3,7 m

Vastaus: a) noin 1:71 b) 4,6 m ja 3,7 m

530

Kolmioissa RAB ja RDC on

$\sphericalangle BRA = \sphericalangle CRD$ | ristikulmat

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD$ | samaa kaarta vastaavat kehäkulmat

joten $\triangle RAB \sim \triangle RDC$ (kk).

Koska yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivut ovat suoraan verrannolliset, saadaan yhtälö

$$\frac{RD}{RA} = \frac{RC}{RB}$$

$$\frac{4a}{b} = \frac{b}{a}$$

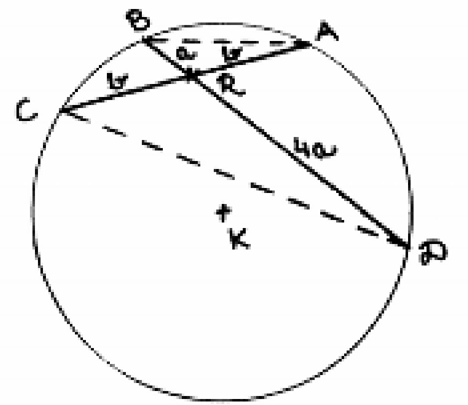
$$4a^2 = b^2 \qquad |\, b = 400$$

$$4a^2 = 400^2 \qquad |:4$$

$$a^2 = \frac{400^2}{4} \qquad |\sqrt{}$$

$$a = \sqrt{\frac{400^2}{4}}$$

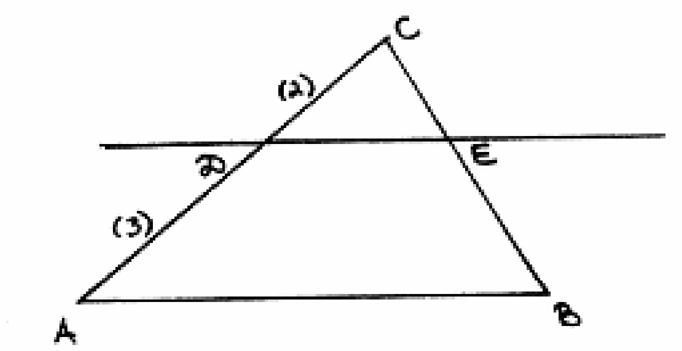
$$a = \frac{400}{2} = 200 \text{ (m)}$$



Polun pituus on $5a = 5 \cdot 200\,\text{m} = 1000\text{ m} = 1\text{ km}$

Vastaus Toisen polun pituus on 1 km.

531



$\triangle ABC \sim \triangle DEC$

Mittakaava on $k = \frac{2}{5}$.

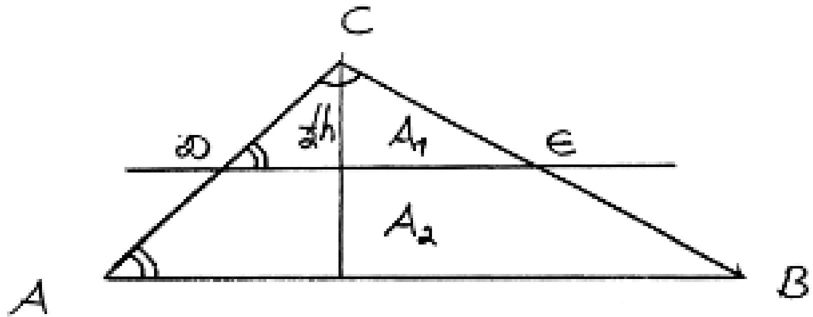
Pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_{\text{pikku}}}{A_{\text{iso}}} = k^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\frac{4}{25} \cdot 100\% = 16\%$$

Vastaus Pikkukolmion ala on 16 % alkuperäisen kolmion alasta.

532



Koska $\sphericalangle D = \sphericalangle A$ (samankohtaiset kulmat ja $DE \parallel AB$) ja kulma C on yhteinen, niin $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ (kk).

Tällöin

$$\frac{A_1}{A_{iso}} = \left(\frac{\frac{1}{2}h}{h}\right)^2 \qquad \left| \frac{A'}{A} = k^2 \text{ eli } \frac{A'}{A} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \right.$$

$$\frac{A_1}{A_{iso}} = \frac{1}{4}$$

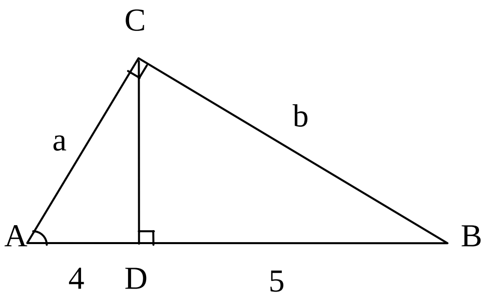
$$A_1 = \frac{1}{4} A_{iso}$$

$$A_2 = A_{iso} - A_1 = A_{iso} - \frac{1}{4} A_{iso} = \frac{3}{4} A_{iso}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{4} A_{iso}}{\frac{3}{4} A_{iso}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Vastaus 1:3

