Pyramidi 13 luku 3

1.10.2007	Ensimmäinen julkaistu versio
15.12.2007	Korjattu ulkoasua
2.11.2009	Korjattu ratkaisua 338
3.11.2009	Korjaus ratkaisuun 326

301.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x^4)=\infty+\infty=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x^4)=\infty+\infty=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(3+2x-x^3)$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^2}-1\right)=\infty(0+0-1)=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(3+2x-x^3)$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^2}-1\right)=-\infty(0+0-1)=\infty$$

302.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x^2-3}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(5-\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{5-\frac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{\infty\cdot(3-0+0)}{5-0}=\frac{\infty}{5}=\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x^2-3}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(5-\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{5-\frac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{-\infty\cdot(3-0+0)}{5-0}=\frac{-\infty}{5}=-\infty$$

303.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}(1-x)^2-\dfrac{1}{1-x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x+x^2}{x}-\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-2+x-\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=0-2+\infty-0=\infty$$

Tapa2

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}(1-x)^2-\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x+x^2}{x}-\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)(1-2x+x^2)-x}{x(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x+x^2-x+2x^2-x^3-x}{x(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+3x^2-4x+1}{x-x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x}-1}$$
$$=\frac{\infty\cdot(-1+0-0+0)}{0-1}=\frac{-\infty}{-1}=\infty$$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}(1-x)^2-\frac{1}{1-x}\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-2x+x^2}{x}-\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-2+x-\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=0-2-\infty-0=-\infty$$

Tapa2

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}(1-x)^2-\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-2x+x^2}{x}-\frac{1}{1-x}\right)$$

$=\cdots$ | a-kohta tapa 2

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x}-1}$$
$$=\frac{-\infty(-1+0-0+0)}{0-1}=\frac{\infty}{-1}=-\infty$$

304.

Osoitetaan, että funktio $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-2\sin x$ toteuttaa vaaditut ehdot.

$$\lim_{x\to\infty}(x-2\sin x)=\infty, \text{ koska } \lim_{x\to\infty}x=\infty \text{ ja } -1\le\sin x\le 1.$$

Olkoon $[a,\infty[$ mielivaltainen väli.

Tällöin luvut $x_1=0+n\cdot 2\pi$ ja $x_2=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi$ kuuluvat välille $[a,\infty[$ jollakin $n\in\mathbb{Z}$.

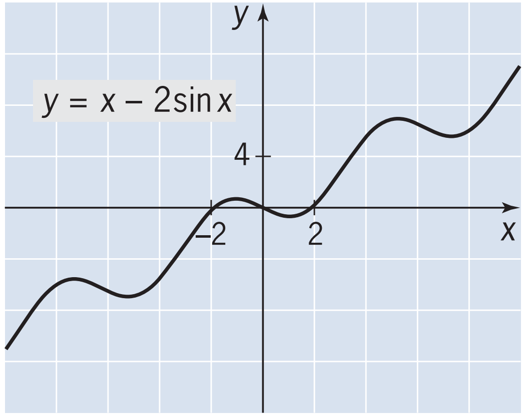
Saadaan

$$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1-2\sin x_1 && \big|\sin(\alpha+n\cdot 2\pi)=\sin\alpha \\ &= x_1-2\sin 0 && \big|\sin 0=0 \\ &= x_1 = n\cdot 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= x_2-2\sin x_2 && \big|\sin(\alpha+n\cdot 2\pi)=\sin\alpha \\ &= x_2-2\sin\frac{\pi}{2} && \Big|\sin\frac{\pi}{2}=1 \\ &= x_2-2 \\ &= \frac{\pi}{2}-2+n\cdot 2\pi\approx -0,4+n\cdot 2\pi \end{aligned}$$

Siis $x_1<x_2$ ja $f(x_1)>f(x_2)$, joten funktio f ei ole kasvava. □

Graafinen tarkistus:



305.

Funktio f on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva.

$$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2\ge 0$$

kaikilla $x\in\mathbb{R}$ ja yhtäsuuruus on voimassa vain yksittäisessä kohdassa $x=-1$, joten f on aidosti kasvava. □

Aidosti kasvavalla funktiolla f on käänteisfunktio.
Funktion f arvojoukko (eli funktion f^{-1} määrittelyjoukko):

- f on jatkuva
- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x^3+3x^2+3x-7)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to\infty}x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right) \\ &= \infty\cdot(1+0+0-0)=\infty \end{aligned}$$

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+3x-7)$$
  $$= \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right) = -\infty$$

joten $A_f = M_{f^{-1}} =]-\infty,\ \infty[= \mathbb{R}$

Määritetään käänteisfunktion lauseke ratkaisemalla *x*:n suhteen yhtälö $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= x^3+3x^2+3x-7 \\ y &= x^3+3x^2+3x+1-8 \\ y &= (x+1)^3-8 \\ x+1 &= \sqrt[3]{y+8} \\ x &= \sqrt[3]{y+8}-1 \end{aligned}$$

Siis $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+8}-1$, joten käänteisfunktio on $f^{-1}: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+8}-1$.

306.

$f(x) = 2-\sqrt{x-1}$

Funktio f on määritelty, kun $x-1 \geq 0$ eli $x \geq 1$.
Funktion määrittelyjoukko on siis $\mathbf{M}_f = [1,\ \infty[$.

Funktio f on aidosti vähenevä, joten sillä on käänteisfunktio.

Funktion f suurin arvo on $f(1) = 2$ ja pienintä arvoa ei ole, joten $\mathbf{A}_f =]-\infty,\ 2]$.

Ratkaistaan yhtälö $y = f(x)$ muuttujan x suhteen.

$$\begin{aligned} y &= 2-\sqrt{x-1} \\ \underbrace{\sqrt{x-1}}_{\geq 0} &= \underbrace{2-y}_{\geq 0} \qquad \Big|\,(\ )^2 \\ x-1 &= 4-4y+y^2 \\ x &= y^2-4y+5 \end{aligned}$$

Funktion *f* käänteisfunktio on siis

$$f^{-1}(y) = y^2-4y+5,\quad y \leq 2 \text{ eli}$$

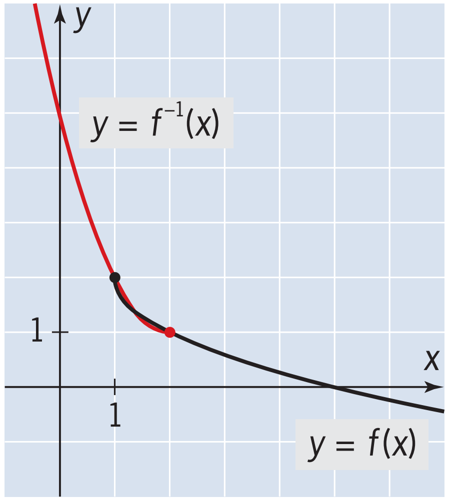
$$f^{-1}(x) = x^2-4x+5,\quad x \leq 2$$

Funktion $f^{-1}(x) = x^2-4x+5,\quad x \leq 2$ kuvaaja on osa ylöspäin aukeavasta paraabelista, jonka huippu on kohdassa

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2\cdot 1} = 2.$$

Funktio *f* on aidosti vähenevä, joten myös funktio f^{-1} on aidosti vähenevä. Sen pienin arvo on $f^{-1}(2) = 1$ ja suurinta arvoa ei ole. Siis $\mathbf{M}_{f^{-1}} =]-\infty,\ 2]$ ja $\mathbf{A}_{f^{-1}} = [1,\ \infty[$.

Piirretään funktioiden f ja f^{-1} kuvaajat:



Vastaus $f^{-1}:]-\infty, 2] \to [1, \infty[, \quad f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$

307.

Raja-arvoa ja ääretöntä koskevien laskusääntöjen mukaan

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \frac{\lim_{x\to-\infty} 1}{\lim_{x\to-\infty} x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \quad \square$$

Tapa 2

Olkoon $x \le -1$ ja olkoon n luvun x kokonaisosassa olevien numeroiden lukumäärä (esimerkiksi jos $x = -2001,010358$ niin $n = 4$).

Tällöin

$$\underbrace{x}_{<0} \le \underbrace{-10^{n-1}}_{<0} \qquad \left| \; f(x) = \frac{1}{x}, x < 0, \text{ on aidosti vähenevä, joten suuruusjärjestys vaihtuu} \right.$$

$$f(x) \ge f(-10^{n-1})$$

$$\frac{1}{x} \ge \frac{1}{-10^{n-1}}$$

$$\frac{1}{x} \ge -\underbrace{0,00...0}_{n-1 \text{ kpl}}1$$

$$-\underbrace{0,00...0}_{n-1 \text{ kpl}}1 \le \frac{1}{x} \qquad \left| \; \frac{1}{x} < 0 \right.$$

$$-\underbrace{0,00...0}_{n-1 \text{ kpl}}1 \le \frac{1}{x} < 0$$

Luku $\frac{1}{x}$ on siis negatiivinen ja sen desimaali-kehitelmän alussa on ainakin $n-1$ nollaa. Kun x pienenee rajatta, niin n kasvaa rajatta ja sitä enemmän nollia on luvun $\frac{1}{x}$ desimaalikehitelmän alussa eli sitä lähempänä nollaa on luku $\frac{1}{x}$.

Siis $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$. $\square$

308.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3x-1}=\frac{1}{3\cdot\infty-1}=\frac{1}{\infty-1}=\frac{1}{\infty}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x(1-x)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-(-\infty)}=\frac{1}{1+\infty}=\frac{1}{\infty}=0$

309.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{x}=\frac{2-0}{\infty}=0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{5-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{5}{x^2}-1\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^2}}{\frac{5}{x^2}-1}=\frac{3-0}{0-1}=-3$

310.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x+1}{4x^3-2x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(4-\frac{2}{x^2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{x\left(4-\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{2-0+0}{-\infty\cdot(4-0)}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x^3+6x-4}{-2x^3+x^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(7+\frac{6}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(-2+\frac{1}{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7+\frac{6}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{-2+\frac{1}{x}}$

$=\frac{7+0-0}{-2+0}=-3\frac{1}{2}$

311.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a \sqrt[n]{ax}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^a \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}\int_0^a x^{\frac{1}{n}}dx\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}\,\Big/_{\!0}^{\!a}\,\frac{1}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}\,\Big/_{\!0}^{\!a}\,\frac{n}{n+1}x^{\frac{1+n}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{a}\left(\frac{n}{n+1}a^{\frac{1+n}{n}} - 0\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1+n}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}a^{\frac{1+n}{n}+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}a^{\frac{2+n}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}a^{\frac{n\left(\frac{2}{n}+1\right)}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}a^{\frac{2}{n}+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}}a^{\frac{2}{\infty}+1} = 1\cdot a^1 = a$$

312.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{3}{x}-x\right)^2 - x^2\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{9}{x^2}-6+x^2-x^2\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{9}{x^2}-6\right) = 0-6 = -6$$

313.

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{6n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{6n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $\left|\frac{3n+1}{6n} - {}^{3n)}\frac{1}{2}\right| < 10^{-5} \qquad \mid n\in\mathbb{Z}_+$

$$\left|\frac{3n+1-3n}{6n}\right| < 10^{-5}$$

$$\left|\frac{1}{6n}\right| < 10^{-5} \qquad \left|\ \frac{1}{6n} > 0, \text{ koska } n\in\mathbb{Z}_+\right.$$

$$\frac{1}{6n} < 10^{-5} \qquad \mid \cdot 6n \quad (>0)$$

$$1 < 6\cdot 10^{-5}n \qquad \mid :6\cdot 10^{-5} \quad (>0)$$

$$16\ \ 666,6\ldots < n$$

$$n \geq 16\ 667,\ \ n\in\mathbb{Z}_+$$

314.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{3x^2+2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}}\qquad\left|\begin{array}{l}\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}\\ \sqrt{a^2}=|a|\end{array}\right.$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}\qquad\Big|\,|x|=x,\text{ kun }x>0$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\qquad\Big|\,|x|=-x,\text{ kun }x<0$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1+0}{-\sqrt{1+0}}=-1$$

315.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}\qquad\left|\begin{array}{l}\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}\\ \sqrt{a^2}=|a|\end{array}\right.$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\qquad\Big|\,|x|=x,\text{ kun }x>0$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}\qquad\left|\begin{array}{l}\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}\\ \sqrt{a^2}=|a|\end{array}\right.$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\qquad\Big|\,|x|=-x,\text{ kun }x<0$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{2}{-\sqrt{1+0}}=-2$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^3+x^2}}{x\sqrt[3]{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\left(2+\frac{1}{x}\right)}}{x\sqrt[3]{x}}$$

| $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$

| $\sqrt[3]{a^3}=a$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}}}{x\sqrt[3]{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^3+x^2}}{x\sqrt[3]{x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\left(2+\frac{1}{x}\right)}}{x\sqrt[3]{x}}$$

| $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$

| $\sqrt[3]{a^3}=a$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}}}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{-\infty}=0$$

316.

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{-2}+3}{2x^{-2}}=\lim\limits_{x\to0}{}^{x^2)}\dfrac{\frac{1}{x^2}+3}{\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+3x^2}{2}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9^x-4^x}{3^x-2^x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3^x)^2-(2^x)^2}{3^x-2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3^x+2^x)(3^x-2^x)}{3^x-2^x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(3^x+2^x)=0+0=0$$

317.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3^2)^x-(2^2)^x}{3^x-2^x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x}$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, kun $a>1$

Koska $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=0+1=1\neq0$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, sekä

$\frac{e^x+1}{e^x} > 0$ kun $x \to -\infty$ $(e^x > 0)$,

niin $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{e^x} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \infty - \frac{1}{\infty} = \infty - 0 = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x}$

Koska $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{2x}-1) = 0-1 = -1 \neq 0$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, niin tutkitaan lausekkeen $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$ merkkiä, kun $x \to -\infty$.

