Pyramidi 13 luku 2

1.10.2007	Ensimmäinen julkaistu versio
10.10.2007	Lisätty tehtävien ratkaisuja
25.11.2007	Korjattu ulkoasua
15.12.2007	Korjattu ulkoasua ja painovirheitä

201.

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 5 \\
\hline
x+3 & 2x^2 + x - 15 \\
 & \underline{(\mp)2x^2 (\mp)6x} \\
 & -5x - 15 \\
 & \underline{(\pm)5x (\pm)15} \\
 & 0
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x + 7 \\
\hline
x^2 - 1 & x^4 - 3x^3 + 6x^2 \qquad + 4 \\
 & \underline{(\mp)x^4 \qquad (\pm)x^2} \\
 & -3x^3 + 7x^2 \qquad + 4 \\
 & \underline{(\pm)3x^3 \qquad (\mp)3x} \\
 & 7x^2 - 3x + 4 \\
 & \underline{(\mp)7x^2 \qquad (\pm)7} \\
 & -3x + 11
\end{array}
$$

Vastaus a) $2x - 5$ b) $x^2 - 3x + 7 + \dfrac{-3x + 11}{x^2 - 1}$

202.

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 1 \\
\hline
2x+3 & 2x^2 + x + 2 \\
 & \underline{(\mp)2x^2 (\mp)3x} \\
 & -2x + 2 \\
 & \underline{(\pm)2x (\pm)3} \\
 & 5
\end{array}
$$

Siis $\dfrac{2x^2 + x + 2}{2x + 3} = x - 1 + \dfrac{5}{2x + 3}$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 7 \\
\hline
x^2 - x + 1 & x^3 + 6x^2 - 6x + 7 \\
 & \underline{(\mp)x^3 (\pm)x^2 (\mp)x} \\
 & 7x^2 - 7x + 7 \\
 & \underline{(\mp)7x^2 (\pm)7x (\mp)7} \\
 & 0
\end{array}
$$

Vastaus a) $x - 1 + \dfrac{5}{2x + 3}$ b) $x + 7$

203.

$$
\begin{array}{rr}
 & x+2 \\
x-7\,\big) & x^2-5x-14 \\
 & \underline{(\mp)x^2\ (\pm)7x\quad} \\
 & 2x-14 \\
 & \underline{(\mp)2x\ (\pm)14} \\
 & 0
\end{array}
$$

Vastaus $\dfrac{-5x+x^2-14}{x-7}=x+2$

Tarkistus $\left(x-7\right)\left(x+2\right)=x^2+2x-7x-14$

$=x^2-5x-14$

204.

a)

$$
\begin{array}{rr}
 & x^2+3x+2 \\
x-1\,\big) & x^3+2x^2-x-2 \\
 & \underline{(\mp)x^3\ (\pm)\ x^2\qquad\quad} \\
 & 3x^2-x-2 \\
 & \underline{(\mp)3x^2\ (\pm)3x\quad} \\
 & 2x-2 \\
 & \underline{(\mp)2x\ (\pm)2} \\
 & 0
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{rr}
 & -4x-6 \\
-x+2\,\big) & 4x^2-2x+3 \\
 & \underline{(\mp)4x^2\ (\pm)8x\quad} \\
 & 6x+3 \\
 & \underline{(\mp)6x\ (\pm)12} \\
 & 15
\end{array}
$$

Vastaus a) x^2+3x+2 b) $-4x-6+\dfrac{15}{2-x}$

205.

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 6x + 3 \\
\hline
x^2 + 1 & x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 6x + 3 \\
 & (\mp)x^4 \quad (\mp)x^2 \\
\hline
 & -6x^3 + 3x^2 - 6x + 3 \\
 & (\pm)6x^3 \quad (\pm)6x \\
\hline
 & 3x^2 \quad + 3 \\
 & (\mp)3x^2 \quad (\mp)3 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 - x \\
\hline
-x^2 + 2 & -2x^5 + 5x^3 - 2x \\
 & (\pm)2x^3 \quad (\mp)4x^3 \\
\hline
 & x^3 - 2x \\
 & (\pm)x^3 (\pm)2x \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Vastaus a) $x^2 - 6x + 3$ b) $2x^3 - x$

206.

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \\
\hline
2x - 3 & 2x^3 \quad - 4x - \frac{3}{4} \\
 & (\mp)2x^3 (\pm)3x^2 \\
\hline
 & 3x^2 - 4x - \frac{3}{4} \\
 & (\mp)3x^2 (\pm)\frac{9}{2}x \\
\hline
 & \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \\
 & (\mp)\frac{1}{2}x (\pm)\frac{3}{4} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-3x+1 \\
\hline
2x^2-5 & 2x^4-6x^3-3x^2+15x-5 \\
 & \underline{(\mp)2x^4 \qquad (\pm)5x^2} \\
 & -6x^3+2x^2+15x-5 \\
 & \underline{(\pm)6x^3 \qquad (\mp)15x} \\
 & 2x^2 \qquad -5 \\
 & \underline{(\mp)2x^2 \qquad (\pm)5} \\
 & 0
\end{array}
$$

Vastaus a) $x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}$ b) x^2-3x+1

207.

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & -x^2-x-1 \\
\hline
x-1 & -x^3 \qquad +1 \\
 & \underline{(\pm)x^3(\mp)x^2} \\
 & -x^2 \qquad +1 \\
 & \underline{(\pm)x^2(\mp)x} \\
 & -x \quad +1 \\
 & \underline{(\pm)x \quad (\mp)1} \\
 & 0
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
x^2-4x+5 & x^2 \qquad +3 \\
 & \underline{(\mp)x^2(\pm)4x(\mp)5} \\
 & 4x-2
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{r|l}
 & -x^2+1 \\
\hline
x^3-2 & -x^5 \qquad +x^3+2x^2-2 \\
 & \underline{(\pm)x^5 \qquad (\mp)2x^2} \\
 & x^3 \qquad -2 \\
 & \underline{(\mp)x^3 \qquad (\pm)2} \\
 & 0
\end{array}
$$

Vastaus a) $-x^2-x-1$

b) $1+\dfrac{4x-2}{x^2-4x+5}$

c) $1-x^2$

208.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 5x - 4 \\
\hline
x+7 & 2x^3 + 19x^2 + 31x - 28 \\
 & \underline{(\mp)2x^3 (\mp)14x^2} \\
 & 5x^2 + 31x - 28 \\
 & \underline{(\mp)5x^2 (\mp)35x} \\
 & -4x - 28 \\
 & \underline{(\pm)4x (\pm)28} \\
 & 0
\end{array}
$$

Jako meni tasan, joten polynomi $2x^3+19x^2+31x-28$ on jaollinen binomilla $x+7$.

209.

a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 5 \\
\hline
x^2-15x+25 & x^3 - 20x^2 + 100x - 125 \\
 & \underline{(\mp)x^3 (\pm)15x^2 (\mp)25x} \\
 & -5x^2 + 75x - 125 \\
 & \underline{(\pm)15x^2 (\mp)75x (\pm)125} \\
 & 0
\end{array}
$$

Siis $\dfrac{x^3-20x^2+100x-125}{x^2-15x+25} = x-5$.

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 2 \\
\hline
x^3-2 & x^4 + 2x^3 - 2x - 4 \\
 & \underline{(\mp)x^4 \quad (\pm)2x} \\
 & 2x^3 - 4 \\
 & \underline{(\mp)2x^3 (\pm)4} \\
 & 0
\end{array}
$$

Siis $\dfrac{x^4+2x^3-2x-4}{x^3-2} = x+2$.

Vastaus a) $x-5$ b) $x+2$

210.

$$(x+5)P(x) = -x^3 - 6x^2 - 3x + 10$$

$$\begin{array}{r|l}
 & -x^2 - x + 2 \\
\hline
x+5 & -x^3 - 6x^2 - 3x + 10 \\
 & \underline{{}_{(\pm)}x^3 \, {}_{(\pm)}5x^2} \\
 & \quad -x^2 - 3x + 10 \\
 & \quad \underline{{}_{(\pm)}x^2 \, {}_{(\pm)}5x} \\
 & \qquad 2x + 10 \\
 & \qquad \underline{{}_{(\mp)}2x \, {}_{(\mp)}10} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

Siis $P(x) = -x^2 - x + 2$.

211.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x + 2 \\
\hline
2x+3 & 6x^2 + 13x + 6 \\
 & \underline{{}_{(\mp)}6x^2 \, {}_{(\mp)}9x} \\
 & \qquad 4x + 6 \\
 & \qquad \underline{{}_{(\mp)}4x \, {}_{(\mp)}6} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

Siis $\dfrac{6x^2+13x+6}{2x+3} = 3x + 2$.

Merkitään

$$P(x) = 6x^2 + 13x + 6, \quad Q(x) = 2x + 3 \text{ ja } R(x) = 3x + 2$$

$$\frac{61306}{203} = \frac{6 \cdot 100^2 + 13 \cdot 100 + 6}{2 \cdot 100 + 3} = \frac{P(100)}{Q(100)} = R(100)$$

$$= 3 \cdot 100 + 2 = 302$$

$$\frac{736}{23} = \frac{600+130+6}{20+3} = \frac{P(10)}{Q(10)} = R(10) = 3 \cdot 10 + 2 = 32$$

212.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x - 1 \\
\hline
7x^2 - 2x + 4 & 7x^4 - 23x^3 + 3x^2 + ax + b \\
 & \underline{{}_{(\mp)}7x^4 \, {}_{(\pm)}2x^3 \, {}_{(\mp)}4x^2} \\
 & \quad -21x^3 - x^2 + ax + b \\
 & \quad \underline{{}_{(\pm)}21x^3 \, {}_{(\mp)}6x^2 \, {}_{(\pm)} 12x} \\
 & \qquad -7x^2 + (a+12)x + b \\
 & \qquad \underline{{}_{(\pm)}7x^2 \, {}_{(\mp)} 2x \, {}_{(\pm)}4} \\
 & \qquad\qquad (a+10)x + (b+4)
\end{array}$$

Jako menee tasan, kun jakojäännös on nolla kaikilla $x \in \mathbb{R}$ eli kun

$a + 10 = 0$ ja $b + 4 = 0$

$a = -10$ ja $b = -4$

Vastaus $x^2 - 3x - 1 + \dfrac{(a+10)x + b + 4}{7x^2 - 2x + 4}$

Jako menee tasan, kun $a = -10$ ja $b = -4$.

Tarkistus:

$$(7x^2 - 2x + 4)(x^2 - 3x - 1)$$
$$= 7x^4 - 21x^3 - 7x^2 - 2x^3 + 6x^2 + 2x + 4x^2 - 12x - 4$$
$$= 7x^4 - 23x^3 + 3x^2 - 10x - 4$$

213.

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 3a^2 - & ab + & b^2 & \\
\hline
2a + 7b & 6a^3 + 19a^2b & -5ab^2 & +7b^3 & \\
 & (\mp)6a^3 (\mp)21a^2b & & & \\
\hline
 & -2a^2b & -5ab^2 & +7b^3 & \\
 & (\pm)2a^2b & (\pm)7ab^2 & & \\
\hline
 & & 2ab^2 & +7b^3 & \\
 & & (\mp)2ab^2 & (\mp)7b^3 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Vastaus $3a^2 - ab + b^2$

214.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$

Koska nimittäjän raja-arvo on $\lim\limits_{x \to 1}(1 - x) = 0$, raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$ ei voida määrittää suoraan osamäärän raja-arvon avulla.