533



Kolmiot ABC ja ACD ovat yhdenmuotoiset lauseen kk perusteella, koska molemmissa on suora kulma ja lisäksi kulma A on yhteinen. Vastinsivujen suhteesta saadaan yhtälö

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$
$$\frac{9}{a} = \frac{a}{4}$$
$$a^2 = 36$$
$$a = \pm 6 \qquad \mid a > 0$$
$$a = 6$$

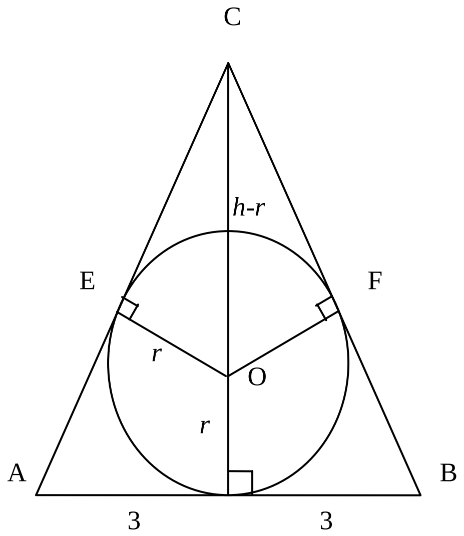
Koska kolmio ABC on suorakulmainen, saadaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö

$$a^2 + b^2 = 9^2$$
$$36 + b^2 = 81$$
$$b^2 = 45$$
$$b = \pm\sqrt{45} \qquad \mid b > 0$$
$$b = \sqrt{9 \cdot 5}$$
$$b = 3\sqrt{5}$$

Vastaus: Kateetit ovat 6 ja $3\sqrt{5}$.

534

Olkoon ympyrän säde *r*.



Kolmiot *EOC* ja *DAC* ovat yhdenmuotoiset (kk), sillä kummassakin on suora kulma ja kulma *C* on yhteinen.

Verrannollisista vastinosista saadaan yhtälö

$$\frac{r}{3} = \frac{OC}{AC} \qquad \left| \begin{array}{l} OC = h - r \\ AC = 5 \end{array} \right.$$

$$\frac{r}{3} = \frac{h - r}{5}$$

Pythagoraan lauseen avulla saadaan ensin ratkaistua *h*:

$$h^2 + 3^2 = 5^2$$
$$h^2 + 9 = 25$$
$$h^2 = 16$$
$$h = \pm 4 \qquad |b > 0$$
$$h = 4$$

Tällöin

$$\frac{r}{3} = \frac{4 - r}{5}$$
$$5r = 3(4 - r)$$
$$5r = 12 - 3r$$
$$8r = 12$$
$$r = 1\frac{1}{2}$$

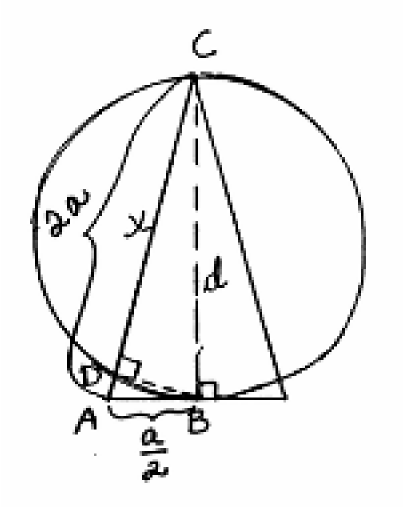
Vastaus Ympyrän säde on $1\frac{1}{2}$.

535

Ympyrän halkaisija:

$$d = {}_{(\pm)}\sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{{}^{4)}4a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{16a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{15a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{15}$$



Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora, joten $\sphericalangle CDB = 90^\circ$.

$\triangle ABC \sim \triangle BDC$ (kk),

$\sphericalangle C$ on yhteinen ja $\sphericalangle B = 90\pi = \sphericalangle D$

Vastinjanojen avulla saadaan verranto

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CB} \qquad |CD = x$$

$$\frac{d}{x} = \frac{2a}{d}$$

$$2ax = d^2$$

$$x = \frac{d^2}{2a} = \frac{\frac{a^2}{4} \cdot 15}{2a} = \frac{15}{8}a$$

$$AD =^{8)} 2a - \frac{15}{8}a = \frac{1}{8}a$$

Jakosuhde on $\frac{15}{8}a : \frac{1}{8}a = 15:1$

Vastaus Suhteessa 15:1 huipusta lukien.