Koska $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, on osoittaja $e^{2x}-1$ negatiivinen pienillä muuttujan x arvoilla. Lisäksi nimittäjä $e^x > 0$ aina, joten $\frac{e^{2x}-1}{e^x} < 0$ pienillä muuttujan x arvoilla.

Tällöin $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x} = -\infty$

318.

$$\lim_{x\to\infty}{}^{x+\sqrt{x^2+3x+2})}(x-\sqrt{x^2+3x+2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-(x^2+3x+2)}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x-2}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-3-\frac{2}{x}\right)}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-3-\frac{2}{x}\right)}{x+|x|\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-3-\frac{2}{x}\right)}{x+x\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3-\frac{2}{x}}{1+\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}} = \frac{-3-0}{1+\sqrt{(1+0+0)}}$$

$$= -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$$

319.

$\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty+\infty=\infty$$

$\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

b) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

c) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+3}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}\left((\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}}{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

320.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx^2+1}{nx+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(x^2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(x+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\frac{1}{n}}{x+\frac{1}{n}}=\frac{x^2+0}{x+0}=\frac{x^2}{x}=x,\ 0<x\le 1$$

Kun $x=0$, niin $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot 0^2+1}{n\cdot 0+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1}=1$.

$$I_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\frac{nx^2+1}{nx+1}dx \qquad \left|\ \begin{array}{r l}
 & x-\frac{1}{n} \\ \cline{2-2}
nx+1 \big) & nx^2 \qquad +1 \\
 & {}_{(\mp)}nx^2\,{}_{(\pm)}x \\ \cline{2-2}
 & -x\ +1 \\
 & {}_{(\pm)}x\,{}_{(\pm)}\frac{1}{n} \\ \cline{2-2}
 & 1+\frac{1}{n}
\end{array}\right.$$

$$=\int_0^1\left(x-\frac{1}{n}+\frac{1+\frac{1}{n}}{nx+1}\right)dx=\int_0^1\left(x-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n}\frac{1}{nx+1}\right)dx$$

$$=\Big/_{\!0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{n}x+\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ln(nx+1)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n^2}\ln(n+1)\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{n+1}{n^2}\ln(0+1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n^2}\ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n^2}\ln(n+1)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2}\frac{n+1}{n+1}\ln(n+1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}-0+\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\ln(n+1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}-0+\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot 0=\frac{1}{2}$$

321.

$$\lim_{c\to\infty}(\gamma-1)mc^2 \qquad \left|\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right.$$

$$=\lim_{c\to\infty} mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)=\lim_{c\to\infty} mc^2\,\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$=\lim_{c\to\infty} mc^2 \frac{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)}{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$=\lim_{c\to\infty} mc^2 \frac{1-\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$=\lim_{c\to\infty} mc^2 \frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$=\lim_{c\to\infty} \frac{mv^2}{\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$=\frac{mv^2}{\left(1+\sqrt{1-0}\right)\sqrt{1-0}}=\frac{mv^2}{2}=\frac{1}{2}mv^2$$

322.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}}$

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}}$ $\quad\left|\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}\right.$

$=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{9x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{3}$

$=\left[\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-3x}\right)^{3x}\right]^{3}$ $\quad\left|\ t=-3x\right.$

$=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}\right]^{3}$

$=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-3}$ $\quad\left|\ \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=\mathrm{e}\right.$

$=\mathrm{e}^{-3}=\frac{1}{\mathrm{e}^3}$

323.

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\lim_{2x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad \left|\ \lim_{2x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=\mathrm{e}\right.$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\right]^{2}$$

$$=\left[\lim_{\sqrt{x}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\right]^{2} \qquad \left|\ \lim_{\sqrt{x}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=\mathrm{e}\right.$$

$$=\mathrm{e}^{2}$$

324.

a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{4x^2+3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}} \qquad \left|\ \begin{array}{l}\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}\\ \sqrt{a^2}=|a|\end{array}\right.$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-|x|\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} \qquad \left|\ |x|=x,\ \text{kun } x>0\right.$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{4}}=\frac{1}{-1}=-1$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{4x^2+3}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x\left(-\frac{1}{x}+2\right)}+\sqrt{-x\left(-\frac{1}{x}+1\right)}}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}} \quad \left| \begin{array}{l} -x>0 \\ \sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b} \\ \sqrt{a^2}=|a| \end{array} \right.$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}\sqrt{-\frac{1}{x}+2}+\sqrt{-x}\sqrt{-\frac{1}{x}+1}}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-|x|\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} \quad \left|\, |x|=x, \text{ kun } x<0\right.$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-(-x)\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{{}^{\sqrt{-x})}\sqrt{-x}\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{-x\sqrt{-x}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{-x}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1}}{\infty\left(\sqrt{1}-\sqrt{4}\right)} = 0$$

325.

$$\lim_{x\to\infty} {}^{\sqrt{x^2+1}+x)}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \frac{1}{\infty+\infty} = 0 \quad \square$$

Tutkitaan kaksoisepäyhtälöä $0<\sqrt{x^2+1}-x<10^{-3}$.

1) Vasen puoli

$$\sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} > 0 \text{ aina, kun } x \ge 1.$$

2) Oikea puoli

$$\sqrt{x^2+1}-x<10^{-3}$$

$$\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\ge 0} < \underbrace{x+10^{-3}}_{\ge 0} \quad \left|\,(\ )^2\right.$$

$$x^2+1<x^2+2\cdot 10^{-3}\cdot x+(10^{-3})^2$$

$$x^2+1<x^2+0{,}002x+10^{-6}$$

$$0{,}002x>1-10^{-6}$$

$$x>\frac{1-10^{-6}}{0{,}002}=499{,}9995$$

Siis luvuksi h voidaan valita mikä tahansa reaaliluku, jolle $h>499{,}9995$, esimerkiksi $h=500$.

326.

Raja-arvo $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t+1}{3t-1}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t\left(2+\frac{1}{t}\right)}{t\left(3-\frac{1}{t}\right)}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2+\frac{1}{t}}{3-\frac{1}{t}}=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$, joten

funktio $f(x)=\frac{2x+1}{3x-1}-\frac{2}{3}$.

Tällöin $f'(x)=\mathrm{D}\left(\frac{2x+1}{3x-1}-\frac{2}{3}\right)=\frac{2\cdot(3x-1)-3\cdot(2x+1)}{(3x-1)^2}-0$

$$=\frac{6x-2-6x-3}{(3x-1)^2}=\frac{-5}{(3x-1)^2}$$

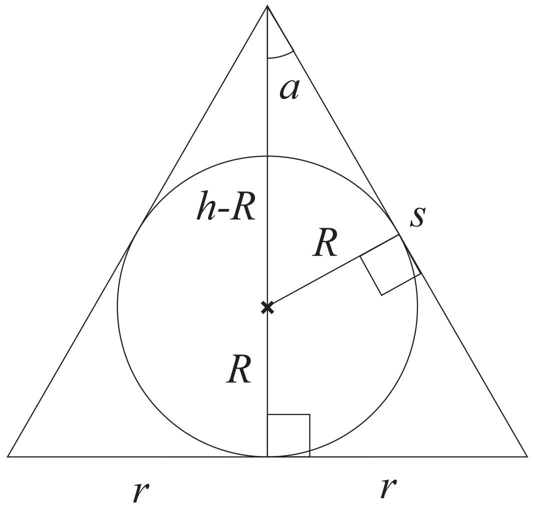
$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{2x+1}{3x-1}-\frac{2}{3}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{3(2x+1)}{3(3x-1)}-\frac{2(3x-1)}{3(3x-1)}\right)dx=$$

$$=\int_1^2\frac{6x+3-6x+2}{3(3x-1)}dx=\int_1^2\frac{5}{9x-3}dx=5\cdot\frac{1}{9}\int_1^2\frac{1}{9x-3}\cdot 9dx$$

$$=\frac{5}{9}\Big/_1^2\ln|9x-3|=\frac{5}{9}\left(\ln|9\cdot 2-3|-\ln|9\cdot 1-3|\right)$$

$$=\frac{5}{9}\left(\ln 15-\ln 6\right)=\frac{5}{9}\ln\frac{15}{6}=\frac{5}{9}\ln\frac{5}{2}$$

327.



Piirretään tilanteesta tasokuvio. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on yhtä kaukana kolmion kyljistä, joten keskipiste sijaitsee kulmanpuolittajien leikkauspisteessä.
kolmion kylki saadaan Pythagoraan lauseella:

$$s^2=r^2+h^2 \quad\Leftrightarrow\quad s=_{(}\pm_{)}\sqrt{r^2+h^2}$$

Suorakulmaisista kolmioista saadaan

$\sin a=\frac{r}{s}=\frac{R}{h-R}$, josta voidaan ratkaista R:

$$hr-rR=sR$$

$$hr=\left(s+r\right)R$$

$$R=\frac{hr}{s+r}=\frac{hr}{\sqrt{r^2+h^2}+r}$$

Raja-arvot:

$$\lim_{h\to\infty} R = \lim_{h\to\infty}\frac{h\,r}{r+\sqrt{r^2+h^2}} = \lim_{h\to\infty}\frac{h\,r}{r+\sqrt{h^2\left(\frac{r^2}{h^2}+1\right)}}$$

$$= \lim_{h\to\infty}\frac{h\,r}{r+|h|\sqrt{\left(\frac{r^2}{h^2}+1\right)}} \overset{h>0}{=} \lim_{h\to\infty}\frac{h\,r}{r+h\sqrt{\left(\frac{r^2}{h^2}+1\right)}}$$

$$= \lim_{h\to\infty}\frac{h\,r}{h\left(\frac{r}{h}+\sqrt{\left(\frac{r^2}{h^2}+1\right)}\right)} = \lim_{h\to\infty}\frac{r}{\frac{r}{h}+\sqrt{\left(\frac{r^2}{h^2}+1\right)}}$$

$$= \frac{r}{0+\sqrt{0+1}} = r$$

$$\lim_{r\to\infty} R = \lim_{r\to\infty}\frac{h\,r}{r+\sqrt{r^2+h^2}} = \lim_{r\to\infty}\frac{h\,r}{r+\sqrt{r^2\left(1+\frac{h^2}{r^2}\right)}}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{h\,r}{r+|r|\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{r^2}\right)}} \overset{r>0}{=} \lim_{r\to\infty}\frac{h\,r}{r+r\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{r^2}\right)}}$$

$$= \lim_{h\to\infty}\frac{h}{r\left(1+\sqrt{\left(1+\frac{h^2}{r^2}\right)}\right)} = \frac{h}{1+\sqrt{1+0}} = \frac{h}{2}$$

328.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-3}{x^2-1}=4$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-3}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{a+0-0}{1-0} = a$$

Siis $a=4$ ja $b\in\mathbb{R}$.

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-3}{x+1}=4$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-3}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}$$

Koska $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})=1+0=1$ saadaan yhtälö

$$\lim_{x\to\infty} x\left(a+\frac{b}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=4 \qquad \left|\lim_{x\to\infty} ax=-\infty, \text{ kun } a<0\right.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(ax+b-\frac{3}{x}\right)=4 \qquad \left|\lim_{x\to\infty} ax=0 \ \text{, kun } a=0\right.$$

$$\lim_{x\to\infty} ax+b-0=4 \qquad \left|\lim_{x\to\infty} ax=\infty \ \text{, kun } a>0\right.$$

Saadaan $a=0$ ja $b=4$

Vastaus a) $a=4,\ b\in\mathbb{R}$ b) $a=0,\ b=4$

329.

$$kx^2-(k+3)x-6k=0 \qquad |k\neq 0$$

$$x=\frac{(k+3)\pm\sqrt{(k+3)^2-4\cdot k\cdot(-6k)}}{2k}$$

$$x=\frac{k+3\pm\sqrt{k^2+6k+9+24k^2}}{2k}$$

$$x=\frac{k+3\pm\sqrt{25k^2+6k+9}}{2k}$$

a) $k\to\infty$:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k+3\pm\sqrt{25k^2+6k+9}}{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+3\pm\sqrt{k^2\left(25+\frac{6}{k}+\frac{9}{k^2}\right)}}{2k}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{k+3\pm|k|\sqrt{25+\frac{6}{k}+\frac{9}{k^2}}}{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+3\pm k\sqrt{25+\frac{6}{k}+\frac{9}{k^2}}}{2k}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{k\left(1+\frac{3}{k}\pm\sqrt{25+\frac{6}{k}+\frac{9}{k^2}}\right)}{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{3}{k}\pm\sqrt{25+\frac{6}{k}+\frac{9}{k^2}}}{2}$$

$$=\frac{1+0\pm\sqrt{25+0+0}}{2}=\frac{1\pm5}{2}$$

Toinen juuri lähestyy arvoa $\frac{1+5}{2}=3$ ja toinen lähestyy arvoa $\frac{1-5}{2}=-2$

b) $k \to -\infty$

$$\lim_{k\to-\infty} \frac{k+3\pm\sqrt{25k^2+6k+9}}{2k} \qquad \Big|\text{ a-kohta}$$

$$= \lim_{k\to-\infty} \frac{1+\frac{3}{k}\pm\sqrt{25+\frac{6}{k}+\frac{9}{k^2}}}{2} = \frac{1+0\pm\sqrt{25+0+0}}{2} = \frac{1\pm 5}{2}$$

Toinen juuri lähestyy arvoa $\frac{1+5}{2}=3$ ja toinen arvoa $\frac{1-5}{2}=-2$

Vastaus Juuret lähestyvät arvoja 3 ja –2.