Kun $x \neq 1$, lauseke $\dfrac{1 - x^3}{1 - x}$ voidaan sieventää käyttämällä jakokulmaa.

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & +x & +1 & \\
\hline
-x + 1 & -x^3 & & & +1 \\
 & (\pm)x^3 & (\mp)x^2 & & \\
\hline
 & & -x^2 & & +1 \\
 & & (\pm)x^2 & (\mp)x & \\
\hline
 & & & -x & +1 \\
 & & & (\pm)x & (\mp)1 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

Siis $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^3}{1 - x} = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 1 + 1 + 1 = 3$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-3x+2}{2-x}=\lim\limits_{x\to 2}(-x^2-x+1)=-2^2-2+1=-5$

$$
\begin{array}{r|l}
 & -x^2-x+1 \\
\hline
-x+2 & x^3-x^2-3x+2 \\
 & \underline{{}_{(\mp)}x^3 {}_{(\pm)}2x^2} \\
 & x^2-3x+2 \\
 & \underline{{}_{(\mp)}x^2 {}_{(\pm)}2x} \\
 & -x+2 \\
 & \underline{{}_{(\pm)}x {}_{(\mp)}2} \\
 & 0
\end{array}
$$

Vastaus -5

215.

$P(x)=ax^3-31x^2+1$

Koska $x=1$ on nollakohta, niin $P(1)=0$:

$a\cdot 1^3-31\cdot 1^2+1=0$

$a=30$

Siis $P(x)=30x^3-31x^2+1$.

Polynomi $P(x)$ on jaollinen binomilla $x-1$, koska $x=1$ on polynomin nollakohta.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 30x^2-x-1 \\
\hline
x-1 & 30x^3-31x^2+1 \\
 & \underline{{}_{(\mp)}30x^3 {}_{(\pm)}30x^2} \\
 & -x^2+1 \\
 & \underline{{}_{(\pm)}x^2 {}_{(\mp)}x} \\
 & -x+1 \\
 & \underline{{}_{(\pm)}x {}_{(\mp)}1} \\
 & 0
\end{array}
$$

Siis

$P(x)=0$

$(x-1)(30x^2-x-1)=0$

$x-1=0$ tai $30x^2-x-1=0$

$x=1$ tai $x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 30\cdot(-1)}}{2\cdot 30}$

$x=\dfrac{1\pm 11}{60}$

$x=-\dfrac{1}{6}$ tai $x=\dfrac{1}{5}$

Vastaus $a=30$

$P(x)=0$, kun $x=-\dfrac{1}{6}$ tai $x=\dfrac{1}{5}$ tai $x=1$

216.

Binomi $x+2$ on polynomin $P(x)=x^3+ax^2-4$ tekijä, jos binomin $x+2$ nollakohta on myös P:n nollakohta.

$$x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2$$

$$P(-2)=(-2)^3+a\cdot(-2)^2-4=-8+4a-4=-12+4a$$

Siis oltava

$$-12+4a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=3$$

Jakokulma:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & x^2 & +\ x & -2 \\
\hline
x+2 & x^3+3x^2 & & -4 \\
 & (\mp)x^3(\mp)2x^2 & & \\
\hline
 & x^2 & & -4 \\
 & (\mp)x^2 & (\mp)2x & \\
\hline
 & & -2x & -4 \\
 & & (\pm)2x & (\pm)4 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

Siis $P(x)=(x+2)(x^2+x-2)$

Tekijän x^2+x-2 nollakohdat:

$$x^2+x-2=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm3}{2}$$

$$x=-2 \text{ tai } x=1$$

Siis $P(x)=(x+2)\cdot1\cdot(x+2)(x-1)=(x-1)(x+2)^2$

Vastaus $a=3$, $(x-1)(x+2)^2$

217.

$$x^3+2x^2-13x-6=0$$

Jaetaan polynomi $P(x)=x^3+2x^2-13x-6$ tekijöihin. Nollakohta on $x=3$, joten tekijänä on $x-3$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +\ 5x & +2 & \\
\hline
x-3 & x^3 & +2x^2 & -13x & -6 \\
 & (\mp)x^3 & (\pm)\ 3x^2 & & \\
\hline
 & & 5x^2 & -13x & -\ 6 \\
 & & (\mp)5x^2 & (\pm)15x & \\
\hline
 & & & 2x & -\ 6 \\
 & & & (\mp)\ 2x & (\pm)\ 6 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}$$

Siis $P(x)=(x-3)(x^2+5x+2)$ ja $P(x)=0$, kun

$x-3=0$ tai $x^2+5x+2=0$ eli kun

$x=3$ tai $x^2+5x+2=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$

Vastaus Juuret ovat $x=3$ ja $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

218.

$$\int_1^x\left(t^2-2t-5\right)dt=0$$

$$\Big/_{1}^{x}\left(\frac{1}{3}t^3-t^2-5t\right)=0$$

$$\frac{1}{3}x^3-x^2-5x-\left(\frac{1}{3}\cdot1^3-1^2-5\cdot1\right)=0$$

$$\frac{1}{3}x^3-x^2-5x-\frac{1}{3}+6=0 \qquad |\cdot3$$

$$x^3-3x^2-15x-1+18=0$$

$$x^3-3x^2-15x+17=0$$

$x=1$ on juuri, koska $1^3-3\cdot1^2-15\cdot1+17=0$.

Tällöin polynomi $x^3-3x^2-15x+17$ on jaollinen binomilla $x-1$. Suoritetaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x-17 \\
x-1 & x^3-3x^2-15x+17 \\
 & \underline{\mp x^3\pm x^2} \\
 & -2x^2-15x+17 \\
 & \underline{\pm2x^2\mp2x} \\
 & -17x+17 \\
 & \underline{\mp17x\pm17} \\
 & 0
\end{array}$$

Siis

$$x^3-3x^2-15x+17=0$$

$$(x-1)\left(x^2-2x-17\right)=0$$

$$x-1=0 \quad \text{tai} \quad x^2-2x-17=0$$

$$x=1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot2\cdot(-17)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{72}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{36\cdot2}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm6\sqrt{2}}{2}$$

$$x=1\pm3\sqrt{2}$$

Vastaus $x=1$ tai $x=1\pm3\sqrt{2}$

219.

Olkoon $f(x) = x^3 + 1$. Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 1$ on

$$k_t = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3 \qquad \Big| \; f'(x) = 3x^2$$

Tangentin yhtälö on

$$y - 2 = 3(x - 1) \qquad \Big| \; y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y = 3x - 3 + 2$$
$$y = 3x - 1$$

Käyrän ja tangentin leikkauspisteet saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} y = x^3 + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$x^3 + 1 = 3x - 1$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Yhtälön juuri on $x = 1$, sillä $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

Polynomi $x^3 - 3x + 2$ on siis jaollinen binomilla $x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x - 2 \\ \hline x - 1 & x^3 \qquad - 3x + 2 \\ & \underline{(\mp)x^3 (\pm) x^2} \\ & x^2 - 3x + 2 \\ & \underline{(\mp)x^2 (\pm) x} \\ & -2x + 2 \\ & \underline{(\pm)2x (\mp) 2} \\ & 0 \end{array}$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$$
$$x - 1 = 0 \text{ tai } x^2 + x - 2 = 0$$
$$x = 1 \text{ tai } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x = 1 \text{ tai } x = -2$$

$$y = f(1) = 2 \qquad y = f(-2) = -7$$

Siis leikkauspisteet ovat $(1, 2)$ ja $(-2, -7)$.

220.

Määritetään käyrien leikkauspisteet:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{3}x^3 \\ y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\frac{5}{3}x^3 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6} \qquad \Big| \cdot 6$$

$$10x^3 = 9x^2 + 1$$

$$10x^3 - 9x^2 - 1 = 0$$

$x = 1$ on yhtälön juuri

$$\begin{array}{r|l} & 10x^2 + x + 1 \\ x-1 & 10x^3 - 9x^2 \qquad - 1 \\ & \underline{(\mp)10x^3 (\pm)10x^2} \\ & x^2 \qquad - 1 \\ & \underline{(\mp)x^2 \ (\pm)\ x} \\ & x - 1 \\ & \underline{(\mp)x (\pm)1} \\ & 0 \end{array}$$

$$(x-1)(10x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad 10x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1}}{2 \cdot 10}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-39}}{20}$$

ei nollakohtia

Lasketaan tangenttien kulmakertoimet, kun $x = 1$.

$$y_1'(x) = 5x^2 \qquad y_1'(1) = 5$$

$$y_2'(x) = 3x \qquad y_2'(1) = 3$$

$\tan \alpha_1 = 5$, joten $\alpha_1 = 78{,}690...°$

$\tan \alpha_2 = 3$, joten $\alpha_2 = 71{,}565...°$

Kysytty kulma on $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 7{,}125...°$.

Vastaus 7,1°

221.

Käyrät sivuavat toisiaan leikkauspisteessä, jos niiden tähän pisteeseen piirretyt tangentit yhtyvät. Määritetään käyrien leikkauskohdat.

$$\begin{cases} y = x^3 - 15x - 20 \\ y = x^2 + x \end{cases}$$

$$x^3 - 15x - 20 = x^2 + x$$

$$x^3 - x^2 - 16x - 20 = 0$$

Yhtälön juuri on $x = -2$, koska $(-2)^3 - (-2)^2 - 16\cdot(-2) - 20 = 0$. Polynomi $x^3 - x^2 - 16x - 20$ on siis jaollinen binomilla $x - (-2)$ eli binomilla $x + 2$.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \quad - 3x - 10 \\ \hline x+2 & x^3 - x^2 - 16x - 20 \\ & \underline{(\mp) x^3 (\pm) 2x^2} \\ & -3x^2 - 16x - 20 \\ & \underline{(\mp) x^2 (\pm) 6x} \\ & -10x - 20 \\ & \underline{(\pm) 10x (\pm) 20} \\ & 0 \end{array}$$

$$x^3 - x^2 - 16x - 20 = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$x + 2 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1}$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 5 \quad \text{tai} \quad x = -2$$

Käyrien leikkauskohdat ovat siis $x = -2$ ja $x = 5$.

Käyrien $y_1 = x^3 - 15x - 20$ ja $y_2 = x^2 + x$ derivaatat ovat $y_1'(x) = 3x^2 - 15$ ja $y_2'(x) = 2x + 1$.

- Kohdassa $x = -2$ tangentin kulmakertoimet ovat

$$k_1 = y_1'(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 15 = -3$$

$$k_2 = y_2'(-2) = 2\cdot(-2) + 1 = -3$$

Koska $k_1 = k_2$, niin kohtaan $x = -2$ piirretyt käyrien tangentit yhtyvät. Käyrät sivuavat toisiaan.
Sivuamispisteen y-koordinaatti on $y = (-2)^2 - 2 = 2$.
Sivuamispiste on $(-2, 2)$.

- Kohdassa $x = 5$ tangentin kulmakertoimet ovat

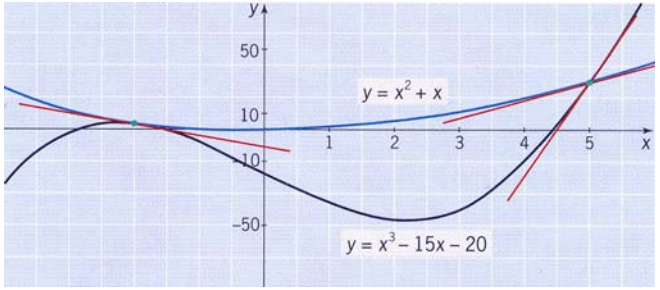
$$k_1 = y_1'(5) = 3\cdot 5^2 - 15 = 60$$

$$k_2 = y_2'(5) = 2\cdot 5 + 1 = 11$$

Koska $k_1 \neq k_2$, niin kohtaan $x = 5$ piirretyt käyrien tangentit eivät yhdy. Käyrät eivät sivua toisiaan.

Vastaus Käyrät sivuavat toisiaan pisteessä $(-2, 2)$.

Graafinen tarkistus



222.

$$\frac{x^2-x+1}{x^3}=\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$

223.

$$\frac{2x^6+4x^3+x}{x^5}=\frac{2x^6}{x^5}+\frac{4x^3}{x^5}+\frac{x}{x^5}=2x+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$$

224.

$$\frac{x}{(x+2)^2}\equiv\frac{a}{(x+2)^2}+\frac{b}{x+2} \qquad \Big|\cdot(x+2)^2$$

$$x\equiv a+b(x+2)$$

$$x\equiv bx+a+2b$$

$$\begin{cases} b=1 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

Vastaus $-\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}$

225.

$$\frac{8x^2+10x+3}{(2x+1)^3}\equiv\frac{a}{(2x+1)^3}+{}^{2x+1)}\frac{b}{(2x+1)^2}+{}^{(2x+1)^2)}\frac{c}{2x+1}$$

$$\frac{8x^2+10x+3}{(2x+1)^3}\equiv\frac{a}{(2x+1)^3}+\frac{b(2x+1)}{(2x+1)^3}+\frac{c(2x+1)^2}{(2x+1)^3} \quad \Big|\cdot(2x+1)^3$$

$$8x^2+10x+3\equiv a+b(2x+1)+c(2x+1)^2$$

$$8x^2+10x+3\equiv a+2bx+b+c(4x^2+4x+1)$$

$$8x^2+10x+3\equiv a+2bx+b+4cx^2+4cx+c$$

$$8x^2+10x+3\equiv 4cx^2+(2b+4c)x+a+b+c$$

$$\begin{cases} 4c=8 \\ 2b+4c=10 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=5-2c \\ a=3-b-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=1 \\ a=0 \end{cases}$$

Vastaus $\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{2}{2x+1}$

226.

$$\frac{1}{x-x^2}=\frac{1}{x(1-x)}\equiv\frac{a}{x}+\frac{b}{1-x} \qquad \Big|\cdot x(1-x)$$

$$1\equiv a(1-x)+bx$$

$$1\equiv(-a+b)x+a$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases}-a+b=0\\ a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$$

Siis $\frac{1}{x(1-x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$.

227.

$$\frac{x^2+x+2}{x(x^2+x+1)}\equiv\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+x+1} \qquad \Big|\cdot x(x^2+x+1)$$

$$x^2+x+2\equiv a(x^2+x+1)+x(bx+c)$$

$$x^2+x+2\equiv(a+b)x^2+(a+c)x+a$$

$$\begin{cases}a+b=1\\ a+c=1\\ a=2\end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases}a=2\\ b=-1\\ c=-1\end{cases}$$

Vastaus $\frac{2}{x}-\frac{x+1}{x^2+x+1}$

228.

$$\frac{x-4}{x(x-2)^2}\equiv\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-2)^2}+\frac{c}{x-2} \quad \Big|\cdot x(x-2)^2$$

$$x-4\equiv a(x-2)^2+bx+cx(x-2)$$

$$x-4\equiv a(x^2-4x+4)+bx+cx^2-2cx$$

$$x-4\equiv(a+c)x^2+(-4a+b-2c)x+4a$$

$$\begin{cases}a+c=0\\ -4a+b-2c=1\\ 4a=-4\end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases}a=-1\\ c=1\\ b=-1\end{cases}$$

Vastaus $-\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}$

229.

$$\frac{3x^3+2x^2-9x+4}{x^3(x-4)}\equiv\frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x-4} \quad \Big|\cdot x^3(x-4)$$

$$3x^3+2x^2-9x+4\equiv a(x-4)+bx(x-4)+cx^2(x-4)+dx^3$$

$$3x^3+2x^2-9x+4\equiv(c+d)x^3+(b-4c)x^2+(a-4b)x-4a$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}\begin{cases} c+d=3 \\ b-4c=2 \\ a-4b=-9 \\ -4a=4 \iff \boxed{a=-1} \end{cases}$$

| Sijoitetaan yhtälöihin (1),(2) ja (3).

$$\begin{array}{l} (5) \\ (6) \\ (7) \end{array}\begin{cases} c+d=3 \\ b-4c=2 \\ -1-4b=-9 \iff \boxed{b=2} \end{cases}$$

| Sijoitetaan yhtälöihin (5) ja (6).

$$(8)\begin{cases} c+d=3 \\ 2-4c=2 \iff \boxed{c=0} \end{cases}$$

| Sijoitetaan yhtälöön (8).

$$0+d=3 \iff \boxed{d=3}$$

Siis

$$\frac{3x^3+2x^2-9x+4}{x^3(x-4)}=-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x-4}$$

230.

$$\frac{x+2}{x^2+2x-3}$$

| $x^2+2x-3=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$$

$x=1$ tai $x=-3$

$$=\frac{x+2}{1\cdot(x-1)[x-(-3)]}=\frac{x+2}{(x-1)(x+3)}$$

Siis

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+3)}\equiv\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3} \qquad \Big|\cdot(x-1)(x+3)$$

$$x+2\equiv a(x+3)+b(x-1)$$

$$x+2\equiv(a+b)x+3a-b$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{array}{l} (1) \\ + \\ (2) \end{array}\begin{cases} a+b=1 \\ 3a-b=2 \end{cases}$$

$$\overline{4a \quad =3}$$

$$\boxed{a=\frac{3}{4}}$$

| Sijoitetaan yhtälöön (1).

$$\frac{3}{4}+b=1 \text{ eli } \boxed{b=\frac{1}{4}}$$

Siis

$$\frac{x+2}{x^2+2x-3}=\frac{x+2}{(x-1)(x+3)}=\frac{\frac{3}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{4}}{x+3}\left(=\frac{3}{4x-4}+\frac{1}{4x+12}\right)$$

231.

$$\frac{3x+1}{x^2+x-2}$$

Nimittäjän nollakohdat:

$$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} \Leftrightarrow x=1 \text{ tai } x=-2$$

Siis

$$\frac{3x+1}{x^2+x-2}=\frac{3x+1}{1\cdot(x-1)\left[x-(-2)\right]}=$$

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+2)}\equiv\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2} \qquad \Big|\cdot(x-1)(x+2)$$

$$3x+1\equiv a(x+2)+b(x-1)$$

$$3x+1\equiv(a+b)x+2a-b$$

Saadaan yhtälöpari

$$+\begin{cases} a+b=3 \\ 2a-b=1 \end{cases}$$

$$3a \quad =4$$

$$a=\frac{4}{3}$$

$$b=3-a=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$$

Siis

$$\frac{3x+1}{x^2+x-2}=\frac{\frac{4}{3}}{x-1}+\frac{\frac{5}{3}}{x+2}\ \left(=\frac{4}{3x-3}+\frac{5}{3x+6}\right).$$

232.

$$\frac{2x}{x-x^3}=\frac{2x}{x(1-x^2)}=\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

$$\frac{2}{(1+x)(1-x)}\equiv\frac{a}{1+x}+\frac{b}{1-x} \qquad \Big|\cdot(1+x)(1-x)$$

$$2\equiv a(1-x)+b(1+x)$$

$$2\equiv(-a+b)x+a+b$$

Saadaan yhtälöpari

$$+\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}-a+b=0\\ a+b=2\end{cases}$$

$$2b=2$$

$$\boxed{b=1} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (2).$$

$$a+1=2$$

$$\boxed{a=1}$$

Siis

$$\frac{2x}{x-x^3}=\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$$

Tapa 2

$$\frac{2x}{x-x^3}=\frac{2x}{x\left(1-x^2\right)}=$$

$$\frac{2x}{x(1+x)(1-x)}\equiv\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{1-x} \qquad \Big|\cdot x(1+x)(1-x)$$

$$2x\equiv a(1+x)(1-x)+bx(1-x)+cx(1+x)$$

$$2x\equiv a\left(1-x^2\right)+bx-bx^2+cx+cx^2$$

$$2x\equiv(-a-b+c)x^2+(b+c)x+a$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\ \\ \end{matrix}\begin{cases}-a-b+c=0\\ b+c=2\\ \boxed{a=0}\end{cases} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöihin } (1) \text{ ja } (2).$$

$$+\begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}\begin{cases}-b+c=0\\ b+c=2\end{cases}$$

$$2c=2$$

$$\boxed{c=1} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön } (4).$$

$$b+1=2$$

$$\boxed{b=1}$$

Siis $\quad \dfrac{2x}{x-x^3}=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$

233.

$$\frac{2x^2+2x+12}{(x-2)(x^2+4)} \equiv \frac{a}{x-2}+\frac{bx+c}{x^2+4} \qquad \Big| \cdot (x-2)(x^2+4)$$

$$2x^2+2x+12 \equiv a(x^2+4)+(bx+c)(x-2)$$

$$2x^2+2x+12 \equiv ax^2+4a+bx^2-2bx+cx-2c$$

$$2x^2+2x+12 \equiv (a+b)x^2+(-2b+c)x+4a-2c$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a+b=2 \\ -2b+c=2 \\ 4a-2c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} \boxed{a=2-b} \\ -2b+c=2 \\ 4a-2c=12 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöihin } (2) \text{ ja } (3).$$

$$\begin{cases} -2b+c=2 \\ 4(2-b)-2c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array} \begin{cases} \boxed{c=2+2b} \\ -4b-2c=4 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (5).$$

$$-4b-2(2+2b)=4 \qquad \Big| :2$$

$$-2b-2-2b=2$$

$$-4b=4$$

$$\boxed{b=-1} \qquad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöihin } (4) \text{ ja } (1).$$

$$c=2+2\cdot(-1)=0$$

$$a=2-(-1)=3$$

Vastaus $\dfrac{2x^2+2x+12}{(x-2)(x^2+4)}=\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{-x}{x^2+4}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{x}{x^2+4}$

234.

$$\frac{5x^3-8x^2+5x-4}{(x^2+1)(x-1)^2} \equiv \frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{x-1} \quad \Big| \cdot (x^2+1)(x-1)^2$$

$$5x^3-8x^2+5x-4 \equiv (ax+b)(x-1)^2+c(x^2+1)+d(x^2+1)(x-1)$$

$$5x^3-8x^2+5x-4 \equiv (ax+b)(x^2-2x+1)+ cx^2+c+(dx^2+d)(x-1)$$

$$5x^3-8x^2+5x-4 \equiv ax^3-2ax^2+ax+bx^2-2bx+b+ cx^2+c+dx^3-dx^2+dx-d$$

$$5x^3-8x^2+5x-4 \equiv (a+d)x^3+(-2a+b+c-d)x^2+ (a-2b+d)x+b+c-d$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{cases} a+d=5 \Leftrightarrow \boxed{a=5-d} \\ -2a+b+c-d=-8 \\ a-2b+d=5 \\ b+c-d=-4 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöihin } (2), (3) \text{ ja } (4).$$

$$\begin{cases} -2(5-d)+b+c-d=-8 \\ 5-d-2b+d=5 \\ b+c-d=-4 \end{cases} \qquad \text{eli}$$

$$\begin{array}{l} (5) \\ (6) \\ (7) \end{array} \begin{cases} b+c+d=2 \\ -2b=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{b=0} \\ b+c-d=-4 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöön } (5).$$

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{r}
(8)\\
+\;(9)
\end{array}
\begin{cases}
c+d=2\\
c-d=-4
\end{cases}\\
\hline
2c \quad =-2
\end{array}
$$

$$\boxed{c=-1} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön (8).}$$

$$-1+d=2$$

$$\boxed{d=3} \qquad \Big|\ \text{Sijoitetaan yhtälöön (1).}$$

$$a=5-3$$

$$\boxed{a=2}$$

Siis $\dfrac{5x^3-8x^2+5x-4}{(x^2+1)(x-1)^2} \equiv \dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}$.