330.

Funktio f on derivoituva ja

$$f'(x) = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{acx+ad-acx-cb}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \qquad \Big| \begin{array}{l} ad=bc \text{ eli} \\ ad-bc=0 \end{array}$$

$$=0$$

Funktio f on määritelty kun $cx+d\neq 0$ eli $x\neq -\frac{d}{c}$. Koska derivaatta on nolla kaikilla $x\in M_f$, niin f on vakio kaikilla $x<-\frac{d}{c}$ ja kaikilla $x>-\frac{d}{c}$.

Koska lisäksi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} = \frac{a+0}{c+0} = \frac{a}{c}$$

ja

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} = \frac{a+0}{c+0} = \frac{a}{c}$$

niin funktio f on vakio koko määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$. □

Vakioarvo on $f(x)=\frac{a}{c}\left(=\frac{b}{d}\right)$ $\qquad \Big| \; ad=bc \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Toinen tapa:

Jakamalla jakokulmassa saadaan

$$
\begin{array}{rl}
 & \frac{a}{c} \\ \cline{2-2}
cx+d \big) & ax+\ \ b \\
 & \underline{(\mp)ax(\mp)\frac{ad}{c}} \\
 & \quad b-\frac{ad}{c}
\end{array}
$$

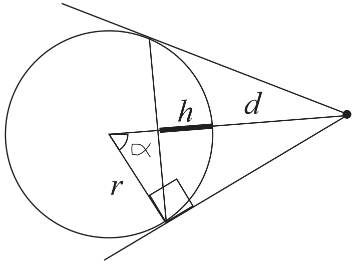
$ad=bc$ eli $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, joten $b-\frac{ad}{c}=b-\frac{bd}{d}=b-b=0$

eli jakojäännös on nolla, joten jako menee tasan.

Siis funktio f saa vakioarvon $\frac{a}{c}$ kaikkilla $x\in M_f$. □

Vakioarvo on $f(x)=\frac{a}{c}$. $\left(=\frac{b}{d} \quad \middle| \; ad=bc \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\right)$

331.



Etäisyydellä *d* näkyy keskuskulmaa α vastaava pallokalotti, jonka korkeudelle saadaan yhtälö

$$\cos\alpha=\frac{r}{r+d}=\frac{r-h}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r^2}{r+d}=r-h \quad \Leftrightarrow$$

$$h=r-\frac{r^2}{r+d}=\frac{r(r+d)-r^2}{r+d}=\frac{rd}{r+d}$$

Alojen suhde on

$$p(r,\,d)=\frac{A_{kalotti}}{A_{pallo}}=\frac{2\pi rh}{4\pi r^2}=\frac{h}{2r}=\frac{\frac{rd}{r+d}}{2r}$$

$$=\frac{d}{2(r+d)}=\frac{d}{2(r+d)}\cdot 100\%=\frac{50d}{r+d}\ \ \%$$

$$\lim_{d\to\infty} p(r,\, d) = \lim_{d\to\infty}\left(\frac{50d}{r+d}\ \%\right)$$

$$= \lim_{d\to\infty}\left(\frac{50d}{d\left(\dfrac{r}{d}+1\right)}\ \%\right)$$

$$= \lim_{d\to\infty}\left(\frac{50}{\dfrac{r}{d}+1}\ \%\right)$$

$$= \frac{50}{0+1}\ \% = 50\ \%$$

$$p(6370,\, 500) = \frac{50\cdot 500}{6370+500}\ \% = 3{,}6\ \%$$

Vastaus $p(r,\, d) = \dfrac{50d}{r+d}\ \%,\ \lim\limits_{d\to\infty} p(r,\, d) = 50\ \%$

500 km korkeudesta näkyy 3,6 % maapallon pinnasta.

332.

a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(1-x)^2}$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,9	–19	1,1	21
0,994	–332	1,004	501
0,999 991	–222 221	1,000 009	222 223

Ilmeisesti $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$ ja $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \infty$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,9	90	1,1	110
0,997	110 777	1,004	62 750
0,999 2	1 561 250	1,000 02	$2{,}5\cdot 10^9$

Ilmeisesti $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \infty$ eli $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$.

333.

a) $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, koska

$\lim\limits_{x\to 0-} 1 = 1 \neq 0$ ja $\lim\limits_{x\to 0-} x = 0$ sekä $\frac{1}{x} < 0$, kun $x \to 0-$.

Tapa 2
Olkoon $-1 < x < 0$.
Olkoon n luvun x desimaalikehitelmän alussa olevien nollien lukumäärä (esimerkiksi jos $x = -0{,}000010258$ niin $n = 5$).
Tällöin

$$\underbrace{x}_{<0} \geq -\underbrace{\frac{1}{10^{n-1}}}_{<0}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ aidosti vähenevä, kun $x < 0$,
joten suuruusjärjestys vaihtuu

$$f(x) \leq f\left(-\frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

$$\frac{1}{x} \leq -10^{n-1}$$

$$\frac{1}{x} \leq -1\underbrace{00...0}_{n-1 \text{ kpl}}$$

Kun lausekkeen $\frac{1}{x}$ nimittäjä lähestyy nollaa vasemmalta eli n kasvaa rajatta, niin osamäärä $\frac{1}{x}$ pienenee rajatta eli

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2-x}{(x-5)^2}$

Osoittajan raja-arvo on $\lim\limits_{x\to 5}(2-x) = 2-5 = -3 \neq 0$

ja nimittäjän raja-arvo on $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)^2 = 0$

sekä $\frac{2-x}{(x-5)^2} < 0$, kun $x \to 5$.

Siis $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2-x}{(x-5)^2} = -\infty$.

334.

a) $g(x) = \frac{9x^2-4}{3x^2-2x}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{9x^2-4}{3x^2-2x} = \frac{9-4}{3-2} = 5$$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{9x^2-4}{3x^2-2x}$

$$=\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{(3x+2)(3x-2)}{x(3x-2)}=\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{3x+2}{x}=\frac{3\cdot\frac{2}{3}+2}{\frac{2}{3}}=4\cdot\frac{3}{2}=6$$

c) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{9x^2-4}{3x^2-2x}$

Koska $\lim\limits_{x\to 0-}(9x^2-4)=-4\neq 0$ ja $\lim\limits_{x\to 0-}(3x^2-2x)=0$, niin

tutkitaan lausekkeen $\dfrac{9x^2-4}{3x^2-2x}$ merkkiä kohdan 0

(vasemmanpuolisessa) aidossa ympäristössä.

Osoittajan nollakohdat

$$9x^2-4=0$$
$$x^2=\frac{4}{9}$$
$$x=\pm\frac{2}{3}$$

Nimittäjän nollakohdat

$$3x^2-2x=0$$
$$x(3x-2)=0$$

$x=0$ tai $3x-2=0$

$$x=\frac{2}{3}$$

$9x^2-4$	+	−	−	+
$3x^2-2x$	+	+	−	+
osamäärä	+	−	+	+

$-\frac{2}{3}$ 0 $\frac{2}{3}$ x

Siis $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{9x^2-4}{3x^2-2x}=-\infty$

Tapa 2

$$\lim_{x\to 0-}\frac{9x^2-4}{3x^2-2x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{(3x+2)(3x-2)}{x(3x-2)}=\lim_{x\to 0-}\frac{3x+2}{x}=-\infty$$

Koska $\lim\limits_{x\to 0-}(3x+2)=2\neq 0$ ja $\lim\limits_{x\to 0-}x=0$

sekä $\dfrac{3x+2}{x}<0,$ kun $x\to 0-.$

d) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{9x^2-4}{3x^2-2x}=\infty$ | Katso kohta c tapa 1

Tapa 2

$$\lim_{x\to0+}\frac{9x^2-4}{3x^2-2x}=\lim_{x\to0+}\frac{(3x+2)(3x-2)}{x(3x-2)}=\lim_{x\to0-}\frac{3x+2}{x}=\infty$$

Koska $\lim_{x\to0+}(3x+2)=2\neq0$ ja $\lim_{x\to0+}x=0$

sekä $\frac{(3x+2)}{x}>0,$ kun $x\to0+$.

e) $\lim_{x\to0}\frac{9x^2-4}{3x^2-2x}$ ei ole olemassa, koska

$\lim_{x\to0-}\frac{9x^2-4}{3x^2-2x}\neq\lim_{x\to0+}\frac{9x^2-4}{3x^2-2x}$ (kohdat c ja d)

335.

a) $\lim_{x\to1+}\frac{1-x^2}{x^2-2x+1}$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{-(x^2-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{-(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1+}\frac{-x-1}{x-1}$$

Koska $\lim_{x\to1+}(-x-1)=-2\neq0$ ja $\lim_{x\to1+}(x-1)=0$ sekä

$\frac{-x-1}{x-1}<0,$ kun $x\to1+$, niin

$$\lim_{x\to1+}\frac{1-x^2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to1+}\frac{-x-1}{x-1}=-\infty\text{.}$$

b) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+3x}{(2x+6)^3}$

$$=\lim_{x\to-3}{}^{2)}\frac{x(x+3)}{(2x+6)^3}=\lim_{x\to-3}\frac{x(2x+6)}{2(2x+6)^3}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x}{2(2x+6)^2}$$

Koska $\lim_{x\to-3}x=-3\neq0$ ja $\lim_{x\to-3}2(2x+6)^2=0$ sekä

$\frac{x}{2(2x+6)^2}<0,$ kun $x\to-3$, niin

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+3x}{(2x+6)^3}=\lim_{x\to-3}\frac{x}{2(2x+6)^2}=-\infty$$

336.

a) $\lim_{x\to-2}\frac{4-x^2}{2x^3-4x^2}$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(2+x)(2-x)}{2x^2(x-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{(2+x)(2-x)}{-2x^2(2-x)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{2+x}{-2x^2}=\frac{0}{-8}=0$$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{2x^3-4x^2}$ | a-kohta

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2+x}{-2x^2}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-x^2}{2x^3-4x^2}$

Koska $\lim\limits_{x\to 0}(4-x^2)=4\neq 0$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^3-4x^2\right)=0$, niin

tutkitaan lausekkeen $\dfrac{4-x^2}{2x^3-4x^2}$ merkkiä kohdan $x=0$ aidossa ympäristössä.

$$\frac{4-x^2}{2x^3-4x^2}=\frac{(2+x)(2-x)}{2x^2(x-2)}=\frac{(2+x)(2-x)}{-2x^2(2-x)}$$

$$=\frac{2+x}{-2x^2}\ ,\ \ x\neq 0\ ,\ \ x\neq 2$$

$2+x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-2x^2$	$-$	$-$	$-$	$-$
osamäärä	$+$	$-$	$-$	$-$

$-2 \qquad 0 \qquad 2 \qquad x$

Siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-x^2}{2x^3-4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x}{-2x^2}=-\infty$

Tapa 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{4-x^2}{2x^3-4x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)(2-x)}{2x^2(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)(2-x)}{-2x^2(2-x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+x}{-2x^2}=-\infty,$$

koska $\lim\limits_{x\to 0}(2+x)=2\neq 0$ ja $\lim\limits_{x\to 0}\left(-2x^3\right)=0$ sekä

$\dfrac{2+x}{-2x^2}<0,$ kun $x\to 0$.

337.

Tutkitaan funktiota

$$g(x)=2x+1+x^{-2}=2x+1+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3+x^2+1}{x^2},\ -1\le x\le 3$$

Funktio g on määritelty ja derivoituva kun $x\ne 0$.

$$g'(x)=2-2x^{-3}=2-\frac{2}{x^3}=\frac{2x^3-2}{x^3}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$g'(x)=0$$
$$\frac{2x^3-2}{x^3}=0$$
$$2x^3-2=0$$
$$x^3=1$$
$$x=1$$

Funktion g kulkukaavio

$2x^3-2$	$-$	$-$	$+$
x^3	$-$	$+$	$+$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	↗	↘	↗

$-1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad 3 \quad x$

x	$2x^3-2$
0,1	$-$
2	$+$

Funktion g pienin arvo on joko $g(-1)$ tai $g(1)$:

$$g(-1)=2\cdot(-1)+1+(-1)^{-2}=0 \qquad \text{pienin}$$
$$g(1)=2\cdot 1+1+1^{-2}=4$$

Suurimman arvon määrittämiseksi tarkastellaan raja-arvoa nollassa:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x+1+x^{-2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2+1}{x^2}$$

Koska osoittajan raja-arvo on $\lim\limits_{x\to 0}(2x^3+x^2+1)=1\ne 0$ ja nimittäjän raja-arvo on $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, sekä $\frac{2x^3+x^2+1}{x^2}>0$ kun $x\to 0$, niin $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=+\infty$.

Siis jatkuvan funktion g arvojoukko on $A_g=[0,\infty[$.

Koska $g(x)\ge 0$ kaikilla $x\in M_g$, niin funktio y on jatkuva ja määritelty, kun $x\in M_f$ eli kun $-1\le x\le 3,\ x\ne 0$.

Funktion y arvojoukko on myös $A_f=[0,\infty[$, sillä

$y(0)=\sqrt{g(0)}=\sqrt{0}=0$ ja

$\lim\limits_{x\to 0}y(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{g(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}g(x)}=\sqrt{\infty}=\infty$.

Vastaus Funktio saa kaikki arvot välillä $[0,\infty[$, kun $-1\le x\le 3,\ x\ne 0$

338.

Toisen asteen yhtälön $ax^2+2x+1=0,\ |a|<1,\ a\neq 0$, juuret ovat

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot a\cdot 1}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4(1-a)}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\pm 2\sqrt{1-a}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-a}}{a}$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}\quad \text{ja}\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$$

Juuret ovat hyvin määriteltyjä, kun $|a|<1,\ a\neq 0$, sillä tällöin $1-a\geq 0$. Juurten raja-arvot:

$$x_2=\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}= {}^{-1+\sqrt{1-a})}\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}=\frac{1-(1-a)}{a(-1+\sqrt{1-a})}$$

$$=\frac{a}{a(-1+\sqrt{1-a})}=\frac{1}{-1+\sqrt{1-a}}$$

Juurella x_2 ei ole edes epäoleellista raja-arvoa nollassa, sillä

$$\lim_{a\to 0+}x_2=\lim_{a\to 0+}\frac{1}{-1+\sqrt{1-a}}=-\infty\quad\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{a\to 0+}1=1\neq 0,\\ \lim\limits_{a\to 0+}(-1+\sqrt{1-a})=0\ \text{ ja}\\ \dfrac{1}{-1+\sqrt{1-a}}<0,\ \text{kun } a\to 0+\end{array}\right.$$

ja

$$\lim_{a\to 0-}x_2=\lim_{a\to 0-}\frac{1}{-1+\sqrt{1-a}}=+\infty\quad\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{a\to 0-}1=1\neq 0,\\ \lim\limits_{a\to 0-}(-1+\sqrt{1-a})=0\ \text{ ja}\\ \dfrac{1}{-1+\sqrt{1-a}}>0,\ \text{kun } a\to 0-\end{array}\right.$$

Juuren x_1 raja-arvo:

$$\lim_{a\to 0}x_1=\lim_{a\to 0}\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}=\lim_{a\to 0}{}^{-1-\sqrt{1-a})}\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{1-(1-a)}{a(-1-\sqrt{1-a})}=\lim_{a\to 0}\frac{a}{a(-1-\sqrt{1-a})}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{1}{-1-\sqrt{1-a}}=\frac{1}{-1-\sqrt{1-0}}=\frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}$$

Arvoa $a=0$ vastaava juuri:

$$0\cdot x^2+2x+1=0$$

$$2x+1=0$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

Vastaus $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$ ja $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$

$\lim\limits_{a\to 0}x_2$ ei ole olemassa, $\lim\limits_{a\to 0}x_1=-\dfrac{1}{2}$, joka on myös tapausta $a=0$ vastaava juuri.

339.

$$\lim_{x\to -a}\frac{3x^4-ax-4}{x^2-a^2}=\lim_{x\to -a}\frac{3x^4-ax-4}{(x+a)(x-a)}$$

Nimittäjän raja-arvo $\lim\limits_{x\to -a}(x^2-a^2)=0$.

Nimittäjän tekijän $x+a$ raja-arvo $\lim\limits_{x\to -a}(x+a)=0$ ja tekijän $x-a$ raja-arvo $\lim\limits_{x\to -a}(x-a)=-a-a=-2a$.

Siis raja-arvo $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{3x^4-ax-4}{(x+a)(x-a)}$ on olemassa, jos osoittaja $P(x)=3x^4-ax-4$ on jaollinen binomilla

$x+a$ ja $-2a\neq 0$ eli $P(-a)=0$ ja $a\neq 0$.

Tapaus $a=0$ tutkitaan erikseen.

1) Tapaus $P(-a)=0$ ja $a\neq 0$:

$$3a^4+a^2-4=0 \qquad |\,u=a^2$$

$$3u^2+u-4=0$$

$$u=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-1\pm 7}{6}$$

$$u=1 \quad \text{tai} \quad u=-\frac{4}{3} \qquad |\,u=a^2$$

$$a^2=1 \quad \text{tai} \quad a^2=-\frac{4}{3}$$

$$a=\pm 1 \quad \text{tai} \quad \text{ei ratkaisua} \qquad |\,a\neq 0$$

$$a=\pm 1$$

Kun $a=1$, niin

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^4-x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{3x^4-x-4}{(x+1)(x-1)}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^3-3x^2+3x-4 \\ \hline
x+1 & 3x^4 \qquad\qquad -x-4 \\
 & \mp 3x^4 \mp 3x^3 \\ \cline{2-2}
 & -3x^3 \qquad -x-4 \\
 & \pm 3x^3 \pm 3x^2 \\ \cline{2-2}
 & 3x^2-x-4 \\
 & \mp 3x^2 \mp 3x \\ \cline{2-2}
 & -4x-4 \\
 & \pm 4x \pm 4 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

Siis $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^4-x-4}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3-3x^2+3x-4}{x-1}$

$$=\frac{-3-3-3-4}{-2}=6\frac{1}{2}$$

Kun $a=-1$, niin

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^4+x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^4+x-4}{(x+1)(x-1)}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^3+3x^2+3x+4 \\
\hline
x-1 & 3x^4 \qquad\qquad\qquad + x-4 \\
 & (\mp)3x^4\ (\pm)3x^3 \\
\hline
 & 3x^3 \qquad + x-4 \\
 & (\mp)3x^3\ (\pm)3x^2 \\
\hline
 & 3x^2+x-4 \\
 & (\mp)3x^2\ (\pm)\ 3x \\
\hline
 & 4x-4 \\
 & (\mp)\ 4x\ (\pm)4 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Siis $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4+x-4}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3+3x^2+3x+4}{x+1}$

$$=\frac{3+3+3+4}{2}=6\frac{1}{2}$$

2) Tapaus $a=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^4-4}{x^2}$$

Koska $\lim\limits_{x\to 0}(3x^4-4)=-\ 4\neq 0$ ja $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ sekä $\dfrac{3x^4-4}{x^2}<0,$ kun $x\to 0$, niin

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^4-4}{x^2}=-\infty$$

Vastaus $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{3x^4-ax-4}{x^2-a^2}=6\dfrac{1}{2},$ kun $a=\pm 1,$

muulloin raja-arvo ei ole olemassa.

340.

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, koska $f(x)=0$ aina, kun $x\neq 0$.

b) $g(x)=0$, kun $x=0$ tai

$\sin\frac{1}{x}=0$ eli $\frac{1}{x}=n\pi$ eli $x=\frac{1}{n\pi}$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$

c) Kun $x\in[-0{,}01,\ 0{,}01]$, niin $\frac{1}{x}\le -100$ tai $\frac{1}{x}\ge 100$.

Koska $-1\le \sin\alpha\le 1$ aina ja $\sin\alpha$ saa kaikki arvot väliltä $[-1,\ 1]$ esimerkiksi välillä $\alpha\in[100,\ 100+2\pi]$, niin funktio g saa kaikki arvot väliltä $[-1,\ 1]$, kun $x\in[-0{,}01,\ 0{,}01]$.

d) $$0\le \lim_{x\to 0}|h(x)|=\lim_{x\to 0}|xg(x)|=\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\right]\le \lim_{x\to 0}\left[|x|\cdot 1\right]=\lim_{x\to 0}|x|=0$$

joten myös $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=0$.

e) Funktio h on jatkuva origossa, sillä

$h(0)=0\cdot g(0)=0\cdot 0=0$ ja $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=0$

f) Raja-arvoa $\lim\limits_{x\to 0} f\left(h(x)\right)$ ei ole olemassa. Funktio $f\left(h(x)\right)$ saa sekä arvon 0 että arvon 1 jokaisella välillä $-p<x<p$, vaikka p olisi valittu kuinka pieneksi tahansa. Jos nimittäin $p>0$, niin funktiolla g on nollakohtana esimerkiksi

$x=\frac{1}{n_p\pi}$, missä $0<\frac{1}{n_p\pi}<p$ eli $n_p>\frac{1}{p\pi}$, $n_p\in\mathbb{Z}_+$.

Tällöin

$$f\left(h\left(\frac{1}{n_p\pi}\right)\right)=f\left(x\cdot g\left(\frac{1}{n_p\pi}\right)\right)=f\left(x\cdot 0\right)=f(0)=1.$$

Toisaalta, kun esimerkiksi $x=\dfrac{\frac{1}{n_p\pi}+\frac{1}{(n_p+1)\pi}}{2}=x_1$, niin

$f\left(h(x_1)\right)=f\left(x_1\cdot g\left(x_1\right)\right)=0,$ sillä $g\left(x_1\right)\neq 0$ ja $x_1\neq 0$

341.

1) On oltava

$$3(1-\mathrm{e}^{-x})>0 \iff 1-\mathrm{e}^{-x}>0 \iff \mathrm{e}^{-x}<1 \iff$$
$$\ln \mathrm{e}^{-x}<\ln 1 \iff -x\ln \mathrm{e}<0 \iff x>0$$

Siis määrittelyjoukko on $A=\left]0,\ \infty\right[$.

2) Funktio f on derivoituva.

$$f'(x)=\frac{1}{3(1-e^{-x})}\cdot D\left[3(1-e^{-x})\right]=\frac{3e^{-x}}{3(1-e^{-x})}=\frac{\frac{1}{e^{x}}}{1-\frac{1}{e^{x}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{e^{x}}}{\frac{e^{x}-1}{e^{x}}}=\frac{1}{e^{x}}\cdot\frac{e^{x}}{e^{x}-1}=\frac{1}{e^{x}-1}>0$$

koska $x>0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}>e^{0} \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}>1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}-1>0$.
Siis f on aidosti kasvava määrittelyjoukossaan A. □

3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(3(1-e^{-x})\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(3\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)\right)=\ln\left(3\left(1-0\right)\right)=\ln 3$$

sekä

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\ln\left(3(1-e^{-x})\right)=-\infty$, sillä
$\ln 3\left((1-e^{-x})\right)\to 0+,$ kun $x\to 0+$.

Siis funktion f arvojoukko on $A_f=f(A)=\left]-\infty,\ \ln 3\right[$.

4) Käänteisfunktio f^{-1} on olemassa, sillä f on aidosti kasvava.
Ratkaistaan x yhtälöstä $y=f(x)$:

$$y=\ln\left(3(1-e^{-x})\right) \quad\Leftrightarrow\quad e^{y}=e^{\ln\left(3(1-e^{-x})\right)} \quad\Leftrightarrow$$

$$e^{y}=3(1-e^{-x}) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{3}e^{y}=1-e^{-x} \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e^{x}}=1-\frac{1}{3}e^{y} \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}=\frac{3}{3-e^{y}} \quad\Leftrightarrow\quad x=\ln\frac{3}{3-e^{y}}$$

Siis $f^{-1}:\left]-\infty,\ \ln 3\right[\to\left]0,\ \infty\right[,\ \ f^{-1}(x)=\ln\dfrac{3}{3-e^{x}}$

5) $B=A_{f^{-1}}=f(A)=\left]-\infty,\ \ln 3\right[$ ja $f^{-1}(B)=A=\left]0,\ \infty\right[$

6) $f'(x)=\dfrac{3e^{-x}}{3(1-e^{-x})}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=D\ln\frac{3}{3-e^{y}}=\frac{1}{\frac{3}{3-e^{y}}}\cdot D\frac{3}{3-e^{y}}$$

$$=\frac{3-e^{y}}{3}\cdot\frac{0\cdot(3-e^{y})+e^{y}\cdot 3}{(3-e^{y})^{2}}=\frac{3-e^{y}}{3}\cdot\frac{3e^{y}}{(3-e^{y})^{2}}$$

$$=\frac{e^{y}}{3-e^{y}}$$

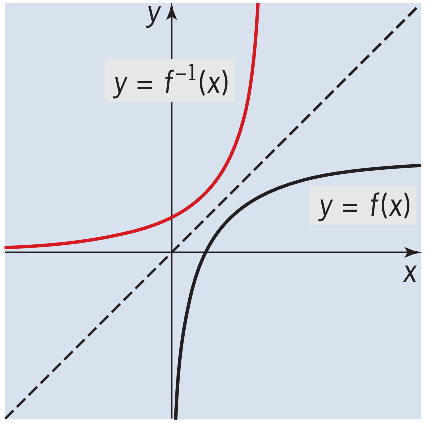
Vastinpisteessä $y = \ln\left(3(1-e^{-x})\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^y = 3(1-e^{-x})$,
jolloin

$$f'(x)\cdot\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\cdot\frac{e^y}{3-e^y} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\cdot\frac{3(1-e^{-x})}{3-3(1-e^{-x})}$$

$$= \frac{e^{-x}}{1}\cdot\frac{3}{3-3(1-e^{-x})} = \frac{3e^{-x}}{3\left(1-(1-e^{-x})\right)}$$

$$= \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = 1 \quad \square$$

7)



342.

$$f(x) = \frac{x^2-9}{3x^2+1}$$

1) Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.
Funktion kuvaajalla ei siis ole pystysuoria asymptootteja.