235.

$$\frac{4x^4-4x^3+x^2-2x+1}{x(x-1)^2}=\frac{4x^3(x-1)+(x-1)^2}{x(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)\left[4x^3+(x-1)\right]}{x(x-1)^2}=\frac{4x^3+x-1}{x(x-1)}$$

$$=4x+4+\frac{5x-1}{x^2-x}=4x+4+\frac{5x-1}{x(x-1)}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x+4 \\
\hline
x^2-x & 4x^3 \qquad\qquad +x-1 \\
 & \underline{\mp 4x^3 \pm 4x^2} \\
 & 4x^2+\quad x-1 \\
 & \underline{\mp 4x^2 \pm 4x} \\
 & 5x-1
\end{array}
$$

Muodostetaan termille $\dfrac{5x-1}{x(x-1)}$ osamurtohajotelma.

$$\frac{5x-1}{x(x-1)} \equiv \frac{a}{x}+\frac{b}{x-1} \qquad \Big|\cdot x(x-1)$$

$$5x-1 \equiv a(x-1)+bx$$

$$5x-1 \equiv (a+b)x-a$$

$$\begin{cases} a+b=5 \\ -a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$$

Näin ollen $\dfrac{5x-1}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x-1}$.

Siis $\dfrac{4x^4-4x^3+x^2-2x+1}{x(x-1)^2}=4x+4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x-1}$.

236.

$$\frac{x^3+2x-1}{x(x^2+x+1)^2} \equiv \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2+x+1)^2} + \frac{dx+e}{x^2+x+1} \quad \Big| \cdot x(x^2+x+1)^2$$

$$x^3+2x-1 \equiv a(x^2+x+1)^2 + (bx+c)x + (dx+e)x(x^2+x+1)$$

$$x^3+2x-1 \equiv a\left[(x^2)^2 + 2\cdot x^2 \cdot (x+1) + (x+1)^2\right] + bx^2 + cx + (dx^2+ex)(x^2+x+1)$$

$$x^3+2x-1 \equiv a(x^4+2x^3+2x^2+x^2+2x+1) + bx^2 + cx + dx^4 + dx^3 + dx^2 + ex^3 + ex^2 + ex$$

$$x^3+2x-1 \equiv (a+d)x^4 + (2a+d+e)x^3 + (3a+b+d+e)x^2 + (2a+c+e)x + a$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array} \begin{cases} a+d=0 \\ 2a+d+e=1 \\ 3a+b+d+e=0 \\ 2a+c+e=2 \\ \boxed{a=-1} \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöihin } (1)-(4).$$

$$\begin{array}{l} (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \end{array} \begin{cases} \boxed{d=1} \\ -2+d+e=1 \\ -3+b+d+e=0 \\ -2+c+e=2 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöihin } (7)-(9).$$

$$\begin{array}{l} (10) \\ (11) \\ (12) \end{array} \begin{cases} \boxed{e=2} \\ b+e=2 \\ c+e=4 \end{cases} \quad \Big| \text{ Sijoitetaan yhtälöihin } (11) \text{ ja } (12).$$

$$\begin{cases} b=0 \\ c=2 \end{cases}$$

Siis $\dfrac{x^3+2x-1}{x\left(x^2+x+1\right)^2} \equiv -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\left(x^2+x+1\right)^2} + \dfrac{x+2}{x^2+x+1}$.

237.

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \frac{x^3-2x+1-0}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x - 1 \\ \hline x-1 & x^3 \qquad - 2x + 1 \\ & \underline{\mp x^3 \pm x^2} \\ & x^2 - 2x + 1 \\ & \underline{\mp x^2 \pm x} \\ & -x + 1 \\ & \underline{\pm x \mp 1} \\ & 0 \end{array}$$

$$= x^2 + x - 1$$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1-0}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}(x^2+x-1) = 1$$

Vastaus $\frac{\Delta f}{\Delta x} = x^2+x-1,\ \ x\neq 1$

$f'(1) = 1$

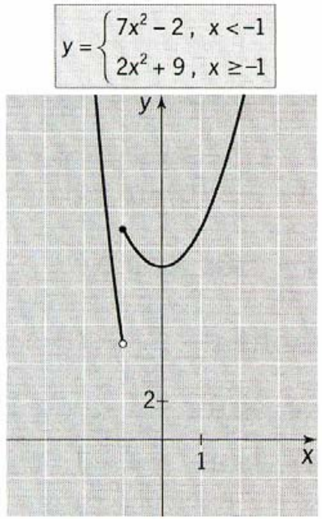
238.

Tutkitaan funktion $g(x) = \begin{cases} 7x^2-2, & \text{kun } x < -1 \\ 2x^2+9, & \text{kun } x \geq -1 \end{cases}$ jatkuvuutta kohdassa $x = -1$.

$$g(-1) = 2\cdot(-1)^2+9 = 11$$
$$\lim_{x\to -1-} g(x) = \lim_{x\to -1-}(7x^2-2) = 7\cdot(-1)^2-2 = 5 \neq 11$$

Funktio g ei ole vasemmalta jatkuva kohdassa $x = -1$, joten se ei voi olla jatkuva tässä kohdassa. Siis se ei voi olla myöskään derivoituva kohdassa $x = -1$.

Graafinen tarkistus:



239.

a) $f(3) = 6\cdot 3-18 = 0$

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-}(6x-18) = 0$$
$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+}(3x^2-27) = 3\cdot 3^2-27 = 0$$

joten f on jatkuva kohdassa $x = 3$.

Siis f voi olla myös derivoituva kohdassa $x = 3$.

Erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3-} \frac{6x - 18 - (6\cdot 3 - 18)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3-} \frac{6x-18}{x-3} = \lim_{x\to 3-} \frac{6(x-3)}{x-3} = 6$$

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3+} \frac{3x^2 - 27 - (6\cdot 3 - 18)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3+} \frac{3x^2-27}{x-3} = \lim_{x\to 3+} \frac{3(x^2-9)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3+} \frac{3(x+3)(x-3)}{x-3}) = \lim_{x\to 3+} 3(x+3)$$
$$= 3(3+3) = 18 \neq 6$$

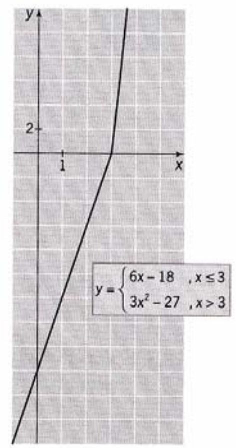
Koska $f'_+(3) \neq f'_-(3)$ ei erotusosamäärällä ole raja-arvoa kohdassa $x = 3$, eikä f ole derivoituva tässä kohdassa.

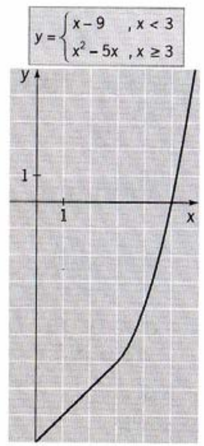
b) $g(x) = \begin{cases} x-9, & x < 3 \\ x^2 - 5x, & x \geq 3 \end{cases}$

$$g'_-(3) = \lim_{x\to 3-} \frac{g(x) - g(3)}{x-3} \qquad \left| \begin{array}{l} g(x) = x - 9, \text{ kun } x < 3 \\ g(3) = 3^2 - 5\cdot 3 = -6 \end{array} \right.$$
$$= \lim_{x\to 3-} \frac{x - 9 - (-6)}{x-3} = \lim_{x\to 3-} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$g'_+(3) = \lim_{x\to 3+} \frac{g(x) - g(3)}{x-3} \qquad \left| \begin{array}{l} g(x) = x^2 - 5x, \text{ kun } x > 3 \\ g(3) = -6 \end{array} \right.$$
$$= \lim_{x\to 3+} \frac{x^2 - 5x - (-6)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3+} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3+} (x-2) = 3 - 2 = 1 = g'_-(3)$$

Siis g on derivoituva, kun $x = 3$ ja $g'(3) = 1$.
Graafinen tarkistus:





240.

$$f(x)=\begin{cases}3x+2, & x<-1\\ x, & x\geq -1\end{cases}$$

a) Kun $x<-1$, niin $f(x)=3x+2$, joten $f'(x)=3$.

Siis *f* on derivoituva kohdassa $x=-2$ ja $f'(-2)=3$.

b) Kohdassa $x=-1$ f:n lauseke vaihtuu.
Lasketaan toispuoliset derivaatat kohdassa $x=-1$.

$$\begin{aligned}f_-'(-1)&=\lim_{h\to 0-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0-}\frac{3(-1+h)+2-[3\cdot(-1)+2]}{h}\\ &=\lim_{h\to 0-}\frac{3h}{h}=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_+'(-1)&=\lim_{h\to 0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0+}\frac{-1+h-(-1)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1\neq f_-'(-1)\end{aligned}$$

Siis f ei ole derivoituva kohdassa $x=-1$.

Vastaus a) $f'(-2)=3$ b) ei derivoituva

241.

$f(x)=\sqrt{x}$ on määritelty, kun $x\geq 0$, joten sillä ei voi olla vasemmanpuolista derivaattaa origossa.

Koska

$$\begin{aligned}f_+'(0)&=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}\\ &=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}\\ &=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty\end{aligned}$$

niin f:llä ei ole myöskään oikeanpuolista derivaattaa origossa.

Siis f ei ole oikealta derivoituva origossa.

242.

$$h(x)=(x+1)|x-1|=\begin{cases}(x+1)(1-x), & x<1\\ (x+1)(x-1), & x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}1-x^2, & x<1\\ x^2-1, & x\geq 1\end{cases}$$

a) $h(x)=1-x^2$, kun $x<1$, joten h on derivoituva kohdassa $x=-1$.