2) Muut asymptootit:

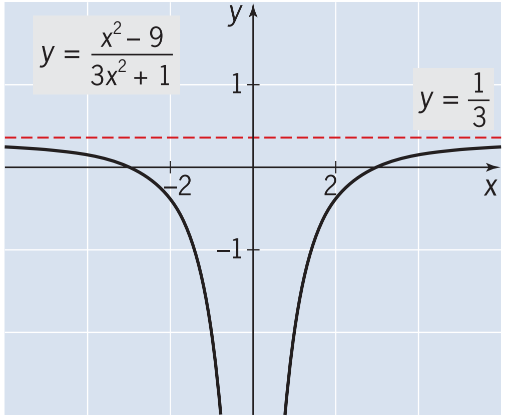
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{9}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-9}{3x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{9}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

Funktion kuvaajalla on vaakasuora asymptootti $y = \frac{1}{3}$.

Vastaus $y = \frac{1}{3}$

Graafinen tarkistus:



343.

Murtofunktio $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ on määritelty, kun $x \neq \pm 2$.

1) Pystysuorat asymptootit:

Tapa 1
Koska

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{x}{x^2-4}=+\infty$$

niin asymptoottina on pystysuora suora $x=2$.

Koska

$$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+}\frac{x}{x^2-4}=+\infty$$

niin asymptoottina on pystysuora suora $x=-2$.

Tapa 2
Koska osoittajan raja-arvo $\lim\limits_{x\to\pm 2} x=\pm 2\neq 0$ ja nimittäjän raja-arvo $\lim\limits_{x\to\pm 2}(x^2-4)=0.$, niin pystysuorina asymptootteina ovat suorat $x=\pm 2$.

2) Muut asymptootit:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\infty(1-0)}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=0$$

Siis suora $y=0$ on asymptootti.

Vastaus $x=-2$, $x=2$, $y=0$

344.

Murtofunktio $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ on määritelty, kun $x\neq 1$.

1) Pystysuorat asymptootit:

Tapa 1

Koska

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{x}{x-1}=-\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{x}{x-1}=+\infty$$

niin kuvaajan asymptoottina on pystysuora suora $x=1$.

Tapa 2

Koska osoittajan raja-arvo on $\lim\limits_{x\to 1} x = 1 \neq 0$ ja nimittäjän raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, niin asymptoottina on pystysuora suora $x=1$

2) Muut asymptootit:

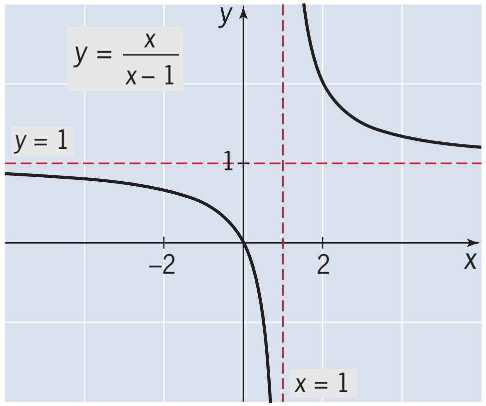
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-0}=1$$

Siis vaakasuora suora $y=1$ on asymptootti.

Vastaus $x=1$, $y=1$

Graafinen tarkistus:



345.

Murtofunktio $f(x)=\dfrac{x^5+x^2+2}{x^2}$ on määritelty, kun $x\neq 0$.

1) Pystysuorat asymptootit:

Tapa 1

Koska

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+x^2+2}{x^2}=\infty$$

niin asymptoottina on pystysuora suora $x=0$.

Tapa 2

Koska $\lim\limits_{x\to 0}(x^5+x^2+2)=2\neq 0$ ja $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, niin pystysuorana asymptoottina on $x=0$.

2) Muut asymptootit:

Osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän, joten suoritetaan jakolasku

$$f(x)=\frac{x^5+x^2+2}{x^2}=\frac{x^5}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}=x^3+1+\frac{2}{x^2}$$

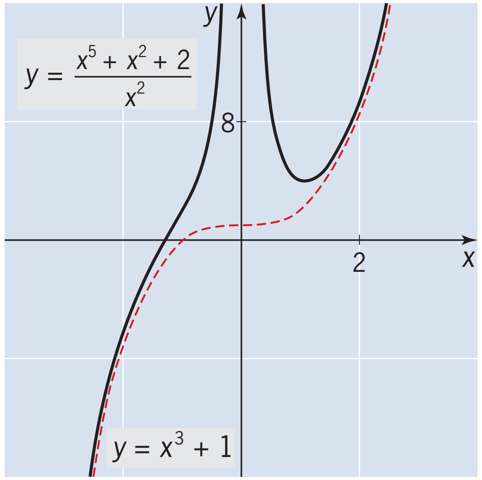
Funktion *f* arvot lähestyvät polynomifunktion $g(x)=x^3+1$ arvoja, kun *x* kasvaa tai pienenee rajatta, sillä

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2}=0$$

Siis käyrä $y=x^3+1$ on funktion *f* kuvaajan asymptootti.

Vastaus $x=0$ ja $y=x^3+1$

Graafinen tarkistus:



346.

Murtofunktio $g(x)=\dfrac{3x^2-2x}{x-3}=\dfrac{x(3x-2)}{x-3}$ on määritelty, kun $x\neq 3$.

1) Pystysuorat asymptootit:

Koska

$$\lim_{x\to 3-} g(x)=\lim_{x\to 3-}\frac{x(3x-2)}{x-3}=-\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to 3+} g(x)=\lim_{x\to 3+}\frac{x(3x-2)}{x-3}=+\infty$$

niin kuvaajan asymptoottina on pystysuora suora $x=3$.

2) Muut asymptootit:

Osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän, joten suoritetaan jakolasku.

$$\begin{array}{r@{}l} & 3x+7 \\ x-3\,\big)\, & 3x^2 - 2x \\ & \underline{(\mp)\,3x^2\, (\pm)\,9x} \\ & 7x \\ & \underline{(\mp)\,7x\,(\pm)\,21} \\ & 21 \end{array}$$

Siis $g(x)=\dfrac{3x^2-2x}{x-3}=3x+7+\dfrac{21}{x-3}$.

Funktion *g* arvot lähestyvät polynomifunktion $h(x)=3x+7$ arvoja, kun *x* kasvaa tai pienenee rajatta, sillä

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(g(x)-h(x)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{21}{x-3}=0$$

Siis suora $y=3x+7$ on kuvaajan asymptootti.

3) Funktion nollakohdat:

$$\frac{3x^2-2x}{x-3}=0$$
$$3x^2-2x=0$$
$$x(3x-2)=0$$

$$x=0 \text{ tai } x=\frac{2}{3}$$

Kuvaajan pisteitä ovat (0, 0) ja $\left(\frac{2}{3},0\right)$.

4) Kulkukaavio ja ääriarvopisteet:

$$g(x)=\frac{3x^2-2x}{x-3}$$

$$\left| \begin{array}{l} x\neq 3 \\ D\frac{f}{g}=\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2} \end{array}\right.$$

$$g'(x)=\frac{(6x-2)\cdot(x-3)-1\cdot\left(3x^2-2x\right)}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{6x^2-18x-2x+6-3x^2+2x}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{3x^2-18x+6}{(x-3)^2}\quad ,\quad x\neq 3$$

Derivaatan nollakohdat:

$$\frac{3x^2-18x+6}{(x-3)^2}=0$$
$$3x^2-18x+6=0 \qquad |:3$$
$$x^2-6x+2=0$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{128}}{2}$$
$$x=\frac{6\pm 2\sqrt{7}}{2}=3\pm\sqrt{7}$$

Kulkukaavio

$3x^2-18x+6$	+	−	−	+
$(x-3)^2$	+	+	+	+
$g'(x)$	+	−	−	+
$g(x)$	↗	↘	↘	↗

$3-\sqrt{7}$ $\quad 3 \quad$ $3+\sqrt{7}$ $\quad x$

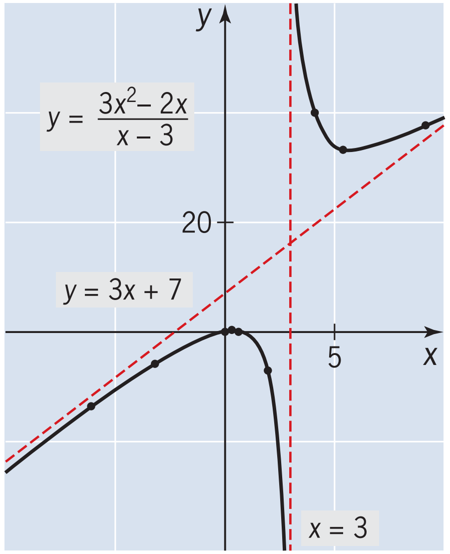
Jatkuvalla funktiolla *g* on kulkukaavion perusteella maksimi ja minimi.

$f(3-\sqrt{7})\approx 0{,}1$ Maksimipiste (0,4 ; 0,1)

$f(3+\sqrt{7})\approx 32$ Minimipiste (5,6 ; 32)

5) Muutamia käyrän pisteitä:

x	$y=\dfrac{3x^2-2x}{x-3}$	(x, y)
– 6	– 13,3	(– 6 , – 13)
–3	– 5,5	(– 3 ; – 5,5)
2	– 8	(2 , – 8)
4	40	(4 , 40)
9	37,5	(9 ; 37,5)



Vastaus Asymptootit ovat $x=3$ ja $y=3x+7$.

347.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $x\neq\pm1$

1) Pystysuorat asymptootit:

Tapa 1
Koska

$$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x}{x^2-1}=+\infty$$

niin pystysuora asymptootti on $x=1$.

Koska

$$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{x}{x^2-1}=+\infty$$

niin pystysuora asymptootti on $x=-1$.

Tapa 2
Koska

$$\lim_{x\to1} x=1\neq0 \text{ ja } \lim_{x\to1}(x^2-1)=0$$

sekä

$$\lim_{x\to-1} x=-1\neq0 \text{ ja } \lim_{x\to-1}(x^2-1)=0$$

niin suorat $x=\pm1$ ovat kuvaajan asymptootteja.

2) Muut asymptootit:

Koska

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=0$$

niin suora $y=0$ on asymptootti.

Vastaus $x=\pm1$, $y=0$

b) $f(x)=\frac{2x^2}{4-x^2}$, $x\neq\pm2$

1) Pystysuorat asymptootit:

Tapa 1

Koska

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}\frac{2x^2}{4-x^2}=+\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}\frac{2x^2}{4-x^2}=-\infty$$

niin pystysuora asymptootti on $x=2$.

Koska

$$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}\frac{2x^2}{4-x^2}=-\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2+}\frac{2x^2}{4-x^2}=-\infty$$

niin pystysuora asymptootti on $x=-2$.

Tapa 2

Koska $\lim_{x\to\pm2}2x^2=8\neq0$ ja $\lim_{x\to\pm2}(4-x^2)=0$, niin suorat $x=\pm2$ ovat kuvaajan asymptootteja.

2) Muut asymptootit

Koska

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{2}{-1}=-2$$

niin suora $y=-2$ on kuvaajan asymptootti.

Vastaus $x=\pm2,\quad y=-2$

c) $f(x)=\frac{x^2-1}{1-x}$, $x\neq1$

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}=-x-1,\quad x\neq1$$

Siis funktion f kuvaaja on suora $y=-x-1$ lukuun ottamatta pistettä (1, –2).

Vastaus ei asymptootteja

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-5}$, $x\neq 5$

1) Pystysuorat asymptootit:

Tapa 1
Koska

$$\lim_{x\to 5-} f(x)=\lim_{x\to 5-}\frac{x^3}{x-5}=-\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to 5+} f(x)=\lim_{x\to 5+}\frac{x^3}{x-5}=+\infty$$

niin pystysuora asymptootti on $x=5$.

Tapa 2
Koska $\lim\limits_{x\to 5} x^3=125\neq 0$ ja $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)=0$,

niin $x=5$ on asymptootti.

2) Muut asymptootit:

Osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän, joten suoritetaan jakolasku.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+5x+25 \\
\hline
x-5 & x^3 \\
 & \underline{(\mp)x^3 (\pm)5x^2} \\
 & 5x^2 \\
 & \underline{(\mp)5x^2 (\pm)25x} \\
 & 25x \\
 & \underline{(\mp)25x (\pm)125} \\
 & 125
\end{array}$$

Siis $f(x)=\dfrac{x^3}{x-5}=x^2+5x+25+\dfrac{125}{x-5}$

Funktion *f* arvot lähestyvät polynomifunktion $g(x)=x^2+5x+25$ arvoja, kun muuttuja x kasvaa tai pienenee rajatta, koska

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{125}{x-5}=0.$$

Siis $y=x^2+5x+25$ on asymptootti.

Vastaus $x=5$, $y=x^2+5x+25$

348.

$$f(x)=\frac{2x^3}{x^2-4}\quad , x\neq \pm 2$$

1) Pystysuorat asymptootit:

Koska

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{2x^3}{x^2-4}=-\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{2x^3}{x^2-4}=+\infty$$

niin asymptootti on $x=2$.

Koska

$$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-}\frac{2x^3}{x^2-4}=-\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+}\frac{2x^3}{x^2-4}=+\infty$$

niin asymptootti on $x=-2$.

2) Muut asymptootit:

Osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän, joten suoritetaan jakolasku.

$$\begin{array}{r r}
 & 2x \\
x^2-4\big) & 2x^3 \\
 & \underline{(\mp)2x^3(\pm)8x} \\
 & 8x
\end{array}$$

Siis $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-4}=2x+\frac{8x}{x^2-4}$

Funktion *f* arvot lähestyvät polynomifunktion $g(x)=2x$ arvoja kun *x* kasvaa tai pienenee rajatta, sillä

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=0.$$

Siis funktion kuvaajalla on asymptoottina suora $y=2x$.

Vastaus Asymptootit ovat $x=\pm 2$ ja $y=2x$.

349.

$$f(x)=\frac{x^2-4x}{x^2+4},\quad x\in\mathbb{R}$$

1) Ääriarvokohdat

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(2x-4)\cdot\left(x^2+4\right)\ -2x\cdot\left(x^2-4x\right)}{\left(x^2+4\right)^2}\\&=\frac{2x^3+8x-4x^2-16-2x^3+8x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\\&=\frac{4x^2+8x-16}{\left(x^2+4\right)^2}\end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat

$$\frac{4x^2+8x-16}{\left(x^2+4\right)^2}=0$$

$$4x^2+8x-16=0 \quad \big|:4$$

$$x^2+2x-4=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}$$

$$x=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5}$$

Kulkukaavio

$4x^2+8x-16$	+	−	+
(x^2+4)	+	+	+
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$-1-\sqrt{5}$ $\quad$ $1+\sqrt{5}$ $\quad$ x

Koska funktio *f* on jatkuva, niin kulkukaavion perusteella

- maksimikohta on $x=-1-\sqrt{5}\approx-3,2$ ja maksimi on $f\left(-1-\sqrt{5}\right)\approx1,6$.

  Kuvaajan maksimipiste on siis (–3,2 ; 1,6).

- minimikohta on $x=-1+\sqrt{5}\approx1,2$ ja minimi on $f\left(1+\sqrt{5}\right)\approx-0,6$.

  Kuvaajan minimipiste on siis (–1,2 ; –0,6).

2) Asymptootit

Murtofunktiolla ei voi olla pystysuoria asymptootteja, koska nimittäjällä ei ole nollakohtia.

Tutkitaan funktion arvoja, kun *x* kasvaa ja pienenee rajatta. Koska osoittajan asteluku on yhtä suuri kuin nimittäjän asteluku, suoritetaan jakolasku.

$$
\begin{array}{rrr}
 & & 1 \\
x^2+4\big) & x^2 & -4x \\
 & (\mp)x^2 & (\mp)4 \\
\hline
 & -4x & -4
\end{array}
$$

Siis $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2+4}=1+\dfrac{-4x-4}{x^2+4}$.

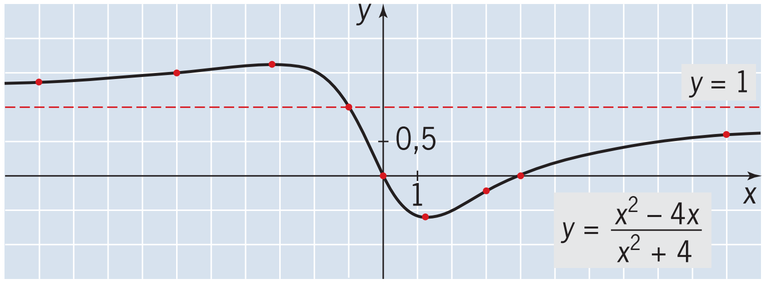
Funktion *f* arvot lähestyvät polynomifunktion $g(x)=1$ arvoja, kun *x* kasvaa tai pienenee rajatta, sillä

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-g(x)\right) &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x-4}{x^2+4} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(-4-\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4-\frac{4}{x}}{x+\frac{4}{x}}=0
\end{aligned}
$$

Funktion kuvaajan asymptoottina on siis suora $y=1$.

Vastaus Maksimikohta $x=-1-\sqrt{5}$
Minimikohta $x=-1+\sqrt{5}$
Asymptootti $y=1$

Graafinen tarkistus:



350.

Funktio $y(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ on määritelty, kun $x\neq 2$.

Derivaatta

$$y'(x)=\frac{2x(x-2)-1\cdot x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

Derivaatan nollakohdat

$$\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-4x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \text{ tai } x=4$$

Funktion kulkukaavio

x^2-4x	+	–	–	+
$(x-2)$	+	+	+	+
$y'(x)$	+	–	–	+
$y(x)$	↗	↘	↘	↗
x	0	2	4	

Kuolkukaavion perusteella funktiolla on

maksimi $y(0)=\dfrac{0^2}{0-2}=0$ ja

minimi $y(4)=\dfrac{4^2}{4-2}=8$

Käyrän yhtälö on supistetussa muodossa, joten pystysuora asymptootti löytyy nimittäjän nollakodasta
$x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$.

Muut asymptootit:

$$
\begin{array}{rl}
 & \qquad x+2 \\
x-2\big) & \quad x^2 \\
 & \underline{_{(\mp)}x^2 \,_{(\pm)}2x} \\
 & \qquad 2x \\
 & \qquad \underline{_{(\mp)}2x \,_{(\pm)}4} \\
 & \qquad\qquad 4
\end{array}
$$

Siis $y(x)=x+2+\dfrac{4}{x-2}$, joten asymptootin yhtälö on $y=x+2$,

sillä $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$.

Vastaus maksimi 0, minimi 8
asymptootit $x=2$ ja $y=x+2$

351.

Funktio $y(x)=x+\dfrac{1}{2x^2}$ on määritelty, kun $x\neq 0$.

Derivaatta on $y'(x)=1+\dfrac{1}{2}\cdot(-2)x^{-3}=\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{x^3-1}{x^3}$.

Derivaatan nollakohdat

$y'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$

Funktion *y* kulkukaavio

x^3-1	$-$	$-$	$+$
x^3	$-$	$+$	$+$
$y'(x)$	$+$	$-$	$+$
$y(x)$	↗	↘	↗

0 1 x

Kulkukaavion perusteella fuktion *y* minimi $y(1)=1+\dfrac{1}{2\cdot 1^2}=1\dfrac{1}{2}$.

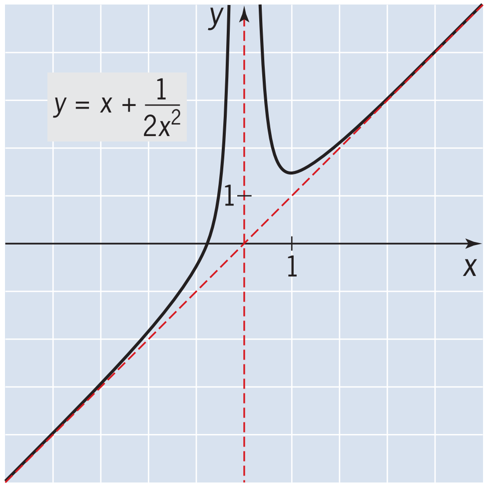
Käyrän minimipiste on $\left(1,\ 1\dfrac{1}{2}\right)$. Maksimipisteitä ei ole.

Käyrän $y=f(x)$ yhtälö on supistetussa muodossa, joten pystysuorana asymptoottina on nimittäjän nollakohdan mukaan suora $x=0$.

Muut asymptootit:

Käyrä $y(x)=x+\dfrac{1}{2x^2}$ lähestyy rajatta suoraa $y=x$, koska

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$, joten asymptoottine on suora $y=x$.



Vastaus Minimipiste on $\left(1,\ 1\frac{1}{2}\right)$.

Asymptootit ovat $y = x$ ja $x = 0$.

352.

$$y = x^3\left(x^2 - 1\right)^{-1} = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad x \neq \pm 1$$

1) Pystysuorat asymptootit

Koska

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$$

niin käyrän asymptoottina on pystysuora suora $x = 1$.

Koska

$$\lim_{x \to -1-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty \text{ ja}$$

$$\lim_{x \to -1+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$$

niin käyrän asymptoottina on pystysuora suora $x = -1$.

2) Muut asymptootit

Osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän, joten suoritetaan jakolasku.

$$\begin{array}{rl} & x \\ x^2 - 1 \big) & \overline{\quad x^3 \quad\quad} \\ & \underline{(\pm)x^3 (\pm)x} \\ & \quad\quad\quad x \end{array}$$

Siis $y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$

Käyrän $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ arvot lähestyvät polynomifunktion $f(x) = x$ arvoja, kun x kasvaa tai pienenee rajatta, sillä

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-f(x)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=0$$

Siis suora $y=x$ on käyrän asymptootti.

3) Nollakohdat

$$\frac{x^3}{x^2-1}=0 \qquad \Big| x\neq\pm1$$

$$x^3=0$$

$x=0$ Siis käyrän piste on (0, 0).

4) Kulkukaavio ja ääriarvopisteet

$$y=\frac{x^3}{x^2-1} \qquad \Bigg| \begin{array}{l} x\neq\pm1 \\ \mathrm{D}\dfrac{f}{g}=\dfrac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}\end{array}$$

$$y'=\frac{3x^2\cdot\left(x^2-1\right)-2x\cdot x^3}{\left(x^2-1\right)^{\ 2}}$$

$$=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} \quad , \qquad x\neq\pm1$$

Derivaatan nollakohdat

$$\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0$$

$$x^2\left(x^2-3\right)=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad x^2-3=0$$

$$x^2=3$$

$$x=\pm\sqrt{3}$$

Kulkukaavio

x^2	+	+	+	+	+	+
x^2-3	+	−	−	−	−	+
$(x^2-1)^2$	+	+	+	+	+	+
$y'(x)$	+	−	−	−	−	+
$y(x)$	↗	↘	↘		↘	↗

$-\sqrt{3}$ -1 0 1 $\sqrt{3}$ x

Jatkuvalla käyrällä *y* on kulkukaavion perusteella maksimi ja minimi.

Kun $x=-\sqrt{3}$, niin $y=\dfrac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{\left(-\sqrt{3}\right)^2-1}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\approx-2,6$

- Maksimipiste (–1,7 ; –2,6)

Kun $x=\sqrt{3}$, niin $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}6$

- Minimipiste (1,7 ; 2,6)

Huomautus:

Funktio $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ on pariton, koska

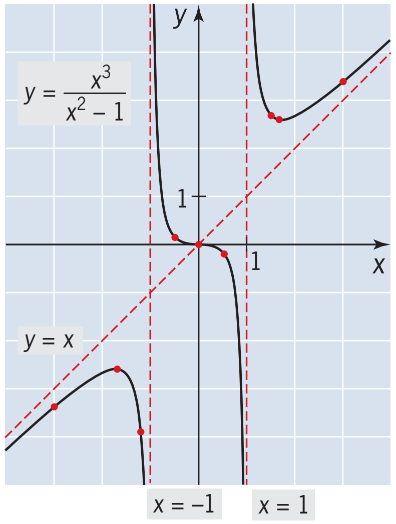
$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\frac{-x^3}{x^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x)$$ kaikilla

$x\neq\pm1$, joten funktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen.

5) Muutamia käyrän pisteitä

x	$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$	(x, y)
± 3	± 3,4	(± 3 ; ± 3,4)
± 1,2	± 3,9	(± 1,2 ; ± 3,9)
± 0,5	± 0,2	(± 0,5 ; ± 0,2)

Vastaus Asymptootit $x=-1$, $x=1$ ja $y=x$



353.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}\quad,\quad x\neq\pm1$$

1) Pystysuorat asymptootit

Käyrän yhtälö on supistetussa muodossa.
Nimittäjän nollakohdat ovat

$$x^2-1=0$$
$$(x+1)(x-1)=0$$
$$x=\pm1$$

Pystysuorat asymptootit ovat siis $x=\pm1$.

2) Muut asymptootit

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$

Siis vaakasuora suora $y=1$ on kuvaajan asymptoottina.

3) Funktion nollakohdat

$$f(x)=0$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=0$$

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0}+1=0$$

Ei nollakohtia.

4) Kulkukaavio ja ääriarvopisteet

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad \left|\begin{array}{l} x\neq\pm1 \\ D\dfrac{f}{g}=\dfrac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}\end{array}\right.$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-2x\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{\left(x^2-1\right)^{\ 2}}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}, \qquad x\neq\pm\ 1$$

Derivaatan nollakohdat

$$-4x=0$$

$$x=0$$

Kulkukaavio

$-4x$	+	+	–	–
$(x^2-1)^2$	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	–	–
$f(x)$	↗	↗	↘	↘

$-1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad x$

$$f(0)=\frac{0^2+1}{0^2-1}=-1$$

Maksimipiste (0, –1)

5) Muutamia kuvaajan pisteitä

x	$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	(x, y)
± 3	1,25	$(\pm 3 ; 1{,}25)$
± 2	$1\frac{2}{3}$	$(\pm 2 ; 1{,}7)$
$\pm 1{,}5$	2,6	$(\pm 1{,}5 ; 2{,}6)$
$\pm 0{,}5$	$-1\frac{2}{3}$	$(\pm 0{,}5 ; 1{,}7)$

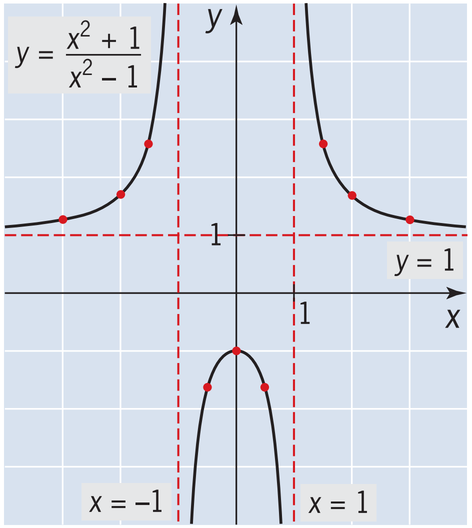
Huomautus:

Funktio *f* on parillinen, sillä

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}=f(x)$$

kaikilla $x \neq \pm 1$, joten kuvaaja on symmetrinen *y*-akselin suhteen.