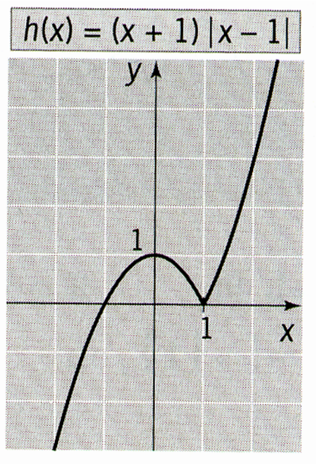
b) Funktio h on määritelty eri lausekkeilla kohdan $x=1$ eri puolilla, joten on laskettava toispuoliset derivaatat.

$$h'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{1-x^2-0}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1-} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{-(1+x)}{1} = -(1+1) = -2$$

$$h'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x^2-1-0}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1+}(x+1) = (1+1) = 2 \neq h'_-(1)$$

joten h ei ole derivoituva kohdassa $x=1$.

Graafinen tarkistus:



243.

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} -x+2 & \text{, kun } x \le 2 \\ x-2 & \text{, kun } x > 2 \end{cases}$$

$$f_-'(2) = \lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-} \frac{-x+2-0}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2-} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-}(-1) = -1$$

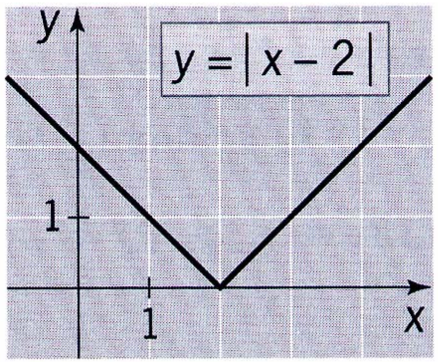
ja

$$f_+'(2) = \lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{x-2-0}{x-2} = \lim_{x\to 2+} 1 = 1$$

joten $f_-'(2) \neq f_+'(2)$.

Siis f ei ole derivoituva, kun $x=2$.

Graafinen tarkistus:



244.

$$g(x) = x^2\,|x-1|$$

Todistus.

Tutkitaan funktion toispuolisia derivaattoja kohdassa $x = 1$.

- $$\begin{aligned} g'_-(1) &= \lim_{x\to 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1-} \frac{x^2\,|x-1|-0}{x-1} \qquad \big|\, x-1<0, \text{ kun } x<1 \\ &= \lim_{x\to 1-} \frac{x^2\cdot(-x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2(-1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1-}(-x^2) = -1^2 = -1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g'_+(1) &= \lim_{x\to 1+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1+} \frac{x^2\,|x-1|-0}{x-1} \qquad \big|\, x-1>0, \text{ kun } x>1 \\ &= \lim_{x\to 1+} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} x^2 = 1^2 = 1 \end{aligned}$$

Koska $g'_-(1) \neq g'_+(1)$, niin g ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. $\square$

245.

$$f(x) = \begin{cases} 5-x^3\,, & x \le 1 \\ 3x^2-9x+10\,, & x>1 \end{cases}$$

Polynomifunktiona f on derivoituva, kun $x \neq 1$.

Derivoituvuus kohdassa $x = 1$:

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{5-x^3-(5-1^3)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1-} \frac{-x^3+1}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} & -x^2-x-1 \\ x-1 & -x^3 \qquad\qquad +1 \\ & \underline{\pm x^3 \mp x^2} \\ & -x^2 \qquad +1 \\ & \underline{\pm x^2 \mp x} \\ & -x+1 \\ & \underline{\pm x \mp 1} \\ & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 1-}(-x^2-x-1) \\ &= -1-1-1 = -3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'_+(1) &= \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1+} \frac{3x^2-9x+10-(5-1^3)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1+} \frac{3x^2-9x+6}{x-1}
\end{aligned}
\qquad
\left|
\begin{aligned}
&3x^2-9x+6=0 \\
&x=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 3\cdot 6}}{2\cdot 3}=\frac{9\pm 3}{6} \\
&x=2 \quad \text{tai} \quad x=1
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 1+} \frac{3(x-1)(x-2)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1+} 3(x-2) \\
&= 3(1-2) = -3 = f'_-(1)
\end{aligned}
$$

Siis funktio f on derivoituva myös kohdassa $x=1$.

Vastaus On.

246.

$$
f(x)=\begin{cases} 6x-5, & x<-1 \\ -x^3-3x-15, & x\geq -1 \end{cases}
$$

Funktio f on polynomifunktiona derivoituva, kun $x\neq -1$.

Tutkitaan derivoituvuus kohdassa $x=-1$:

$$
f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1-} \frac{6x-5+11}{x+1}
$$

$$
= \lim_{x\to -1-} \frac{6x+6}{x+1} = \lim_{x\to -1-} \frac{6(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1-} 6 = 6
$$

$$
\begin{aligned}
f'_+(-1) &= \lim_{x\to -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \\
&= \lim_{x\to -1+} \frac{-x^3-3x-15+11}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1+} \frac{-x^3-3x-4}{x+1}
\end{aligned}
$$

$$
\left|
\begin{array}{rl}
 & -x^2 + x - 4 \\
x+1 \,) & -x^3 \qquad 3x - 4 \\
 & (\pm)x^3 (\pm)x^2 \\
\hline
 & x^2 - 3x - 4 \\
 & (\mp)x^2 (\mp)x \\
\hline
 & -4x - 4 \\
 & (\pm)4x (\pm)4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to -1+} (-x^2+x-4) \\
&= -(-1)^2+(-1)-4 \\
&= -1-1-4=-6
\end{aligned}
$$

Siis $f'_-(-1)\neq f'_+(-1)$, joten funktio ei ole derivoituva kohdassa $x=-1$.

Vastaus Funktio f ei ole derivoituva.

247.

$$f(x)=\begin{cases} x^3+4x, & x<1 \\ x^2+5x-1, & x\geq 1 \end{cases}$$

Koska $f_1(x)=x^3+4x,\ x<1$ ja $f_2(x)=x^2+5x-1,\ x>1$ ovat polynomifunktioina derivoituvia, funktio f on derivoituva, kun $x\neq 1$ ja $f'(x)=\begin{cases} 3x^2+4, & x<1 \\ 2x+5, & x>1 \end{cases}$

Tutkitaan funktion f derivoituvuutta kohdassa $x=1$.

- $f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $\quad\Big|\ f(x)=x^3+4x,\ x<1$, $f(1)=1^2+5\cdot 1-1=5$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+4x-5}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+4x-5}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+5 \\ x-1 & x^3+4x-5 \\ & \underline{\mp x^3 \pm x^2} \\ & x^2+4x-5 \\ & \underline{\mp x^2 \pm x} \\ & 5x-5 \\ & \underline{\mp 5x \pm 5} \\ & 0 \end{array}$$

$$=\lim_{x\to 1-}(x^2+x+5)$$

$$=1^2+1+5=7$$

- $f_+'(1)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $\quad\Big|\ f(x)=x^2+5x-1,\ x>1$, $f(1)=5$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2+5x-1-5}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2+5x-6}{x-1}\quad\Big|\ x^2+5x-6=0,\ x=-6 \text{ tai } x=1$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{1\cdot(x+6)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(x+6)=7$$

Koska $f_-'(-1)=f_+'(-1)$, niin funktio f on derivoituva myös kohdassa $x=1$.

Vastaus On.

248.

$$g(x)=\begin{cases} ax^2+b, & x<2 \\ 7x-5, & x\geq 2 \end{cases}$$

a) Funktio g on selvästi polynomifunktiona jatkuva, kun $x\neq 2$.

Koska

- $\lim\limits_{x\to 2-}g(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(ax^2+b)=4a+b$
- $\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(7x-5)=9$
- $g(2)=7\cdot 2-5=9$

niin g on jatkuva myös kohdassa $x=2$, jos $4a+b=9$ eli $b=9-4a$. Siis $a\in\mathbb{R}$ ja $b=9-4a$.

b) Jotta funktio g olisi derivoituva, niin sen pitää olla myös jatkuva, joten $b = 9 - 4a$.

Tällöin $g(x) = \begin{cases} ax^2 + 9 - 4a, & x < 2 \\ 7x - 5, & x \geq 2. \end{cases}$

Määritetään funktion g toispuoliset derivaatat kohdassa $x = 2$.

- $g'_-(2) = \lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ $\quad\left|\; \begin{aligned} &g(x) = ax^2 + 9 - 4a,\ x < 2 \\ &g(2) = 7 \cdot 2 - 5 = 9 \end{aligned}\right.$

$$= \lim_{x \to 2-} \frac{ax^2 + 9 - 4a - 9}{x - 2} = \lim_{x \to 2-} \frac{ax^2 - 4a}{x - 2}$$
$$= \lim_{x \to 2-} \frac{a(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2-} \frac{a(x + 2)(x - 2)}{x - 2}$$
$$= \lim_{x \to 2-} a(x + 2) = 4a$$

- $g'_+(2) = \lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ $\quad\left|\; \begin{aligned} &g(x) = 7x - 5,\ x > 2 \\ &g(2) = 9 \end{aligned}\right.$

$$= \lim_{x \to 2+} \frac{7x - 5 - 9}{x - 2} = \lim_{x \to 2+} \frac{7(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2+} 7 = 7$$

Funktio g on derivoituva kohdassa $x = 2$, kun

$$g'_-(2) = g'_+(2)$$
$$4a = 7$$
$$a = \frac{7}{4}$$

Tällöin $b = 9 - 4a = 9 - 4 \cdot \dfrac{7}{4} = 2$. Siis $a = \dfrac{7}{4}$ ja $b = 2$.

249.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2a, & x \leq -1 \\ 6x + b, & x > -1 \end{cases}$$

Funktio f on polynomifunktiona derivoituva, kun $x \neq -1$.
Jotta f olisi derivoituva myös kohdassa $x = -1$, niin toispuolisten derivaattojen pitää olla tässä kohdassa samat.

- $f'_-(x) = \lim\limits_{x \to -1-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$

$$= \lim_{x \to -1-} \frac{ax^2 - 2a - \left[a \cdot (-1)^2 - 2a\right]}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \to -1-} \frac{ax^2 - 2a - a + 2a}{x + 1} = \lim_{x \to -1-} \frac{a(x^2 - 1)}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \to -1-} \frac{a(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1-} a(x - 1) = -2a$$

- $f'_+(x) = \lim\limits_{x \to -1+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$

$$= \lim_{x \to -1+} \frac{6x + b - (a - 2a)}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \to -1+} \frac{6x + b + a}{x + 1}$$

Koska nimittäjän raja-arvo on $\lim\limits_{x \to -1+} (x + 1) = 0$, niin jotta $f'_+(-1)$ voisi olla olemassa, pitää myös osoittajan raja-arvon olla nolla.

Siis

$$\lim_{x\to -1+}(6x+b+a)=0$$
$$-6+b+a=0$$
$$b=6-a$$

Tällöin

$$f'_+(x)=\lim_{x\to -1+}\frac{6x+(6-a)+a}{x+1}=\lim_{x\to -1+}\frac{6(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1+}6=6$$

Saadaan yhtälö $-2a=6$ eli $a=-3$.