Vastaus $x=-1,\ x=1$ ja $y=1$



354.

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x},\ \ x \neq 0$$

1) Pystysuorat asymptootit

Koska käyrä on supistetussa muodossa ja nimittäjän ainoa nollakohta on $x=0$, niin kuvaajan asymptoottina on pystysuora
suora $x=0$.

2) Muut asymptootit

Osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän, joten suoritetaan jakolasku.

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x}=\frac{x^3}{x}+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{x}$$

Funktion *f* arvot lähestyvät polynomifunktion $g(x)=x^2$ arvoja, kun *x* kasvaa tai pienenee rajatta, sillä

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

Siis kuvaajan asymptoottina on käyrä $y=x^2$.

3) Funktion nollakohdat

$$f(x)=0$$

$$\frac{x^3+1}{x}=0$$

$$x^3+1=0$$

$$x^3=-1$$

$$x=\sqrt[3]{-1}$$

$$x=-1$$

Kuvaajan piste on siis $(-1,0)$

4) Kulkukaavio ja ääriarvopisteet

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x}$$

$x\neq 0$

$$\mathrm{D}\frac{f}{g}=\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot x-1\cdot\left(x^3+1\right)}{x^2}=\frac{3x^3-x^3-1}{x^2}$$

$$=\frac{2x^3-1}{x^2}\quad,\quad x\neq 0$$

Derivaatan nollakohdat

$$2x^3-1=0$$

$$x^3=\frac{1}{2}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\approx 0,79$$

Kulkukaavio

Derivaatta $f'(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2}$ on jatkuva, joten se voi vaihtaa merkkiään vain ohitettaessa nollakohta.

$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$			

0 $\qquad \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad x$

x	$f'(x)$
-1	$-$
$0,5$	$-$
1	$+$

Jatkuvalla funktiolla *f* on kulkukaavion perusteella minimiarvona

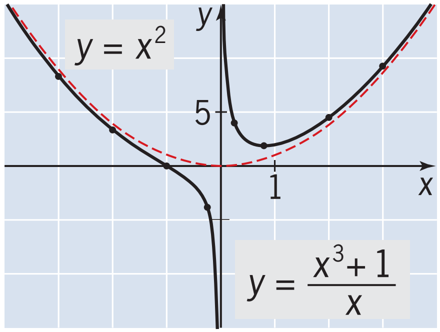
$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{1}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\approx 1{,}9$$

Minimipiste on siis $(\,0{,}8\,;\,1{,}9\,)$.

5) Muutamia kuvaajan pisteitä

x	$y=\dfrac{3x^2-2x}{x-3}$	(x, y)
–3	8,7	(–3 , 8,7)
–2	3,5	(–2 ; 3,5)
0,25	–3,9	(–0,25 ;–3,9)
0,25	4,1	(0,25 ; 4,1)
2	4,5	(2 ; 4,5)
3	9,3	(3 ; 9,3)

Vastaus Asymptootit ovat $x=0$ ja $y=x^2$.



355.

$$f(x)=\frac{(x-2)^3}{x^2-4x+3}$$

1) Pystysuorat asymptootit

Nimittäjän nollakohdat

$$x^2-4x+3=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}$$

$$x=3 \text{ tai } x=1$$

Koska käyrän yhtälö on supistetussa muodossa, niin nimittäjän nollakohdista

Siis $x=1$ ja $x=3$ ovat funktion f kuvaajan pystysuorat asymptootit.

2) Muut asymptootit

$$f(x)=\frac{(x-2)^3}{(x-3)(x-1)}$$
$$=\frac{(x-2)\left(x^2-4x+4\right)}{x^2-4x+3}=\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+3}$$

Koska osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän asteluku, niin suoritetaan jakolasku.

$$\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\qquad x-2 \\ \hline
x^2-4x+3 & x^3-6x^2+12x-8 \\
 & \underline{(\mp)\,x^3\,(\pm)\,4x^2\,(\mp)\,3x\qquad} \\
 & \qquad -2x^2+\;9x-8 \\
 & \qquad \underline{(\pm)\,2x^2\,(\mp)\,8x\,(\pm)\,6} \\
 & \qquad\qquad\qquad x-2
\end{array}$$

Siis $f(x)=x-2+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$, $x\neq 1$, $x\neq 3$

Funktion *f* arvot lähestyvät polynomifunktion $g(x)=x-2$ arvoja, kun *x* kasvaa tai pienenee rajatta, sillä

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(x-4+\frac{3}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{x-4+\frac{3}{x}}$$
$$=\frac{1-0}{\pm\infty-4+0}=0$$

Siis $y=x-2$ on kuvaajan asymptootti.

Vastaus Asymptootit ovat $x=1,\ x=3,\ y=x-2$

356.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-2},\quad x\neq 2$

Asymptoottina $x=2$, koska $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

b) $f(x)=5+\frac{1}{x}=\frac{5x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{5x+1}{x}, \quad x\neq 0$

Koska $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-5\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$, niin asymptoottina $y=5$.

c) $f(x)=5+\frac{1}{x-2}=\frac{5(x-2)}{x-2}+\frac{1}{x-2}$

$=\frac{5x-10+1}{x-2}=\frac{5x-9}{x-2}, \quad x\neq 2$

Asymptoottina $x=2$, koska $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}\frac{5x-9}{x-2}=+\infty$.

Koska $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-5\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2}=0$, niin asymptoottina $y=5$.

d) $f(x)=x+1+\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x+1}{x}, \quad x\neq 0$

Koska $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$, niin asymptoottina $y=x+1$.

e) $f(x)=x^3+1+\frac{1}{x+1}=\frac{x^3(x+1)}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}$

$=\frac{x^4+x^3+x+1+1}{x+1}=\frac{x^4+x^3+x+2}{x+1}, \quad x\neq -1$

Asymptoottina $x=-1$, koska

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}\frac{x^4+x^3+x+2}{x+1}=+\infty.$$

Koska $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x^3+1)\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+1}=0$, niin asymptoottina $y=x^3+1$.

357.

a) $f(x)=\frac{1}{x}, \quad x\neq 0$

Asymptoottina pystysuora suora $x=0$, koska

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Asymptoottina vaakasuora suora $y=0$, koska

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Siis asymptootit ovat $x=0$ ja $y=0$.

b) $f(x)=\frac{1}{x},\quad x\neq 0$

Asymptoottina vaakasuora suora $y=0$, koska

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Asymptoottina pystysuora suora $x=0$, koska

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Siis asymptootit ovat $x=0$ ja $y=0$.

c) $f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x},\quad x\neq 0$

Asymptoottina nouseva suora $y=x$, koska

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Asymptoottina pystysuora suora $x=0$, koska

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+1}{x}=+\infty.$$

Siis asymptootit ovat $x=0$ ja $y=x$.

d) $f(x)=x^3+\frac{1}{x}=\frac{x^4+1}{x},\quad x\neq 0$

Asymptoottina kolmannen asteen polynomi $y=x^3$, koska

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x^3\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Asymptoottina pystysuora suora $x=0$, koska

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^4+1}{x}=+\infty.$$

Siis asymptootit ovat $x=0$ ja $y=x^3$.

e) $f(x)=-x+\frac{1}{x}=\frac{-x^2+1}{x},\quad x\neq 0$

Asymptoottina pystysuora suora $x=0$, koska

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{-x^2+1}{x}=+\infty.$$

Asymptoottina laskeva suora $y=-x$, koska

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Siis asymptootit ovat $x=0$ ja $y=-x$.

358.

1) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$, $x\neq -1$

$$y=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}$$

$$=x-1+\frac{1}{x+1} \qquad \Big|\text{myös jakokulmalla}$$

Asymptootit $y=x-1$ ja $x=-1$, koska $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ sekä

$$\lim_{x\to -1-}\frac{x^2}{x+1}=-\infty \text{ ja } \lim_{x\to -1+}\frac{x^2}{x+1}=+\infty .$$

Siis D

2) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\neq -1$

Asymptoottina on $x=-1$, koska

$$\lim_{x\to -1-}\frac{x-1}{x+1}=+\infty \text{ ja } \lim_{x\to -1+}\frac{x-1}{x+1}=-\infty .$$

Koska $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1$, niin asymptoottina on $y=1$.

Siis asymptootit ovat $x=-1$ ja $y=1$.

Siis B

3) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Määrittelyjoukko $\mathbb{R}$ (ei pystysuoria asymptootteja).

Koska

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=0$$

Niin vaakasuora asymptootti on $y=0$ (x-akseli).

Siis A

4) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}=x+1$, $x\neq -1$

Kuvaaja on suora $y=x+1$ lukuun ottamatta pistettä (–1, 0)

Siis F

5) $y = \dfrac{x+1}{x^2+2x+1} = \dfrac{x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1}$, $x \neq -1$

Koska $\lim\limits_{x \to -1} 1 = 1 \neq 0$ ja $\lim\limits_{x \to -1} (x+1) = 0$, niin pystysuorana asymptoottina on $x = -1$.

Koska $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+1}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, niin asymptoottina on $y = 0$.

Asymptootit $x = -1$ ja $y = 0$ (x-akseli).

Siis C

6) $y = \dfrac{x^3+x^2-x}{x+1}$, $x \neq -1$

Koska $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^3+x^2-x\right) = -1+1+1 = 1 \neq 0$ ja $\lim\limits_{x \to -1} (x+1) = 0$ niin pystysuorana asymptoottina on $x = -1$.

Osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän, joten suoritetaan jakolasku.

$$
\begin{array}{r l}
 & x^2 \qquad -1 \\ \cline{2-2}
x+1 \big) & x^3+x^2-x \\
 & \underline{{\scriptstyle(\mp)}\,x^3\,{\scriptstyle(\mp)}\,x^2} \\
 & \qquad -x \\
 & \underline{\qquad {\scriptstyle(\pm)}\,x\,{\scriptstyle(\pm)}\,1} \\
 & \qquad\qquad 1
\end{array}
$$

Siis $y = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

Funktion $y = \dfrac{x^3+x^2-x}{x+1}$ arvot lähestyvät polynomifunktion $g(x) = x^2 - 1$ arvoja, kun x kasvaa tai pienenee rajatta, sillä

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(y - \left(x^2-1\right)\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Asymptoottina on siis $y = x^2 - 1$.

Siis E

Vastaus 1 – D, 2 – B, 3 – A, 4 – F, 5 – C, 6 – E

359.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}\ ,\quad x\neq -1$$

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1\ ,\quad x\neq -1$$

Funktion f kuvaajalla ei ole asymptootteja, sillä funktion f kuvaaja on suora $y=x-1$ lukuun ottamatta pistettä (–1, –2).

360.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x}=2x+1+\dfrac{1}{x}$

Funktion *f* arvot lähestyvät polynomifunktion $g(x)=2x+1$ arvoja, kun *x* kasvaa tai pienenee rajatta, sillä

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

Funktion f kuvaajan asymptoottina on $y=g(x)$. □

b)

$$\left|f(x)-g(x)\right|<1$$

$$\left|\frac{2x^2+x+1}{x}-(2x+1)\right|<1 \qquad \big|\ x\neq 0$$

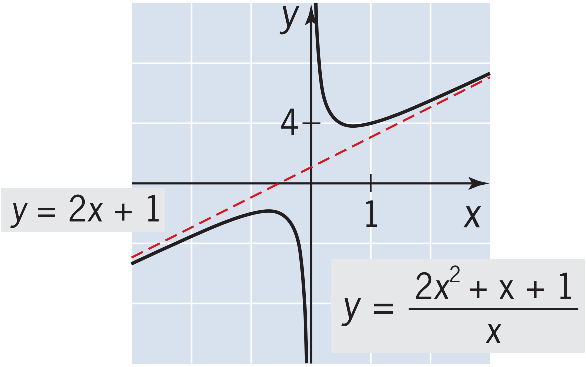
$$\left|2x+1+\frac{1}{x}-2x-1\right|<1$$

$$\left|\frac{1}{x}\right|<1$$

$$\frac{1}{|x|}<1 \qquad \big|\ \cdot|x|\quad (>0)$$

$$|x|>1$$

$$x<-1 \ \text{ tai } \ x>1$$



361.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + a + 2}{x + 2}$, $x \neq -2$

Polynomi $P(x) = x^2 + 4x + a + 2$ ei saa olla jaollinen binomilla $x + 2$. Saadaan

$$\begin{aligned} P(-2) &\neq 0 \\ (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + a + 2 &\neq 0 \\ 4 - 8 + a + 2 &\neq 0 \\ a &\neq 2 \end{aligned}$$

b) Kun $a \neq 2$, niin osoittajan raja-arvo on

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} (x^2 + 4x + a + 2) &= 4 - 8 + a + 2 \\ &= a - 2 \neq 0 \end{aligned}$$

ja nimittäjän raja-arvo

$$\lim_{x \to -2} (x + 2) = 0 .$$

Siis asymptoottina on $x = -2$.
Osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän, joten suoritetaan jakolasku.

$$\begin{array}{rl}
 & x \qquad +2 \\ \cline{2-2}
x+2 \,\big) & x^2 \;+\; 4x + a + 2 \\
 & \underline{(\mp)\, x^2 \,(\mp)\, 2x} \\
 & \qquad 2x + a + 2 \\
 & \underline{\qquad (\mp)\, 2x \quad (\mp)\, 4} \\
 & \qquad\quad a - 2
\end{array}$$

Siis $f(x) = x + 2 + \dfrac{a - 2}{x + 2}$

Funktion *f* arvot lähestyvät polynomifunktion $g(x) = x + 2$ arvoja, kun *x* kasvaa tai pienenee rajatta, sillä

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - g(x) \big) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a - 2}{x + 2} = 0$$

Siis asymptoottina on $y = x + 2$.

Vastaus a) $a \neq 2$

b) $x = -2$ ja $y = x + 2$

362.

$f(x) = ax^4 + bx^3$

Ääriarvo $f(-1) = 2$.

Saadaan yhtälö $a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^3 = 2$ eli $a - b = 2$.

1) Kulkukaavio ja ääriarvot

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$$

Derivaatan nollakohdat

$$4ax^3 + 3bx^2 = 0$$
$$x^2(4ax + 3b) = 0$$

$x = 0$ tai $4ax + 3b = 0$

$$4ax = -3b \quad \left| \begin{array}{l} :4a\ (\neq 0 \\ \text{koska ääriarvo-} \\ \text{kohtana } x = -1) \end{array} \right.$$

$$x = -\frac{3b}{4a}$$

Koska $x = -1$ on ääriarvokohta, niin

$$-\frac{3b}{4a} = -1 \text{ eli } 3b = 4a$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ 3b = 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b + 2 & \text{|sijoitetaan alempaan} \\ 3b = 4a \end{cases}$$

$$3b = 4(b + 2)$$
$$3b = 4b + 8$$
$$b = -8$$
$$a = -8 + 2 = -6$$

Siis $f(x) = -6x^4 - 8x^3$ ja $f'(x) = x^2(-24x - 24)$

x^2	+	+	+
$-24x - 24$	+	−	−
$f'(x)$	+	−	−
$f(x)$	↗	↘	↘

-1 0 x

Jatkuvalla funktiolla *f* on kulkukaavion perusteella ainut ääriarvokohta $x = -1$.

$f(-1) = 2$ Globaali maksimipiste $(-1,\ 2)$

$f(0) = 0$ Käyrän piste (0, 0).

2) Epäoleelliset raja-arvot

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-6x^4 - 8x^3\right) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-6x^4 - 8x^3\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-6 - \frac{8}{x}\right) = \infty\cdot(-6) = -\infty$$

3) Funktion nollakohdat

$$f(x) = 0$$

$$-6x^4 - 8x^3 = 0$$

$$-2x^3(3x+4) = 0$$

$x = 0$ tai $x = -\frac{4}{3}$

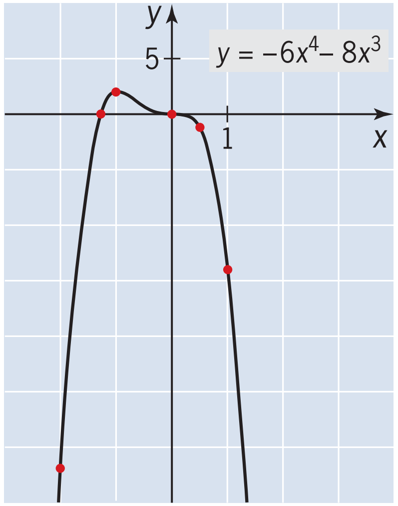
Kuvaajan pisteitä ovat (0,0) ja $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$.

4) Muutamia kuvaajan pisteitä

x	$y = -6x^4 - 8x^3$	(x, y)
-2	$-6\cdot 16 - 8\cdot(-8) = -32$	$(-2, -32)$
$0{,}5$	$-6\cdot 0{,}5^4 - 8\cdot 0{,}5^3 = -1{,}4$	$(0{,}5; -1{,}4)$
1	$-6 - 8 = -14$	$(1, -14)$

Vastaus $a = -6$ ja $b = -8$

Ääriarvo $f(-1) = 2$ on globaali maksimi.



363.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+nx}{1+nx^2}$$

1) $x=0$

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n\cdot 0}{1+n\cdot 0}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

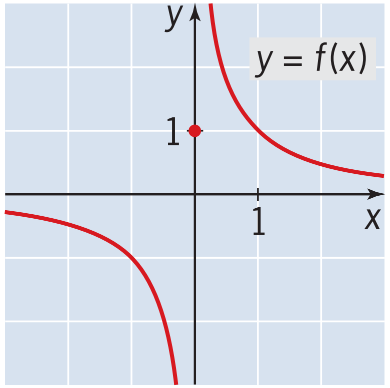
2) $x\neq 0$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+nx}{1+nx^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{n}+x\right)}{n\left(\frac{1}{n}+x^2\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+x}{\frac{1}{n}+x^2}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$$

$$\text{Siis}\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Funktion f kuvaaja on piste (0, 1) sekä hyperbeli $y=\frac{1}{x}$, jonka asymptootteina ovat koordinaattiakselit.



364.

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x}{2^x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4^x}{2^x\left(1-\frac{1}{2^x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4^x}{2^x}}{1-\frac{1}{2^x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{2}\right)^x}{1-\frac{1}{2^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{1-\frac{1}{2^x}}=\frac{\infty}{1-0}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{2^x-1}=\frac{0}{0-1}=0$$

b) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{4^x}{2^x-1}$

Koska

$\lim\limits_{x\to 0-} 4^x = 4^0 = 1 \neq 0$ ja

$\lim\limits_{x\to 0-} \left(2^x-1\right) = 2^0-1 = 1-1 = 0$ sekä

$\dfrac{4^x}{2^x-1} < 0$, kun $x \to 0-$,

niin $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{4^x}{2^x-1} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{4^x}{2^x-1}$:

Koska

$\lim\limits_{x\to 0+} 4^x = 4^0 = 1 \neq 0$ ja

$\lim\limits_{x\to 0+} \left(2^x-1\right) = 2^0-1 = 1-1 = 0$ sekä

$\dfrac{4^x}{2^x-1} > 0$, kun $x \to 0+$,

niin

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4^x}{2^x-1} = +\infty$$

c) $f(x) = \dfrac{4^x}{2^x-1}$, $x \neq 0$

1) Asymptootit

- Nimittäjän nollakohta $x = 0$ on funktion f kuvaajan pystysuora asymptootti (b-kohta).
- Koska $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ (a-kohta), niin kuvaajan asymptootti on $y = 0$ (x-akseli).
- Tutkitaan, onko muita asymptootteja.

$$
\begin{array}{rl}
 & \qquad 2^x+1 \\
2^x-1\,\big) & \;\; 4^x \\
 & \underline{(\mp)4^x\,(\pm)2^x} \\
 & \qquad 2^x \\
 & \quad \underline{(\mp)2^x\,(\pm)1} \\
 & \qquad\quad 1
\end{array}
$$

Siis $f(x) = \dfrac{4^x}{2^x-1} = 2^x + 1 + \dfrac{1}{2^x-1}$.

Funktion f arvot lähestyvät funktion $g(x) = 2^x + 1$ arvoja, kun x kasvaa rajatta, sillä

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x-1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Siis kuvaajan asymptootti on käyrä $y = 2^x + 1$.

(huom: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{2^x-1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2^\infty}-1} = -1 \neq 0$, joten käyrä

$y = 2^x + 1$ ei ole funktion f kuvaajan asymptoottina, kun $x \to -\infty$)

2) Funktion nollakohdat

$$\frac{4^x}{2^x - 1} = 0\,,\ x \neq 0$$

$$4^x = 0 \qquad \Big|\, 4^x > 0 \text{ aina}$$

ei nollakohtia

3) Funktion ääriarvot

$$f(x) = \frac{4^x}{2^x - 1},\ x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{4^x \ln 4 \cdot (2^x - 1) - 2^x \ln 2 \cdot 4^x}{(2^x - 1)^2} \qquad |\ \ln 4 = 2\ln 2$$

$$= \frac{4^x \cdot 2\ln 2 \cdot (2^x - 1) - 2^x \ln 2 \cdot 4^x}{(2^x - 1)^2}$$

$$= \frac{4^x \ln 2 (2(2^x - 1) - 2^x)}{(2^x - 1)^2}$$

$$= \frac{4^x \ln 2 (2^x - 2)}{(2^x - 1)^2},\ x \neq 0$$

Derivaatan nollakohdat

$$4^x \ln 2\left(2^x - 2\right) = 0 \qquad \Big|\, 4^x > 0 \text{ aina}$$

$$2^x - 2 = 0$$

$$2^x = 2$$

$$2^x = 2^1 \qquad \Big|\, \text{sama kantaluku}$$

$$x = 1$$

Kulkukaavio

$4^x > 0$ ja $(2^x - 1)^2 > 0$ aina $(x \neq 0)$,

joten derivaatan merkin määrää lauseke $2^x - 2$, joka on jatkuva ja voi näin ollen vaihtaa merkkiään vain ohitettaessa nollakohta $x = 1$.

$2^x - 2$	$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$-$		$-$		$+$
$f(x)$					
		0		1	x

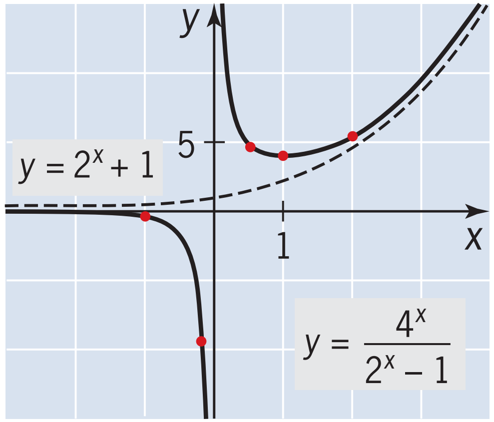
x	$2^x - 2$
0	$-$
2	$+$

Jatkuvan funktion f minimi on kulkukaavion perusteella

$$f(1) = \frac{4^1}{2^1 - 1} = \frac{4}{1} = 4 \qquad \text{Minimipiste } (1,\ 4)$$

4) Muutamia kuvaajan pisteitä

x	y	(x, y)
–1	–0,5	(–1 ; –0,5)
–0,2	–5,9	(–0,2 ; –5,9)
0,5	4,8	(0,5 ; 4,8)
2	5,3	(2 ; 5,3)



365.

Olkoon $y_1 = \ln(1+\mathrm{e}^x)$ ja $y_2 = x$.

y-koordinaattien erotus on

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \ln(1+\mathrm{e}^x) - x = \ln(1+\mathrm{e}^x) - x\cdot 1 \\ &= \ln(1+\mathrm{e}^x) - x\cdot\ln\mathrm{e} = \ln(1+\mathrm{e}^x) - \ln\mathrm{e}^x \\ &= \ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \to \ln 0 = 0,\ \text{kun } x\to\infty \end{aligned}$$

Siis käyrä y_1 lähestyy rajatta käyrää y_2, kun $x\to\infty$. □

366.

Tarkastellaan funktiota $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x},\ x \neq 0$.

Derivaatta on

$$f'(x) = \frac{2x\cdot x - 1\cdot(x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Pisteeseen $P = (a,\, b) = \left(a,\ \dfrac{a^2+1}{a}\right)$ asetetun tangentin

kulmakerroin on $f'(a) = \dfrac{a^2-1}{a^2}$ ja tangentin yhtälö on

$$y - \frac{a^2+1}{a} = \frac{a^2-1}{a^2}(x-a)$$

Käyrän y yhtälö on supistetussa muodossa, joten pystysuora asymptootti löydetään nimittäjän nollakohdan avulla. Pystysuora asymptootti on $x=0$.

Muut asymptootit:

$$y=\frac{x^2+1}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}$$

Käyrä lähestyy rajatta suoraa $y=x$, sillä $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$.

Siis asymptoottina on suora $y=x$.

Asymptoottien ja tangentin rajaaman kolmion ala:

Leikkauspisteet saadaan yhtälöpareista

$$\begin{cases}x=0\\ y=x\end{cases}$$

leikkauspiste $A=(0,\ 0)$

$$\begin{cases}x=0\\ y-\frac{a^2+1}{a}=\frac{a^2-1}{a^2}(x-a)\end{cases}$$

$$y=\frac{a^2+1}{a}-\frac{a^2-1}{a}=\frac{2}{a}$$

leikkauspiste $B=\left(0,\ \frac{2}{a}\right)$

$$\begin{cases}y=x\\ y-\frac{a^2+1}{a}=\frac{a^2-1}{a^2}(x-a)\end{cases}$$

$$x-\frac{a^2+1}{a}=\frac{a^2-1}{a^2}(x-a)$$

$$x=\frac{a^2-1}{a^2}x-\frac{a^2-1}{a}+\frac{a^2+1}{a}=\frac{a^2-1}{a^2}x+\frac{2}{a}$$

$$\frac{a^2}{a^2}x-\frac{a^2-1}{a^2}x=\frac{2}{a}$$

$$x=\frac{2}{a}\cdot\frac{a^2}{1}=2a$$

leikkauspiste $C=(2a,\ 2a)$

Kolmion ala on $A=\frac{\text{kanta}\cdot\text{korkeus}}{2}=\frac{\frac{2}{a}\cdot 2a}{2}=2$

joka ei riipu leikkauspisteestä P. □