Näin ollen $b=6-a=6-(-3)=9$.

Tapa 2

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2a, & x\le -1 \\ 6x+b, & x>-1 \end{cases}$$

Funktio f on polynomifunktiona derivoituva, kun $x\neq -1$.

Tutkitaan erikseen kohta $x\neq -1$.

1° Jatkuvuus kohdassa $x=-1$

$$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}(ax^2-2a)=-a$$
$$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}(6x+b)=6\cdot(-1)+b=b-6$$
$$f(-1)=a(-1)^2-2a=a-2a=-a$$

Saadaan yhtälö $-a=b-6$

$b=6-a$ (jatkuvuusehto)

2° Toispuoliset derivaatat

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1-}\frac{ax^2-2a-(-a)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1-}\frac{ax^2-a}{x+1}=\lim_{x\to -1-}\frac{a(x^2-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1-}\frac{a(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1-}a(x-1)$$
$$=a(-1-1)=-2a$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{6x+b-(-a)}{x+1} \qquad |\, b=6-a$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{6x+6-a+a}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{6x+6}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{6(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1+}6=6$$

Oltava $f_-'(-1)=f_+'(-1)$, joten $-2a=6$, josta $a=-3$ ja $b=6-a=6-(-3)=9$.

Vastaus $a=-3$ ja $b=9$

250.

$$g(x)=\begin{cases}2x^3-ax, & x\le 1\\ ax^2-2x+b, & x>1\end{cases}$$

Funktio g on polynomifunktiona derivoituva, kun $x\neq 1$.

Jotta g olisi derivoituva myös kohdassa $x=1$, niin toispuolisten derivaattojen pitää tässä kohdassa olla yhtä suuret.

- $$g'_-(1)=\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{2x^3-ax-(2\cdot 1^3-a\cdot 1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{2x^3-ax+a-2}{x-1}$$

Koska nimittäjän raja-arvo $\lim_{x\to 1-}(x-1)=0$, niin myös osoittajan raja-arvon pitää olla nolla, jotta $g'_-(1)$ voisi olla olemassa.

Siis

$$\lim_{x\to 1-}(2x^3-ax+a-2)=0$$

$$2-a+a-2=0$$

$$0=0 \quad \text{aina tosi}$$

$$a\in\mathbb{R}$$

Osoittaja on siis aina jaollinen binomilla $x-1$.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+2x-a+2 \\ \hline x-1 & 2x^3 \qquad\qquad -ax+a-2 \\ & \underset{(\mp)}{}2x^3 \ \underset{(\pm)}{}2x^2 \\ \hline & 2x^2-ax+a-2 \\ & \underset{(\mp)}{}2x^2 \ \underset{(\pm)}{}2x \\ \hline & (-a+2)x+a-2 \\ & \underset{(\mp)}{}(-a+2)x \underset{(\mp)}{}a \underset{(\pm)}{}2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Siis $g'_-(1)=\lim_{x\to 1-}(2x^2+2x-a+2)=6-a$.

Oikeanpuolinen derivaatta kohdassa $x=1$:

- $$g'_+(1)=\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{ax^2-2x+b-(2-a)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{ax^2-2x+a+b-2}{x-1}$$

Koska nimittäjän raja-arvo $\lim_{x\to 1-}(x-1)=0$, niin myös osoittajan raja-arvon pitää olla nolla, jotta $g'_-(1)$ voisi olla olemassa.

Siis

$$\lim_{x\to 1+}(ax^2-2x+a+b-2)=0$$

$$2a+b-4=0$$

$$b=4-2a$$

Saadaan

$$\begin{aligned} g'_+(1) &= \lim_{x\to 1+} \frac{ax^2-2x+a+4-2a-2}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1+} \frac{ax^2-2x-a+2}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} & ax+a-2 \\ \hline x-1 & ax^2-2x-a+2 \\ & (\mp)ax^2(\pm)ax \\ \hline & (a-2)x-a+2 \\ & (\mp)(a-2)x(\pm)a(\mp)2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Siis

$$g'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{ax^2-2x-a+2}{x-1} = \lim_{x\to 1+}(ax+a-2) = 2a-2$$

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} g'_-(1) &= g'_+(1) \\ 6-a &= 2a-2 \\ -3a &= -8 \\ a &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$b = 4-2a = 4-2\cdot\frac{8}{3} = -1\frac{1}{3}$$

Vastaus $a = 2\frac{2}{3}$, $b = -1\frac{1}{3}$

Tapa 2

$$g(x) = \begin{cases} 2x^3-ax, & x \le 1 \\ ax^2-2x+b, & x > 1 \end{cases}$$

Funktio g on polynomifunktiona derivoituva, kun $x \ne 1$.

Derivoituvuus kohdassa $x = 1$:

1° Funktion g on oltava jatkuva kohdassa $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1-}(2x^3-ax) = 2-a$$
$$\lim_{x\to 1+} g(x) = \lim_{x\to 1+}(ax^2-2x+b) = a-2+b$$
$$g(1) = 2\cdot 1^3 - a\cdot 1 = 2-a$$

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 2-a &= a-2+b \\ b &= 4-2a \qquad \text{(jatkuvuusehto)} \end{aligned}$$

2° Derivoituvuus kohdassa $x = 1$:

$$g'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{2x^3-ax-(2\cdot 1^3-a)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1-} \frac{2x^3 - ax + a - 2}{x - 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 2x + 2 - a \\
x - 1 & 2x^3 \qquad - ax + a - 2 \\
 & \underline{(\mp) 2x^3 \; (\pm) 2x^2} \\
 & 2x^2 \; - ax + a - 2 \\
 & \underline{(\mp) 2x^2 \; (\pm) 2x} \\
 & (2 - a)x + a - 2 \\
 & \underline{(\mp)(2 - a)x (\mp) a (\pm) 2} \\
 & 0
\end{array}$$

$$= \lim_{x \to 1-} (2x^2 + 2x + 2 - a) = 6 - a$$

$$g_+ '(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{ax^2 - 2x + b - (2 - a)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{ax^2 - 2x + 4 - 2a - 2 + a}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{ax^2 - 2x - a + 2}{x - 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & ax + a - 2 \\
x - 1 & ax^2 - 2x - a + 2 \\
 & \underline{(\mp) ax^2 \; (\pm) ax} \\
 & (a - 2)x - a + 2 \\
 & \underline{(\mp)(a - 2)x (\pm) a (\mp) 2} \\
 & 0
\end{array}$$

$$= \lim_{x \to 1+} (ax + a - 2)$$

$$= a + a - 2$$

$$= 2a - 2$$

Saadaan yhtälö

$$6 - a = 2a - 2$$

$$3a = 8$$

$$a = \frac{8}{3}$$

$$b = 4 - 2a = 4 - 2 \cdot \frac{8}{3} = -1\frac{1}{3}$$

Vastaus $a = 2\frac{2}{3}$, $b = -1\frac{1}{3}$

251.

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Jatkuvien funktioiden $f_1(x)=\cos x$ ja $f_2(x)=\frac{1}{x}$ yhdistettynä funktiona funktio $f_3(x)=\cos\frac{1}{x}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan $x\neq 0$.

Tällöin jatkuvien funktioiden $f_4(x)=x$ ja $f_3(x)=\cos\frac{1}{x}$ tulona $f_5(x)=x\cos\frac{1}{x}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan $x\neq 0$.

Funktio f on siis selvästi jatkuva, kun $x\neq 0$.

Tutkitaan funktion jatkuvuutta kohdassa $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right)=0$,

  koska $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ ja $-1\leq\cos\frac{1}{x}\leq 1$.

- $f(0)=0$

Koska $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, niin f on jatkuva myös kohdassa $x=0$.

Vastaus On.

252.

Funktion f derivaatta kohdassa $x=a$ on

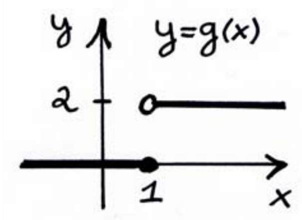
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Toinen tapa:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Esimerkiksi funktio $g(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x\leq 1\\ 2, & \text{kun } x>1\end{cases}$ ei ole derivoituva kohdassa $x=1$, koska funktio g ei ole edes jatkuva kohdassa $x=1$:

- $\lim\limits_{x\to 1-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1-} 0=0$
- $\lim\limits_{x\to 1+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1+} 2=2\neq 0$
- $g(1)=0$



Tutkitaan funktion $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{kun } x\neq 0\\ 0, & \text{kun } x=0\end{cases}$ derivoituvuutta kohdassa $x=0$.

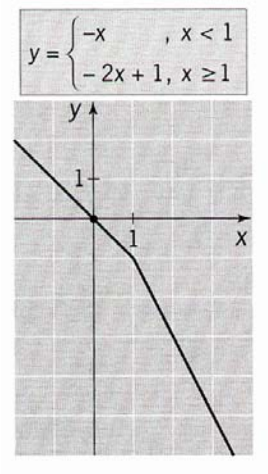
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0,$$

koska $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ ja $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$.

Funktio f on siis derivoituva kohdassa $x=0$.

253.

Olkoon funktio $f(x)=\begin{cases}-x & ,\ x<1\\ -2x+1 & ,\ x\geq 1\end{cases}$



Osoitetaan, että f toteuttaa vaaditut ehdot.

Jatkuvuus

f on polynomifunktiona jatkuva, kun $x\neq 1$.

Koska

- $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(-x)=-1$
- $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(-2x+1)=-2+1=-1$
- $f(1)=-2\cdot 1+1=-1$

niin f on jatkuva myös, kun $x=1$. Siis f on jatkuva kaikkialla.

Aidosti vähenevyys

Olkoon $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ ja $x_1<x_2$.

1° Jos $x_1<1$ ja $x_2<1$, niin $f(x_1)=-x_1$ ja $f(x_2)=-x_2$.

Koska $x_1<x_2$, niin $-x_1>-x_2$, joten $f(x_1)>f(x_2)$ ja f on aidosti vähenevä.

2° Jos $x_1<1$ ja $x_2\geq 1$, niin $f(x_1)=-x_1$ ja $f(x_2)=-2x_2+1$.

Tällöin

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=-x_1-(-2x_2+1)\\&=-x_1+2x_2-1\\&=-x_1+x_2+x_2-1\\&=\underbrace{x_2-x_1}_{>0}+\underbrace{x_2-1}_{\geq 0}>0\end{aligned}$$

joten $f(x_1)>f(x_2)$ ja f on aidosti vähenevä.

3° Jos $x_1\geq 1$ ja $x_2\geq 1$, niin

$$f(x_1)=-2x_1+1 \text{ ja } f(x_2)=-2x_2+1$$

Tällöin

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=-2x_1+1-(-2x_2+1)\\&=-2x_1+1+2x_2-1\\&=2\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}>0\ ,\end{aligned}$$

joten $f(x_1)>f(x_2)$ ja f on aidosti vähenevä.

Kohtien 1°, 2° ja 3° mukaan f on kaikkialla aidosti vähenevä.

Derivoituvuus

Funktio ei ole derivoituva kohdassa $x=1$:

$$\begin{aligned}f'_-(1)&=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{-x-(-2\cdot 1+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{-x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1-}(-1)=-1\end{aligned}$$

$$f_+'(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{-2x+1-(-2\cdot 1+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1+} \frac{-2x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{-2(x-1)}{x-1} = -2 \neq -1$$

Siis $f_-'(1) \neq f_+'(1)$ ja funktio f ei ole derivoituva kohdassa $x=1$. □

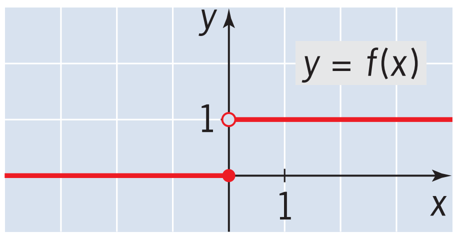
254.

Funktio f on kasvava, kun kaikilla $x_1, x_2 \in M_f$ ehdosta $x_1 < x_2$ seuraa, että $f(x_1) \le f(x_2)$.

Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 0 \\ 1, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

on epäjatkuva ja kasvava.



- **Epäjatkuvuus**

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 1 = 1 \neq 0$$
$$f(0) = 0$$

Koska $\lim_{x\to 0-} f(x) \neq \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0)$, niin f on epäjatkuva origossa. □

- **Kasvavuus**

Funktion arvot eivät selvästikään koskaan pienene, kun muuttujan *x* arvot kasvavat $(0<1)$, joten f on kasvava.

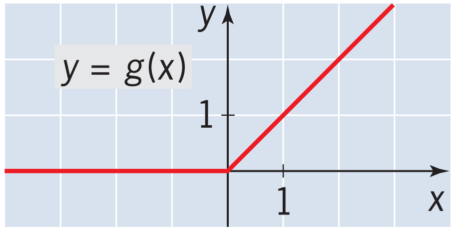
Kasvavuus voidaan tietysti todistaa myös seuraavasti:
Oletetaan, että $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ja $x_1 < x_2$.

1° Jos $x_1 \le 0$ ja $x_2 \le 0$, niin $f(x_1) = 0$ ja $f(x_2) = 0$, joten väite $f(x_1) \le f(x_2)$ on tosi.

2° Jos $x_1 \le 0$ ja $x_2 > 0$, niin $f(x_1) = 0$ ja $f(x_2) = 1$, joten väite $f(x_1) \le f(x_2)$ on tosi.

3° Jos $x_1 > 0$ ja $x_2 > 0$, niin $f(x_1) = 1$ ja $f(x_2) = 1$, joten väite $f(x_1) \le f(x_2)$ on tosi. □

Esimerkiksi funktio $g(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x\le 0\\ x, & \text{kun } x>0\end{cases}$ on kasvava ja jatkuva origossa, mutta ei derivoituva.



- **Kasvavuus**
  Funktion arvot eivät selvästikään koskaan pienene, kun muuttujan x arvot kasvavat , joten g on kasvava.

  Kasvavuus voidaan tietysti todistaa myös seuraavasti:

  Oletetaan, että $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ja $x_1 < x_2$.

  1° Jos $x_1 \le 0$ ja $x_2 \le 0$, niin $g(x_1)=0$ ja $g(x_2)=0$, joten väite $g(x_1)\le g(x_2)$ on tosi.

  2° Jos $x_1 \le 0$ ja $x_2 > 0$, niin $g(x_1)=0$ ja $g(x_2)=x_2\ \ (>0)$, joten väite $g(x_1)\le g(x_2)$ on tosi.

  3° Jos $x_1 > 0$ ja $x_2 > 0$, niin $g(x_1)=x_1$ ja $g(x_2)=x_2\ \ (>x_1)$, joten väite $g(x_1)\le g(x_2)$ on tosi. $\square$

- **Jatkuvuus origossa**

  $$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} 0 = 0$$
  $$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} x = 0$$
  $$g(0)=0$$

  Siis $\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = g(0)$, joten g on jatkuva origossa.

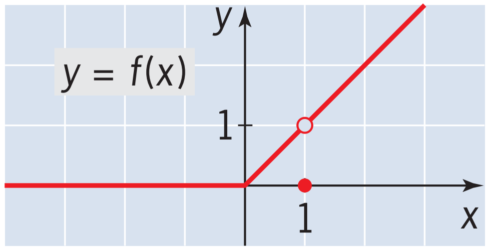
- **Derivoituvuus origossa**

  $$g_-'(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \qquad \left|\begin{array}{l} g(x)=0,\ \text{kun } x<0\\ g(0)=0\end{array}\right.$$
  $$= \lim_{x\to 0-}\frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0-} 0 = 0$$
  $$g_+'(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \qquad \left|\begin{array}{l} g(x)=x,\ \text{kun } x>0\\ g(0)=0\end{array}\right.$$
  $$= \lim_{x\to 0+}\frac{x-0}{x} = \lim_{x\to 0+} 1 = 1$$

  Koska $g_-'(0) \ne g_+'(0)$, niin g ei ole derivoituva origossa. $\square$

255.

Esimerkiksi funktiolla $f(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x\le 0 \text{ tai } x=1\\ x, & \text{kun } x>0 \text{ tai } x\ne 1\end{cases}$ on täsmälleen yksi epäjatkuvuuspiste ja ei ole derivaattaa kahdessa pisteessä.



1° Jatkuvuus

Funktio f on selvästi jatkuva väleillä

$$]-\infty, 0[,\ ]0, 1[\text{ ja }]1, \infty[.$$

Tutkitaan jatkuvuutta pisteessä $x=0$:

- $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} 0=0$
- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} x=0$
- $f(0)=0$

Koska $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=f(0)$, niin f on jatkuva myös pisteessä $x=0$.

Tutkitaan jatkuvuutta pisteessä $x=1$:

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x=1$
- $f(1)=0$

Koska $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\ne f(1)$, niin f on epäjatkuva pisteessä $x=1$. □

2° Derivoituvuus

Piste $x=0$:

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad \left| \begin{array}{l} f(x)=0, \text{ kun } x<0 \\ f(0)=0 \end{array}\right.$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{0-0}{x}=\lim_{x\to 0-}0=0$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad \left| \begin{array}{l} f(x)=x, \text{ kun } x>0,\ x\ne 1 \\ f(0)=0 \end{array}\right.$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x-0}{x}=\lim_{x\to 0+}1=1$$

Koska $f_-'(0)\ne f_+'(0)$, niin f ei ole derivoituva pisteessä $x=0$.

Piste $x=1$:

Koska f on epäjatkuva pisteessä $x=1$, niin f ei ole derivoituva pisteessä $x=0$. □

256.

Osoitetaan, että ehdon (1) täyttävä funktio on kasvava.

Olkoon $x > y$. Tällöin $f(x) - f(y) \geq x - y > 0$, joten

$f(x) > f(y)$, eli f on (aidosti) kasvava. $\square$

Koska f on derivoituva, niin

$$f'(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \Big| \; f(x) - f(y) \geq x - y$$

$$\geq \lim_{h \to 0+} \frac{x + h - x}{h} = 1$$

eli $f'(x) \geq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Pyydetyksi esimerkkifunktioksi käy $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$

Osoitetaan, että ehto (1) on voimassa:

1. Jos $x, y < 1$, $x > y$, niin $f(x) - f(y) = x - y \geq x - y$.

2. Jos $x \geq 1$ ja $y < 1$, $x > y$, niin
$f(x) - f(y) = 2x - y \geq x - y$.

3. Jos $x, y \geq 1$, $x > y$, niin

$$f(x) - f(y) = 2x - 2y = 2\underbrace{(x - y)}_{>0} \geq x - y.$$

Lisäksi f on epäjatkuva, sillä $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} x = 1 \neq 2 = f(1)$.

257.

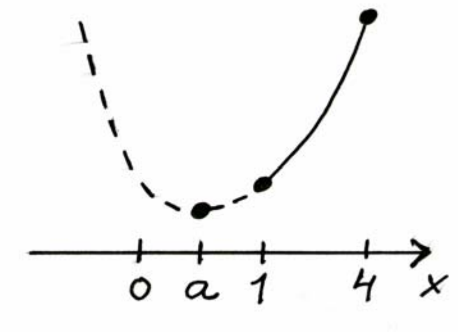
$0 \leq a \leq 2$

$f(a)$ on funktion $g(x) = x^2 - 2ax$ pienin arvo välillä $1 \leq x \leq 4$.

Funktion g kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x^2 + 2ax = 0 \Leftrightarrow x(x - 2a) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 2a$

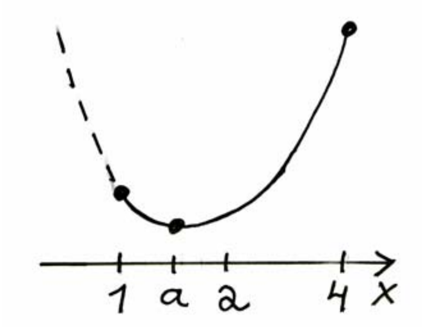
Tällöin paraabelin huippu on kohdassa $x_0 = \dfrac{0 + 2a}{2} = a$.

1) Jos $0 \leq a < 1$, niin huipun x-koordinaatti ei ole välillä $[1, 4]$. Funktio g on välillä $[1, 4]$ aidosti kasvava ja näin ollen sen pienin arvo tällä välillä on $g(1) = 1^2 - 2a \cdot 1 = 1 - 2a$.

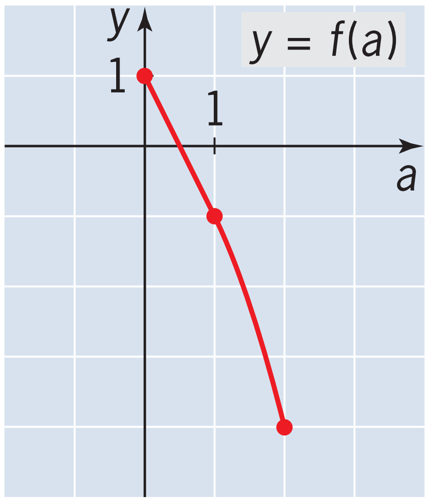


2) Jos $1 \le a \le 2$, niin huipun x-koordinaatti on välillä $[1,4]$ ja funktion g pienin arvo välillä $[1,4]$ on

$$g(x_0) = g(a) = a^2 - 2a \cdot a = -a^2$$



Siis $f(a) = \begin{cases} 1-2a, & 0 \le a < 1 \\ -a^2, & 1 \le a \le 2. \end{cases}$



Funktion f derivaatta, kun $a \ne 1$ ja $a \ne 2$, on

$$f'(a) = \begin{cases} -2, & 0 < a < 1 \\ -2a, & 1 < a < 2 \end{cases}$$

Näin ollen $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \frac{3}{2} = -3$.

Tutkitaan, onko f:llä derivaattaa myös välin $]0, 2[$ pisteessä $a = 1$:

$$f_-'(1) = \lim_{a\to 1-} \frac{f(a) - f(1)}{a-1} \qquad \left| \begin{array}{l} f(a) = 1-2a, \text{ kun } a < 1 \\ f(1) = -1^2 = -1 \end{array} \right.$$

$$= \lim_{a\to 1-} \frac{1-2a-(-1)}{a-1} = \lim_{a\to 0-} \frac{-2(a-1)}{a-1} = \lim_{a\to 0-}(-2) = -2$$

$$f_+'(1) = \lim_{a\to 1+} \frac{f(a) - f(1)}{a-1} \qquad \left| \begin{array}{l} f(a) = -a^2, \text{ kun } a > 1 \\ f(1) = -1 \end{array} \right.$$

$$= \lim_{a\to 1+} \frac{-a^2-(-1)}{a-1} = \lim_{a\to 1+} \frac{-(a^2-1)}{a-1} = \lim_{a\to 1+} \frac{-(a+1)(a-1)}{a-1}$$

$$= \lim_{a\to 1+}(-a-1) = -2$$

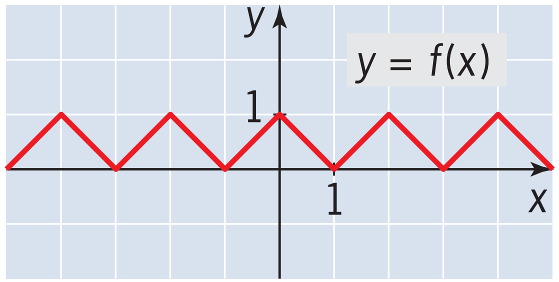
Koska $f_-'(1) = f_+'(1)$, niin f:llä on derivaatta myös välin $]0, 2[$ pisteessä $a = 1$.

258.

f:n jakso on 2 eli $f(x+2)=f(x)$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}1+x, \text{ kun } -1\le x\le 0\\ 1-x, \text{ kun } \quad 0\le x\le 1\end{cases}$$

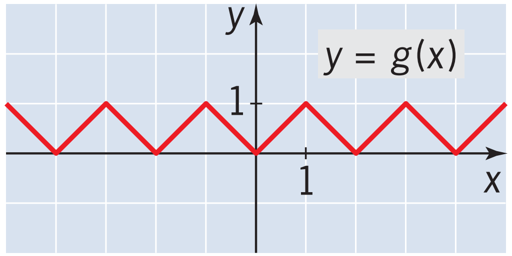
Funktion f jakso on 2, joten sen kuvaaja toistuu samanlaisena kuin mitä se on välillä $[-1, 1]$, koska välin $[-1, 1]$ pituus on 2.



Selvästi funktio f ei ole derivoituva kohdissa $x=n$, jossa $n\in\mathbb{Z}$, koska näissä pisteissä kuvaajalla ei ole tangenttia (toispuoliset derivaatat -1 ja 1 eli erisuuret).

Koska $g(x)=f(x+1)$, niin funktion g kuvaaja saadaan siirtämällä funktion f kuvaaja yhdellä yksiköllä vasemmalle:

$$g(x)=f(x+1)=\begin{cases}1+(x+1), \text{ kun } -1\le x+1\le 0\\ 1-(x+1), \text{ kun } \quad 0\le x+1\le 1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x+2, \text{ kun } -2\le x\le -1\\ -x, \quad \text{ kun } -1\le x\le 0\end{cases}$$



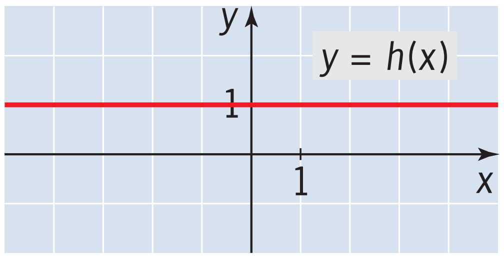
Funktio g ei siis myöskään ole derivoituva kohdissa $x=n$, jossa $n\in\mathbb{Z}$.

Koska $h(x)=f(x)+f(x+1)=f(x)+g(x)$, niin $h(x)=1$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & 0\le x\le 1\end{cases} \quad \text{ja} \quad g(x)=\begin{cases}-x, \text{ kun } -1\le x\le 0\\ x, \text{ kun } \quad 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}(1+x)+(-x), & -1\le x\le 0\\ (1-x)+x, & 0\le x\le 1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, \text{ kun } -1\le x\le 0\\ 1, \text{ kun } \quad 0\le x\le 1\end{cases} =1, \text{ kun } -1\le x\le 1$$

Funktion h jakso on 2, joten $h(x)=1$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$.



Funktio h on vakiofunktiona derivoituva kaikkialla.

259.

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\le 1\\ 4x+2, & x>1\end{cases}$$

Funktio *f* ei ole jatkuva kohdassa $x=1$, koska

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(1-x^2)=1-1=0$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(4x+2)=4+2=6\ne 0$$
$$f(1)=1-1=0$$

Funktiolla *f* ei siis välttämättä ole integraalifunktiota.

Oletetaan, että funktiolla f on integraalifunktio *F*.

Tällöin välttämättä $F(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{3}x^3+C, & x\le 1\\ 2x^2+2x+D, & x>1\end{cases}$

koska selvästi $F'(x)=f(x)$, kun $x\ne 1$.

Jotta funktiolla *f* olisi integraalifunktio *F*, pitäisi

1) funktion *F* olla jatkuva myös kohdassa $x=1$
2) $F'(1)=f(1)$

1) Jatkuvuus kohdassa $x=1$

Koska

$$\lim_{x\to 1-} F(x)=\lim_{x\to 1-}\left(x-\frac{1}{3}x^3+C\right)=1-\frac{1}{3}+C=C+\frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to 1+} F(x)=\lim_{x\to 1+}(2x^2+2x+D)=2+2+D=D+4$$
$$F(1)=1-\frac{1}{3}+C=C+\frac{2}{3}$$

Saadaan yhtälö

$$C+\frac{2}{3}=D+4$$
$$D=C-3\frac{1}{3}$$

Tällöin $F(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{3}x^3+C, & x\le 1\\ 2x^2+2x+C-3\frac{1}{3}, & x>1\end{cases}$

2) $F'(1)=f(1)$

$$F'_-(1)=\lim_{x\to 1-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} \quad \Big|\; x<1,\text{ joten } F(x)=x-\frac{1}{3}x^3+C$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{x-\frac{1}{3}x^3+C-\left(1-\frac{1}{3}+C\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}$$

Jaetaan murtolauseke jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\
\hline
x-1 & -\frac{1}{3}x^3 \qquad\qquad + x - \frac{2}{3} \\
 & \underline{\pm\frac{1}{3}x^3 \mp \frac{1}{3}x^2} \\
 & \qquad -\frac{1}{3}x^2 + \quad x - \frac{2}{3} \\
 & \qquad \underline{\pm\frac{1}{3}x^2 \mp \frac{1}{3}x} \\
 & \qquad\qquad \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \\
 & \qquad\qquad \underline{\mp\frac{2}{3}x \pm \frac{2}{3}} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Siis

$$
\begin{aligned}
F_-'(1) &= \lim_{x\to 1-} \frac{x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1-} \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0
\end{aligned}
$$

Vastaavasti saadaan

$$
F_+'(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \qquad \left|\; \begin{array}{l} x > 1, \text{ joten} \\ F(x) = 2x^2 + 2x + C - 3\frac{1}{3} \end{array}\right.
$$

$$
= \lim_{x\to 1+} \frac{2x^2 + 2x + C - 3\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{3} + C\right)}{x-1}
$$

$$
= \lim_{x\to 1+} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x-1} \qquad \left|\; \begin{array}{l} 2x^2 + 2x - 4 = 0 \\ x = 1 \text{ tai } x = -2 \end{array}\right.
$$

$$
= \lim_{x\to 1+} \frac{2(x-1)(x+2)}{x-1}
$$

$$
= \lim_{x\to 1+} 2(x+2) = 6
$$

Koska $F_-'(1) \neq F_+'(1)$, funktio f ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$, joten funktiolla f ei ole integraalifunktiota.

Vastaus Ei ole.

260.

Avoimella välillä määritellyn funktion *f* integraalifunktiolla *F* tarkoitetaan funktiota, joka toteuttaa ehdon $F'(x) = f(x)$ välin jokaisessa pisteessä eli $F' = f$.

Funktio *f* on jatkuva, joten sillä on integraalifunktio. Funktiota $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x+1|-x$ ei voida integroida suoraan, joten se esitetään paloittain määritellyssä muodossa.

Itseisarvolausekkeen nollakohta on $x=-1$. Tällöin

$$f(x)=\begin{cases}-x-1-x, & \text{kun } x<-1\\ x+1-x, & \text{kun } x\geq -1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-2x-1, & \text{kun } x<-1\\ 1, & \text{kun } x\geq -1\end{cases}$$

Funktion *F* integraalifunktiot ovat

$$F(x)=\begin{cases}-x^2-x+C, & \text{kun } x<-1\\ x+D, & \text{kun } x\geq -1\end{cases}$$

Koska funktio *F* on derivoituva, se on myös jatkuva.

Funktion *F* jatkuvuus kohdassa $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1-} F(x)=\lim_{x\to -1-}(-x^2-x+C)=-(-1)^2-(-1)+C=C$$

$$\lim_{x\to -1+} F(x)=\lim_{x\to -1+}(x+D)=-1+D$$

$$F(-1)=-1+D$$

Saadaan yhtälö

$$-1+D=C$$

$$D=C+1$$

Funktion *f* integraalifunktio on siis

$$F(x)=\begin{cases}-x^2-x+C, & \text{kun } x<-1\\ x+1+C, & \text{kun } x\geq -1\end{cases}$$

Funktio $g(x)=\begin{cases}1, & \text{kun } x\geq 0\\ 0, & \text{kun } x<0\end{cases}$ ei ole jatkuva, joten sillä ei välttämättä ole integraalifunktiota.

Oletetaan, että funktiolla *g* on integraalifunktio *G*. Tällöin

$$G(x)=\begin{cases}x+C, & \text{kun } x\geq 0\\ D, & \text{kun } x<0\end{cases}$$

koska selvästi $G'(x)=g(x)$, kun $x\neq 0$.

Jotta funktiolla *g* olisi integraalifunktio *G*, pitäisi

1) funktion *G* olla jatkuva myös kohdassa $x=0$
2) $G'(0)=g(0)$

1° $\boxed{\text{Jatkuvuus kohdassa } x = 0.}$

Koska

$$\lim_{x \to 0-} G(x) = \lim_{x \to 0-} D = D$$
$$\lim_{x \to 0+} G(x) = \lim_{x \to 0+} (x + C) = 0 + C = C$$
$$G(0) = C$$

saadaan $D = C$. Tällöin $G(x) = \begin{cases} x + C, & \text{kun } x \geq 0 \\ C, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$

2° $\boxed{G'(0) = g(0)}$

$$G'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} \qquad \left| \begin{array}{l} x < 0, \text{ joten } G(x) = C \\ G(0) = C \end{array} \right.$$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{C - C}{x} = \lim_{x \to 0-} 0 = 0$$

$$G'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} \qquad \left| \begin{array}{l} x > 0, \text{ joten } G(x) = x + C \\ G(0) = C \end{array} \right.$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{(x + C) - C}{x} = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

Koska $G'_-(0) \neq G'_+(0)$, funktio G ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$, joten funktiolla g ei ole integraalifunktiota.